大學線性代數再探

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

本講義主要目的是針對大三學生介紹有關線性代數進一步的理論. 主要是著重於一個 linear operator 的結構問題. 先備知識在線性代數方面需了解矩陣的運算, 行列式的性質等. 至於向量空間以及 linear transformation 等基本性質, 在本講義會再次介紹. 另外代數方面需了解 field 的基本性質以及 over 一個 field 的 polynomial ring 的代數結構 (即多項式環的除法原理).

本講義雖然主要以中文撰寫, 不過當涉及定義或專有名詞時, 為免翻譯的困擾將以英文取代. 因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現, 若有不便請見諒.

本講義編寫費時, 編寫完後並未經過嚴謹的校對. 疏漏在所難免, 雖不至於有理論性上嚴重的錯誤, 但讀者仍應注意不宜概括全收. 若發現錯誤, 歡迎提出寶貴的意見.

Chapter 5

Operators on Inner Product Spaces

在這一章中我們談論在 inner product spaces 中的 linear operators 的性質. 由於 inner product spaces 比一般 vector spaces 有更豐富的結構, 所以我們可以更深入的探討這情況下的 linear operators. 我們談論的是常用的 inner product spaces, 所以這一章中的 vector spaces 皆為 vector space over $\mathbb{C}$ 或是 $\mathbb{R}$.

5.1. Inner Product Spaces

在這一節中, 我們簡單介紹 inner product space 的定義及基本性質. 首先回顧熟悉的 Real inner product space.

Definition 5.1.1. 令 V 為一個 vector space over $\mathbb{R}$. 若函數 $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ 滿足以下的性質, 便稱為 V 的一個 *inner product.*

(1) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(2) $\langle r\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + s\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ and $r, s \in \mathbb{R}$.

(3) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 而且 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ 若且唯若 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$.

此時我們稱 V 為 *real inner product space.*

至於 complex 的情形, 首先回顧, 若 $z \in \mathbb{C}$, 我們用 $\bar{z}$ 表示 z 的 conjugate (共軛複數).

Definition 5.1.2. 令 V 為一個 vector space over $\mathbb{C}$. 若函數 $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ 滿足以下的性質, 便稱為 V 的一個 *inner product.*

(1) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(2) $\langle r\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = r\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + s\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ and $r, s \in \mathbb{C}$.

(3) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 而且 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ 若且唯若 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$.

此時我們稱 V 為 *complex inner product space.*

注意, 一個 vector space 可以有不同的 inner product. 當我們說 V 是一個 inner product space, 表示我們已給定某一個 inner product.

Example 5.1.3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中我們定義

$$\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

此為 $\mathbb{R}^n$ 的 *standard inner product.* 在此 inner product 之下, 我們稱 $\mathbb{R}^n$ 為 n-dimensional *Euclidean space.*

在 $\mathbb{C}^n$ 中我們定義

$$\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n},$$

此為 $\mathbb{C}^n$ 的 *standard inner product.* 在此 inner product 之下, 我們稱 $\mathbb{C}^n$ 為 n-dimensional *unitary space.*

Question 5.1. 假設 V 是一個 *over* $\mathbb{C}$ 的 *inner product space.* 若將 V 看成是 *vector space over* $\mathbb{R}$, 是否 V 為 *over* $\mathbb{R}$ 的 *inner product space?*

注意在 real inner product space 的情形, 由於 (1) 的對稱性, 利用 (2) 對於任意的 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 以及 $r,s\in\mathbb{R}$ 我們有

$$\langle \mathbf{u}, r\mathbf{v}+s\mathbf{w}\rangle = r\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + s\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle.$$

因此對任意的 $\mathbf{v},\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathbf{w}'\in V$ 以及 $r,r',s,s'\in\mathbb{R}$ 我們有

$$\begin{aligned}\langle r\mathbf{v}+r'\mathbf{v}', s\mathbf{w}+s'\mathbf{w}'\rangle &= r\langle \mathbf{v}, s\mathbf{w}+s'\mathbf{w}'\rangle + r'\langle \mathbf{v}', s\mathbf{w}+s'\mathbf{w}'\rangle \\ &= rs\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + rs'\langle \mathbf{v},\mathbf{w}'\rangle + r's\langle \mathbf{v}',\mathbf{w}\rangle + r's'\langle \mathbf{v}',\mathbf{w}'\rangle \qquad (5.1)\end{aligned}$$

不過在 complex 的情形, 則由 (1), (2) 對於任意的 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 以及 $r,s\in\mathbb{C}$ 我們有

$$\langle \mathbf{u}, r\mathbf{v}+s\mathbf{w}\rangle = \overline{\langle r\mathbf{v}+s\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle} = \overline{r}\overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle} + \overline{s}\overline{\langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle} = \overline{r}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \overline{s}\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle.$$

因此對於任意的 $\mathbf{v},\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathbf{w}'\in V$ 以及 $r,r',s,s'\in\mathbb{C}$ 我們有

$$\begin{aligned}\langle r\mathbf{v}+r'\mathbf{v}', s\mathbf{w}+s'\mathbf{w}'\rangle &= r\langle \mathbf{v}, s\mathbf{w}+s'\mathbf{w}'\rangle + r'\langle \mathbf{v}', s\mathbf{w}+s'\mathbf{w}'\rangle \\ &= r\overline{s}\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + r\overline{s'}\langle \mathbf{v},\mathbf{w}'\rangle + r'\overline{s}\langle \mathbf{v}',\mathbf{w}\rangle + r'\overline{s'}\langle \mathbf{v}',\mathbf{w}'\rangle \qquad (5.2)\end{aligned}$$

在 inner product 的定義中, $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0$ 若且唯若 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$, 這一個性質稱為 *non-degenerate.* 它可以確保我們有以下之性質.

Lemma 5.1.4. 若 V 是一個 *inner product space* 且 $\mathbf{v}\in V$ 滿足 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$, $\forall \mathbf{w}\in V$, 則 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$.

Proof. 只要選取 $\mathbf{w}=\mathbf{v}$, 則有 $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0$. 故由 inner product 的定義知 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$. □

Lemma 5.1.4 告訴我們一個判定 V 中元素是否為 $\mathbf{O}_V$ 的方法. 現若 $\mathbf{v},\mathbf{u}\in V$, 滿足 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$, $\forall \mathbf{w}\in V$, 則由

$$\langle \mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = 0$$

得知 $\mathbf{v}=\mathbf{u}$. 所以我們有以下簡單但有用的性質.

Corollary 5.1.5. 設 V 是一個 *inner product space.* 若 $\mathbf{v},\mathbf{u}\in V$ 滿足 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$, $\forall \mathbf{w}\in V$, 則 $\mathbf{v}=\mathbf{u}$.

Lemma 5.1.4 也可以幫助我們了解 linear operator, 以下的性質將來會很有用. 要注意在 real 和 complex 的不同.

Proposition 5.1.6. 設 V 是一個 *inner product space* 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator.*

(1) 當 V 是一個 *real inner product space,* 若 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle = 0$, $\forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 則 T 為 *zero mapping.*

(2) 當 V 是一個 *complex inner product space,* 若 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle = 0$, $\forall \mathbf{v}\in V$ 則 T 為 *zero mapping.*

Proof. 給定任意 $\mathbf{v}\in V$, 因 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle = 0$, $\forall \mathbf{w}\in V$, 故由 Lemma 5.1.4 知 $T(\mathbf{v})=\mathbf{O}_V$. 因為對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆成立, 故 $T=\mathbf{O}$.

至於 complex 的情形, 利用等式 (5.2) 對於任意的 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 以及 $r\in\mathbb{C}$ 我們有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(r\mathbf{v}+\mathbf{w}), r\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle \\ &= \langle rT(\mathbf{v})+T(\mathbf{w}), r\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle \\ &= r\bar{r}\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle + r\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle + \bar{r}\langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle + \langle T(\mathbf{w}),\mathbf{w}\rangle \\ &= r\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle + \bar{r}\langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

當我們分別代 $r=1$ 和 $r=\sqrt{-1}$, 可得 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle + \langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle = 0$ 和 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle - \langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle = 0$. 依此得 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle$, $\forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. 故由前面結論知 $T=\mathbf{O}$. □

當 V 是一個 inner product space, 不管是 over $\mathbb{R}$ 或是 over $\mathbb{C}$, 我們都會有以下的 Cauchy-Schwarz inequality.

Lemma 5.1.7. 假設 V 是一個 *inner product space over F,* 其中 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 若對於任意 $\mathbf{v}\in V$ 我們定義 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$, 則對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 皆有

$$|\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|.$$

而且 $|\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$ 若且唯若 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 其中有一個為 $\mathbf{O}_V$ 或是存在 $r\in F$ 使得 $\mathbf{v}=r\mathbf{w}$.

Proof. 當 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 其中有一個為 $\mathbf{O}_V$, 很容易知道等式成立. 所以我們假設 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 皆不為 $\mathbf{O}_V$. 對於任意 $r\in F$, 當 F 為 $\mathbb{R}$ 時利用式子 (5.1) 我們有

$$0 \leq \langle \mathbf{v}-r\mathbf{w}, \mathbf{v}-r\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle - 2r\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + r^2\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle.$$

此時令 $r=\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle/\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$, 我們有
$$\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2}{\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle}\leq \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle.$$
當 F 為 $\mathbb{C}$ 時利用式子 (5.2) 我們有
$$0\leq \langle \mathbf{v}-r\mathbf{w},\mathbf{v}-r\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle-r\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle-\bar{r}\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle+r\bar{r}\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle.$$
此時令 $r=\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle/\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$ (注意 $\bar{r}=\overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}/\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$, 因為 $\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle\in\mathbb{R}$), 我們有
$$\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}}{\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle}\leq \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle.$$
因為在 $F=\mathbb{C}$ 時 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\overline{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}=|\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle|^2$ 故得證此 inequality.

最後若等式成立表示存在 $r\in F$ 會使得 $\langle \mathbf{v}-r\mathbf{w},\mathbf{v}-r\mathbf{w}\rangle=0$ 此即 $\mathbf{v}=r\mathbf{w}$. □

給定一個 inner product 之後, 我們就可以定義所謂的 norm. 這是因為我們有以下的性質:

Proposition 5.1.8. 假設 V 是一個 *inner product space over* F *(*$F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$*). 若對於任意* $\mathbf{v}\in V$ 我們定義 $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$, 則我們有以下的性質*:*

(1) $\|\mathbf{v}\|\geq 0$ 而且 $\|\mathbf{v}\|=0$ 若且唯若 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$.

(2) 對於任意 $r\in F$ 以及 $\mathbf{v}\in V$, 皆有 $\|r\mathbf{v}\|=|r|\|\mathbf{v}\|$.

(3) 對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 皆有 $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|\leq\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$.

Proof. (1) 直接由 inner product 的性質 (3) 可得, 而 (2) 由式子 (5.1), (5.2) 可得, 所以我們僅證明 (3). 由 $\langle \mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle+2\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{w},\mathbf{w}\rangle$, 以及 Lemma 5.1.7 我們知
$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2=\langle \mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle\leq\|\mathbf{v}\|^2+2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|+\|\mathbf{w}\|^2=(\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|)^2,$$
得證 $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|\leq\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$. □

Proposition 5.1.8 (3) 的性質就是所謂的三角不等式 (triangle inequality). 一個 vector space V, 若存在一個函數 $\|\ \|:V\to\mathbb{R}$ 滿足 Proposition 5.1.8 的三個性質便稱為 *normed linear space*, 而函數 $\|\ \|$ 便稱作是一個 *norm*. 所以一個 inner product space 可以利用 Proposition 5.1.8 所定出的 norm 使之成為一個 normed linear space. 另外有了 norm 對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 我們可以定出 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的距離 (distance) $d(\mathbf{v},\mathbf{w})=\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$. 而存有 distance 的 vector space 我們稱為 *metric space*. 所以 inner product space 也會是 metric space. 在 metric space 中有了距離, 我們便可定義 sequence 的收斂與發散. 不過這不屬於本講義所要談論的課題, 我們就不多談.

Question 5.2. 假設 V 是一個 *inner product space.* 試利用 *Proposition 5.1.8* 所定出的 *norm* 證明 parallelogram law*,* 即對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 皆有
$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2+\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2=2\|\mathbf{v}\|^2+2\|\mathbf{w}\|^2.$$

Inner product space 不只讓我們得到 metric space, 另一個重要的性質就是垂直 (orthogonal) 的概念. 我們有以下的定義.

Definition 5.1.9. 假設 V 是一個 inner product space. 若 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 滿足 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$, 則稱 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 *orthogonal*, 用 $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$ 來表示.

若 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 basis 且對任意 $i\neq j$ 皆有 $\mathbf{v}_i\perp\mathbf{v}_j$, 則我們稱 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 *orthogonal basis*. 若 orthogonal basis 中任意的 $\mathbf{v}_i$ 皆滿足 $\|\mathbf{v}_i\|=1$, 我們稱之為 V 的一組 *orthonormal basis*.

注意若 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$, 則 $\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle = 0$, 所以 $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$ 亦等同於 $\mathbf{w}\perp\mathbf{v}$.

Question 5.3. $\perp$ 是否為一個 *equivalent relation?* 它符合哪些 *equivalent relation* 的條件?

依定義若 $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\}$ 為 V 的一組 orthogonal basis, 令 $\mathbf{v}_i=\frac{1}{\|\mathbf{w}_i\|}\mathbf{w}_i$, 則 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 就是 V 的一組 orthonormal basis.

有一組 orthogonal basis (或 orthonormal basis) $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 的好處便是對於任意 $\mathbf{v}\in V$ 我們可以很快的將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 的 linear combination. 這是因為若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 則利用

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle = c_1\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_i\rangle+\cdots+c_n\langle \mathbf{v}_n,\mathbf{v}_i\rangle = c_i\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\rangle,$$

可得

$$c_i=\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle}{\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i\rangle}.$$

當 V 為 finite dimensional 時, 我們可以利用 *Gram-Schmidt orthogonalization process* 找到 V 的一組 orthogonal basis (或 orthonormal basis). 在此僅略述一下這個 process.

首先任取 $\mathbf{w}_1\in V\setminus\{\mathbf{O}_V\}$ 且令 $\mathbf{v}_1=\mathbf{w}_1$. 接著選取 $\mathbf{w}_2\in V\setminus\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1\})$, 且令

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{w}_2-\frac{\langle \mathbf{w}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1.$$

注意此時 $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle=0$ 且 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\})=\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\})$. 接下來如果 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\})=V$, 則 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ 就是 V 的一組 orthogonal basis. 否則再找到 $\mathbf{w}_3\in V\setminus\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\})$, 然後令

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_3-\left(\frac{\langle \mathbf{w}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1+\frac{\langle \mathbf{w}_3,\mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2\right).$$

注意此時 $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3\rangle=\langle \mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\rangle=0$ 且 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\})=\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\})$. 如此一直下去, 也就是說找到 $\mathbf{w}_i\in V\setminus\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{i-1}\})$, 然後令

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{w}_i-\left(\frac{\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1+\cdots+\frac{\langle \mathbf{w}_i,\mathbf{v}_{i-1}\rangle}{\langle \mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i-1}\rangle}\mathbf{v}_{i-1}\right).$$

注意此時 $\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_i\rangle=\cdots=\langle \mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_i\rangle=0$ 且 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_i\})=\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_i\})$. 由於 V 是 finite dimensional, 這個程序一定會停止. 亦即找到 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 orthogonal basis. 再次強調, 在前面過程中如果我們將每個 $\mathbf{v}_i$ 乘上 $\|\mathbf{v}_i\|^{-1}$ 就得到 orthonormal basis. 另一方面, 若原本已有 V 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\}$, 則由於 $\mathbf{w}_i\in V\setminus\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{i-1}\})$, 所以直接套用上面的 process, 就可以得到 V 的一組 orthogonal basis.

當 W 是 V 的 subspace 時, 我們知道可以找到 W' 為 V 的 subspace 使得 $V = W \oplus W'$, 不過符合這個條件的 W' 並不唯一. 在 inner product space 中, 我們可以加上條件使得 W' 為唯一. 我們需要以下的定義.

Definition 5.1.10. 假設 V 為 inner product space, S 為 V 的一個 nonempty subset. 令

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in S\}.$$

我們稱 $S^{\perp}$ 為 the *orthogonal complement* of S in V.

Question 5.4. *什麼是 $\{\mathbf{O}_V\}^{\perp}$? 什麼是 $V^{\perp}$?*

關於 $S^{\perp}$ 我們有以下幾個簡單的性質.

Lemma 5.1.11. 假設 V 為 *inner product space.*

(1) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 $S^{\perp}$ 為 V 的 *subspace.*

(2) 若 S_1, S_2 為 V 的 *nonempty subsets* 滿足 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

(3) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 $S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp}$.

(4) 若 W 為 V 的 *subspace,* 則 $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{O}_V\}$.

Proof. 令 V 為 inner product space over F (即 $F = \mathbb{C}$ 或 $F = \mathbb{R}$).

(1) 首先依定義 $\mathbf{O}_V \in S^{\perp}$. 又若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$, 則對於任意 $r, s \in F$ 皆有 $\langle r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = r\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + s\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{w} \in S$. 亦即 $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 \in S^{\perp}$. 得證 $S^{\perp}$ 為 V 的 subspace.

(2) 若 $\mathbf{v} \in S_2^{\perp}$, 表示對任意 $\mathbf{w} \in S_2$ 皆有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. 故對任意 $\mathbf{w} \in S_1$ 因 $S_1 \subseteq S_2$, 知 $\mathbf{w} \in S_2$, 得證 $\mathbf{v} \in S_1^{\perp}$, 即 $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

(3) 因 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$, 故由 (2) 知 $\mathrm{Span}(S)^{\perp} \subseteq S^{\perp}$. 另一方面, 若 $\mathbf{v} \in S^{\perp}$, 則對任意 $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(S)$, 因存在 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 以及 $\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n \in S$ 使得 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, 我們有 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = c_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v} \rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{v} \rangle = 0$. 亦即 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)^{\perp}$, 得證 $S^{\perp} \subseteq \mathrm{Span}(S)^{\perp}$, 故 $S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp}$.

(4) 若 $\mathbf{v} \in W \cap W^{\perp}$, 表示 $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, 即 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$. 故由 inner product 的性質知 $\mathbf{v} = \mathbf{O}_V$.

□

Question 5.5. *在 Lemma 5.1.11 (1) 中 S 不需假設為 V 的 subspace, $S^{\perp}$ 仍為 V 的 subspace. 為何在 (4) 中需假設 W 為 V 的 subspace?*

Question 5.6. *試證明若 W_1, W_2 為 V 的 subspaces, 則 $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.*

當 W 是 V 的 subspace 我們可以利用 Gram-Schmidt process 找到 W 的一組 orthogonal basis $S = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. 此時對任意 $\mathbf{v} \in V$ 若令

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_k \rangle}{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle}\mathbf{w}_k,$$

我們有 $\tilde{\mathbf{v}} \in W$ 而且對任意 $\mathbf{w}_i$ 皆有 $\langle \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{w}_i \rangle = 0$. 因此由 Lemma 5.1.11 (3) 我們得 $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} \in S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp} = W^{\perp}$. 因此我們有以下的性質.

Proposition 5.1.12. 假設 V 為 *inner product space* 且 W 為 V 的 *finite dimensional subspace*. 對任意 $\mathbf{v}\in V$, 存在 $\tilde{\mathbf{v}}\in W$ 滿足以下性質.

(1) $\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\in W^{\perp}$

(2) 對於任意 $\mathbf{w}\in W\setminus\{\tilde{\mathbf{v}}\}$, 皆有 $\|\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\|<\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$.

(3) $\|\tilde{\mathbf{v}}\|\leq\|\mathbf{v}\|$.

Proof. 選定 W 的一組 orthogonal basis $S=\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\}$, 對任意 $\mathbf{v}\in V$, 利用前面所述我們有 $\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\in W^{\perp}$. 得證 (1).

現任取 $\mathbf{w}\in W$, 由 $\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\in W$, 我們有

$$\langle\mathbf{v}-\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\rangle+\langle\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\rangle.$$

故得 $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|\geq\|\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\|$ 且等號成立若且唯若 $\langle\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{w}\rangle=0$, 即 $\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{v}}$. 得證 (2).

最後因 $\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\in W^{\perp}$ 且 $\tilde{\mathbf{v}}\in W$, 得

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{v}}\rangle=\langle\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\rangle+\langle\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\mathbf{v}}\rangle.$$

故知 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|\leq\|\mathbf{v}\|$. 得證 (3). □

由 Proposition 5.1.12 (2) 我們知 $\tilde{\mathbf{v}}$ 是 W 中距離 $\mathbf{v}$ 最近的, 所以 $\tilde{\mathbf{v}}$ 是唯一的, 即不會因 W 的 orthogonal basis 的選取不同而有所不同. 我們通常用 $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ 來表示 $\tilde{\mathbf{v}}$ 且稱之為 the *projection* of $\mathbf{v}$ on W. 另外我們要強調即使 V 不是 finite dimensional, 只要 W 是 V 的 finite dimensional subspace, Proposition 5.1.12 仍然成立. 不過若 W 不是 finite dimensional, 則 Proposition 5.1.12 就不一定成立了.

Question 5.7. 試證明 *Proposition 5.1.12* 中 $\|\tilde{\mathbf{v}}\|=\|\mathbf{v}\|$ 的充要條件為 $\mathbf{v}\in W$.

現對於任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們可寫成 $\mathbf{v}=\mathbf{v}-\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})+\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$. 由於 $\mathbf{v}-\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})\in W^{\perp}$ 且 $\mathrm{proj}_W(\mathbf{v})\in W$, 我們得 $V=W+W^{\perp}$. 又由 Lemma 5.1.11 (4), $W\cap W^{\perp}=\{\mathbf{O}_V\}$, 我們得證以下定理.

Theorem 5.1.13. 令 V 為 *inner product space* 且 W 為 V 的 *finite dimensional subspace*. 則

$$V=W\oplus W^{\perp}.$$

特別的當 V 本身是 finite dimensional, 任何的 subspace 也是 finite dimensional, 所以 Theorem 5.1.13 對於 V 的任意的 subspace 皆成立. 現若考慮 $W^{\perp}$ 這個 subspace, 我們有 $V=W^{\perp}\oplus(W^{\perp})^{\perp}$. 我們自然會問是否 $W=(W^{\perp})^{\perp}$?

Corollary 5.1.14. 令 V 為 *inner product space* 且 W 為 V 的 *finite dimensional subspace*. 則

$$(W^{\perp})^{\perp}=W.$$

Proof. 若 $\mathbf{w}\in W$, 則對任意 $\mathbf{v}\in W^{\perp}$, 因 $\langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle = 0$, 得 $\mathbf{w}\in (W^{\perp})^{\perp}$. 得證 $W\subseteq (W^{\perp})^{\perp}$. 另一方面若 $\mathbf{v}\in (W^{\perp})^{\perp}$, 首先利用 Theorem 5.1.13, 我們可將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{w}'$, 其中 $\mathbf{w}\in W$ 且 $\mathbf{w}'\in W^{\perp}$. 由於 $\mathbf{v}\in (W^{\perp})^{\perp}$, 我們有 $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}'\rangle = 0$, 故得

$$0=\langle \mathbf{v},\mathbf{w}'\rangle=\langle \mathbf{w},\mathbf{w}'\rangle+\langle \mathbf{w}',\mathbf{w}'\rangle=\langle \mathbf{w}',\mathbf{w}'\rangle.$$

此即表示 $\mathbf{w}'=\mathbf{O}_V$, 故知 $\mathbf{v}=\mathbf{w}\in W$, 即證得 $(W^{\perp})^{\perp}\subseteq W$. □

Question 5.8. 試證明對於一般 *inner product space* 的 *subspace* W *(*不需假設 *finite dimensional)* 皆有 $W^{\perp}=\big((W^{\perp})^{\perp}\big)^{\perp}$.

Question 5.9. 設 V 為 *finite dimensional inner product space,* S 為 V 的 *subset.* 試問 $(S^{\perp})^{\perp}$ 會是甚麼? 又若 W_1,W_2 為 V 的 *subspace,* 試證 $(W_1\cap W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}+W_2^{\perp}$

對於 V 的兩個 subsets S,S', 若對於任意 $\mathbf{v}\in S,\mathbf{v}'\in S'$ 皆有 $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}'\rangle = 0$, 則用 $S\perp S'$ 來表示. 特別的, 若 W,W' 為 V 的 subspaces 且 $W\perp W'$, 則 $W'\subseteq W^{\perp}$, 故利用 Lemma 5.1.11 可得 $W\cap W'=\{\mathbf{O}_V\}$. 現若 $W_1,\ldots,W_k$ 為 V 的 subspaces 滿足 $V=W_1+\cdots+W_k$, 且對於任意 $i\neq j$, 皆有 $W_i\perp W_j$, 則 V 為 $W_1,\ldots,W_k$ 的 direct sum. 我們特別稱此為 V 的一種 *orthogonal direct sum* 且將這種 direct sum 用

$$V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$$

來表示. 例如當 W 為 V 的 finite dimensional subspace, Theorem 5.1.13 告訴我們

$$V=W\boxplus W^{\perp}.$$

5.2. Dual Spaces

Dual space 的概念和 inner product space 的概念有許多相關性, 而且有許多 inner product space 的性質用 dual space 來描述較為清楚. 所以在這一節中我們特別介紹 dual space.

Definition 5.2.1. 假設 V 是一個 vector space over F, 若 $f:V\to F$ 為一個 F-linear transformation, 則稱 f 為一個 *linear functional* on V. 所有的 linear functional on V 形成一個 vector space over F, 我們稱之為 V 的 *dual space*, 用 V^* 來表示.

Question 5.10. 考慮 $n\times n$ 矩陣的 *determinant* 函數 $\det: M_n(F)\to F$ 以及 *trace* 函數 $\mathrm{tr}: M_n(F)\to F$. 哪一個是 *linear functional on* $M_n(F)$*?*

回顧一下給定 V 的一組 basis, $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 任意選取 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n\in W$, 我們可找到唯一的 linear transformation $T:V\to W$ 滿足 $T(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$, $\forall i=1,\ldots,n$. 現對於任意 $i=1,\ldots,n$ 我們考慮 $\mathbf{v}_i^*:V\to F$ 為唯一的 linear function on V, 滿足

$$\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j)=\begin{cases}1, & \text{if } j=i;\\ 0, & \text{if } j\neq i.\end{cases}$$

我們有以下性質.

Theorem 5.2.2. 假設 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 *basis,* 則 $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\}$ 為 V^* 的一組 *basis.* 特別的, 我們有 $\dim(V)=\dim(V^*)$.

Proof. 首先證明 $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\})=V^*$. 也就是說對於任意 $f\in V^*$, 皆存在 $c_1,\ldots,c_n\in F$ 滿足 $f=c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*$. 由前述 linear transformation 可以由 basis 所唯一確定的性質, 我們僅要找到 $c_1,\ldots,c_n\in F$ 使得 f 和 $c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*$ 在每一個 $\mathbf{v}_i$ 的取值皆相同. 然而對每個 $\mathbf{v}_i$, 我們有

$$(c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*)(\mathbf{v}_i)=c_1\mathbf{v}_1^*(\mathbf{v}_i)+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*(\mathbf{v}_i)=c_i\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_i)=c_i. \tag{5.3}$$

所以若令 $c_i=f(\mathbf{v}_i)$, 便可得 $f=c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*$.

接著證明 $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\}$ 為 linearly independent. 假設 $c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*=\mathbf{O}$ 為 zero mapping. 亦即對任意 $\mathbf{v}_i$, 皆有 $(c_1\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_n\mathbf{v}_n^*)(\mathbf{v}_i)=0$, 故由式子 (5.3) 得知 $c_i=0$, $\forall i=1,\ldots,n$. □

給定 V 的一組 basis $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, 我們稱 $\{\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*\}$ 為對應 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 的 *dual basis.*

Question 5.11. 假設 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 *basis,* 對於 $\mathbf{v}\in V$, $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v})$ 為何?

既然 V^* 亦為 F-space, 我們自然會問 V^* 的 dual space 為何? 即 $(V^*)^*$ (稱為 V 的 *double dual space*). 依定義 $(V^*)^*$ 中的元素為 linear functional on V^*. 也就是說若 $\sigma\in(V^*)^*$, 則 $\sigma:V^*\to F$ 為一個 linear transformation 將任意的 $f\in V^*$ 送到一個 F 值. 特別的, 若 $\mathbf{v}\in V$, 我們可以考慮 $\hat{\mathbf{v}}:V^*\to F$ 其定義為對任意 $f\in V^*$, $\hat{\mathbf{v}}(f)=f(\mathbf{v})$. 要說明 $\hat{\mathbf{v}}\in(V^*)^*$, 我們必須說明 $\hat{\mathbf{v}}$ 為 linear functional, 即對於任意 $f,g\in V^*$ 以及 $r,s\in F$, 我們有

$$\hat{\mathbf{v}}(rf+sg)=(rf+sg)(\mathbf{v})=rf(\mathbf{v})+sg(\mathbf{v})=r\hat{\mathbf{v}}(f)+s\hat{\mathbf{v}}(g).$$

Theorem 5.2.2 告訴我們當 V 是 finite dimensional 時, $\dim(V)=\dim(V^*)$, 所以亦得 $\dim(V^*)=\dim((V^*)^*)$. 也就是說 $\dim(V)=\dim((V^*)^*)$. 當然此時 V 和 $(V^*)^*$ 為 isomorphic, 事實上我們可以利用 $\hat{\mathbf{v}}$ 建構出 V 和 $(V^*)^*$ 間的一個重要 isomorphism, 我們稱為 V 和 $(V^*)^*$ 的 *canonical map*

Proposition 5.2.3. 考慮 $\tau:V\to(V^*)^*$ 定義為 $\tau(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}$, $\forall\mathbf{v}\in V$. 則 τ 為一個 *one-to-one* 的 *linear transformation.* 特別當 V 為 *finite dimensional* 時, τ 為一個 *isomorphism.*

Proof. 首先證明 τ 為 linear transformation. 這是因為對任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 以及 $r,s\in F$ 我們有

$$\tau(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})(f)=f(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})=rf(\mathbf{v})+sf(\mathbf{w})=(r\tau(\mathbf{v})+s\tau(\mathbf{w}))(f),\quad \forall f\in V^*,$$

此即表示 $\tau(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})$ 和 $r\tau(\mathbf{v})+s\tau(\mathbf{w})$ 為定義在 V^* 上的同樣函數, 故知 $\tau(r\mathbf{v}+s\mathbf{w})=r\tau(\mathbf{v})+s\tau(\mathbf{w})$.

接著證明 τ 為 one-to-one, 即證明 $\mathrm{Ker}(\tau)=\mathbf{O}_V$. 現假設 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(\tau)$, 即 $\tau(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}$ 為定義在 V^* 上的 zero mapping. 亦即對任意 $f\in V^*$ 皆有 $0=\hat{\mathbf{v}}(f)=f(\mathbf{v})$. 然而若 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 我們一定可以找到 $f\in V^*$ 使得 $f(\mathbf{v})\neq 0$. 由此矛盾得證 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$.

最後若 V 為 finite dimensional, 由 $\tau: V \to (V^*)^*$ 為 one-to-one 以及 $\dim(V) = \dim((V^*)^*)$, 得證 τ 為 onto, 亦即 τ 為 isomorphism. □

在 dual space 中有一個和 orthogonal complement 類似的概念, 我們介紹如下.

Definition 5.2.4. 假設 V 為 vector space, S 為 V 的一個 nonempty subset. 令

$$S^0 = \{f \in V^* \mid f(\mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in S\}.$$

我們稱 S^0 為 the *annihilator* of S.

Question 5.12. 什麼是 $\{\mathbf{O}_V\}^0$? 什麼是 V^0?

關於 S^0 我們有以下幾個類似 Lemma 5.1.11 的性質.

Lemma 5.2.5. 假設 V 為 *vector space over* F.

(1) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 S^0 為 V^* 的 *subspace.*

(2) 若 S_1, S_2 為 V 的 *nonempty subsets* 滿足 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $S_2^0 \subseteq S_1^0$.

(3) 若 S 為 V 的 *nonempty subset,* 則 $S^0 = \mathrm{Span}(S)^0$.

Proof.

(1) 首先依定義 V^* 中的 zero mapping $\mathbf{O}$ 在 S^0. 又若 $f, g \in S^0$, 則對於任意 $r, s \in F$ 皆有 $rf + sg(\mathbf{v}) = rf(\mathbf{v}) + sg(\mathbf{v}) = 0$, $\forall \mathbf{v} \in S$. 亦即 $rf + sg \in S^0$. 得證 S^0 為 V^* 的 subspace.

(2) 若 $f \in S_2^0$, 表示對任意 $\mathbf{w} \in S_2$ 皆有 $f(\mathbf{w}) = 0$. 故對任意 $\mathbf{w} \in S_1$ 因 $S_1 \subseteq S_2$, 知 $\mathbf{w} \in S_2$, 得證 $f \in S_1^0$, 即 $S_2^0 \subseteq S_1^0$.

(3) 因 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$, 故由 (2) 知 $\mathrm{Span}(S)^0 \subseteq S^0$. 另一方面, 若 $f \in S^0$, 則對任意 $\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(S)$, 因存在 $c_1, \ldots, c_n \in F$ 以及 $\mathbf{w}_1 \ldots, \mathbf{w}_n \in S$ 使得 $\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, 我們有 $f(\mathbf{w}) = c_1 f(\mathbf{w}_1) + \cdots + c_n f(\mathbf{w}_n) = 0$. 亦即 $f \in \mathrm{Span}(S)^0$, 得證 $S^0 \subseteq \mathrm{Span}(S)^0$, 故 $S^0 = \mathrm{Span}(S)^0$.

□

當 V 是 finite dimensional inner product space, 若 W 為 V 的 subspace, 則 Theorem 5.1.13 告訴我們 $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$. 關於 annihilator 我們也有相同的性質.

Proposition 5.2.6. 假設 $V = W \oplus U$. 則存在一個 *isomorphism* $\phi: U^* \to W^0$. 特別當 V 為 *finite dimensional,* 則對任意的 *subspace* W 皆有 $\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W)$.

Proof. 由 direct sum 的性質, 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 存在唯一的 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. 故對任意 $f \in U^*$, 我們定義 $\phi(f): V \to F$ 為 $\phi(f)(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$. 因 f 是 linear functional 很容易檢查 $\phi(f)$ 亦為 linear functional, 亦即 $\phi(f) \in V^*$. 另依此定義對於所有 $\mathbf{w} \in W$, 因 $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{O}_U$, 故得 $\phi(f)(\mathbf{w}) = f(\mathbf{O}_U) = 0$, 亦即 $\phi(f) \in W^0$. 所以 $\phi: U^* \to W^0$ 是一個

well-defined 的 function. 很容易驗證 ϕ 為 linear transformation. 又若 $f,g\in U^*$ 且 $f\neq g$, 表示存在 $\mathbf{u}\in U$ 使得 $f(\mathbf{u})\neq g(\mathbf{u})$, 因此 $\phi(f)(\mathbf{u})\neq\phi(g)(\mathbf{u})$, 得證 $\phi(f)\neq\phi(g)$, 亦即 ϕ 為 one-to-one. 至於 ϕ 是 onto 的原因是因為對任意 $f\in W^0$, 我們皆有 $f(\mathbf{v})=f(\mathbf{w}+\mathbf{u})=f(\mathbf{u})$, 其中 $\mathbf{w}\in W,\mathbf{u}\in U$ 滿足 $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{u}$. 所以若考慮 $f|_U\in U^*$, 我們有 $\phi(f|_U)=f$, 得證 ϕ 為 onto.

現若 V 為 finite dimensional, 對於任意 subspace W, 我們都可將 W 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\}$ 擴大成 V 的一組 basis $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l\}$. 所以我們有 $V=W\oplus U$, 其中 $U=\mathrm{Span}(\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l\})$. 由 Theorem 5.2.2 以及套用上面的結果, 我們有

$$\dim(W^0)=\dim(U^*)=\dim(U)=\dim(V)-\dim(W).$$

□

Question 5.13. 試證明若 W_1,W_2 為 V 的 *subspaces,* 則 $(W_1+W_2)^0=W_1^0\cap W_2^0$. 又若 V 為 *finite dimensional,* 則 $(W_1\cap W_2)^0=W_1^0+W_2^0$.

既然 W^0 為 V^* 的 subspace, 我們也可以問 W^0 的 annihilator, 即 $(W^0)^0$. 我們有如以下類似 Corollary 5.1.14 的性質.

Corollary 5.2.7. 假設 V 是一個 *finite dimensional vector space,* 且 W 為 V 的 *subspace.* 考慮 *canonical map* $\tau:V\to(V^*)^*$ 定義為 $\tau(\mathbf{v})=\hat{\mathbf{v}}$, $\forall\mathbf{v}\in V$, 則 $\tau(W)=(W^0)^0$.

Proof. 設 $\mathbf{w}\in W$, 則對於任意 $f\in W^0$, 我們有 $\hat{\mathbf{w}}(f)=f(\mathbf{w})=0$, 亦即 $\tau(\mathbf{w})=\hat{\mathbf{w}}\in(W^0)^0$. 得知 $\tau(W)\subseteq(W^0)^0$. 由 Proposition 5.2.3, 我們知道 $\tau:V\to(V^*)^*$ 為 one-to-one, 故 $\dim(\tau(W))=\dim(W)$. 另一方面 Proposition 5.2.6 告訴我們

$$\dim((W^0)^0)=\dim(V^*)-\dim(W^0)=\dim(V)-(\dim(V)-\dim(W))=\dim(W).$$

故知 $\dim(\tau(W))=\dim((W^0)^0)$, 得證 $\tau(W)=(W^0)^0$. □

最後我們來探討 dual space 和 inner product space 間的關係. 首先我們需要以下的定義.

Definition 5.2.8. 令 V,W 為 vector spaces over F, 其中 F 為 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$. 若 $T:V\to W$ 符合對所有 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$, $r\in F$ 皆有 $T(\mathbf{v}+\mathbf{v}')=T(\mathbf{v})+T(\mathbf{v}')$ 以及 $T(r\mathbf{v})=\overline{r}T(\mathbf{v})$, 則稱 T 為一個 *conjugate transformation.* 又若 T 是 one-to-one and onto, 則稱之為 *conjugate isomorphism.*

注意當 $F=\mathbb{R}$ 時, conjugate transformation 就是 linear transformation. 其實當 $F=\mathbb{C}$ 時 conjugate transformation 和 linear transformation 有許多相似之處, 我們介紹幾個有關 conjugate transformation 的性質.

Lemma 5.2.9. 假設 V,W,U 皆為 *vector spaces over* $\mathbb{C}$. $T_1:V\to W$, $T_2:W\to U$.

(1) 若 T_1,T_2 中有一個是 *linear transformation* 另一個是 *conjugate transformation,* 則 $T_2\circ T_1:V\to U$ 為 *conjugate transformation.*

(2) 若 T_1,T_2 皆為 *conjugate transformation,* 則 $T_2\circ T_1:V\to U$ 為 *linear transformation.*

(3) 若 T_1 為 *conjugate isomorphism,* 則 $T_1^{-1}: W \to V$ 亦為 *conjugate isomorphism.*

Proof.

(1) 我們僅證明 T_1 為 conjugate transformation 且 T_2 為 linear transformation 的情況, 另一情況類似, 請自行驗證. 我們需證明對任意 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ 以及 $r, s \in \mathbb{C}$ 皆有 $T_2 \circ T_1(r\mathbf{v} + s\mathbf{v}') = \bar{r}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}) + \bar{s}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}')$. 事實上

$$T_2 \circ T_1(r\mathbf{v} + s\mathbf{v}') = T_2(\bar{r}T_1(\mathbf{v}) + \bar{s}T_1(\mathbf{v}')) = \bar{r}T_2(T_1(\mathbf{v})) + \bar{s}T_2(T_1(\mathbf{v}')) = \bar{r}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}) + \bar{s}T_2 \circ T_1(\mathbf{v}').$$

故 $T_2 \circ T_1$ 為 conjugate transformation.

(2) 若 T_1, T_2 皆為 conjugate transformation, 我們證明對任意 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ 以及 $r, s \in \mathbb{C}$ 皆有 $T_2 \circ T_1(r\mathbf{v} + s\mathbf{v}') = rT_2 \circ T_1(\mathbf{v}) + sT_2 \circ T_1(\mathbf{v}')$. 事實上

$$T_2 \circ T_1(r\mathbf{v} + s\mathbf{v}') = T_2(\bar{r}T_1(\mathbf{v}) + \bar{s}T_1(\mathbf{v}')) = \overline{(\bar{r})}T_2(T_1(\mathbf{v})) + \overline{(\bar{s})}T_2(T_1(\mathbf{v}')) = rT_2 \circ T_1(\mathbf{v}) + sT_2 \circ T_1(\mathbf{v}').$$

故 $T_2 \circ T_1 : V \to U$ 為 linear transformation.

(3) 若 T_1 為 conjugate isomorphism, 因 T_1 為 one-to-one and onto, $T_1^{-1}: W \to V$ 存在且滿足 $T_1(T_1^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$, $\forall \mathbf{w} \in W$. 現對於任意 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ 以及 $r, s \in \mathbb{C}$, 我們有 $T_1(T_1^{-1}(r\mathbf{w} + s\mathbf{w}')) = r\mathbf{w} + s\mathbf{w}'$ 以及

$$T_1(\bar{r}T^{-1}(\mathbf{w}) + \bar{s}T^{-1}(\mathbf{w}')) = \overline{(\bar{r})}T_1(T^{-1}(\mathbf{w})) + \overline{(\bar{s})}T_1(T^{-1}(\mathbf{w}')) = r\mathbf{w} + s\mathbf{w}',$$

故得 $T_1(T^{-1}(r\mathbf{w} + s\mathbf{w}')) = T_1(\bar{r}T^{-1}(\mathbf{w}) + \bar{s}T^{-1}(\mathbf{w}'))$. 因為 T_1 為 one-to-one, 此即表示

$$T^{-1}(r\mathbf{w} + s\mathbf{w}') = \bar{r}T^{-1}(\mathbf{w}) + \bar{s}T^{-1}(\mathbf{w}').$$

故得證 T_1^{-1} 亦為 conjugate isomorphism. □

現若 V 為 inner product space over F, 給定 $\mathbf{v} \in V$, 考慮以下函數 $\rho(\mathbf{v}) : V \to F$ 定義為 $\mathbf{w} \mapsto \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, (即 $\rho(\mathbf{v}) = \langle \cdot, \mathbf{v} \rangle$) 則 $\rho(\mathbf{v})$ 為 linear functional on V, 亦即 $\rho(\mathbf{v}) \in V^*$. 所以 ρ 給了我們一個從 V 到 V^* 的 mapping. 現對於任意 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, 我們有

$$\rho(\mathbf{v} + \mathbf{v}')(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}' \rangle = \rho(\mathbf{v})(\mathbf{w}) + \rho(\mathbf{v}')(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

得知 $\rho(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \rho(\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v}')$ in V^*. 另外若 $r \in F$, 則

$$\rho(r\mathbf{v})(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, r\mathbf{v} \rangle = \bar{r}\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \bar{r}\rho(\mathbf{v})(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

得知 $\rho(r\mathbf{v}) = \bar{r}\rho(\mathbf{v})$ in V^*. 我們有以下的定理.

Proposition 5.2.10. 設 V 為 *finite dimensional inner product space.* 考慮 $\rho : V \to V^*$ 定義為 $\rho(\mathbf{v}) = \langle \cdot, \mathbf{v} \rangle$, 則 ρ 為 *conjugate isomorphism.*

Proof. 我們已知 ρ 為 conjugate transformation, 所以僅要證明 ρ 為 one-to-one and onto.

首先證明 ρ 為 one-to-one. 假設 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ 滿足 $\rho(\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}')$, 此即表示 $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}' \rangle$, $\forall \mathbf{w} \in V$. 然而 Corollary 5.1.5 告訴我們此即表示 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, 得證 ρ 為 one-to-one.

至於 ρ 是 onto, 我們首先選定 V 的一組 orthonormal basis $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$. 對任意 $f\in V^*$, 考慮 $\mathbf{v}=\overline{f(\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\cdots+\overline{f(\mathbf{v}_n)}\mathbf{v}_n$. 則

$$\rho(\mathbf{v})(\mathbf{v}_i)=\langle\mathbf{v}_i,\overline{f(\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\cdots+\overline{f(\mathbf{v}_n)}\mathbf{v}_n\rangle=\langle\mathbf{v}_i,\overline{f(\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i\rangle=f(\mathbf{v}_i),\quad\forall i\in\{1,\ldots,n\}.$$

也就是說 f 和 $\rho(\mathbf{v})$ 在 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 這一組 basis 的取值皆相同, 亦即 $f=\rho(\mathbf{v})$. 得證 ρ 為 onto. □

注意因為 ρ 為 conjugate isomorphism, 由 Lemma 5.2.9 知 $\rho^{-1}:V^*\to V$ 亦為 conjugate isomorphism.

Question 5.14. 在 *Proposition 5.2.10* 中可以利用 $\rho:V\to V^*$ 為 *one-to-one* 以及 $\dim(V)=\dim(V^*)$ 來說明 $\rho:V\to V^*$ 為 *onto* 嗎?

Example 5.2.11. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 上的 standard inner product, 令 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 的 standard basis. 若 $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\in\mathbb{R}^n$, 則 $\rho(\mathbf{v})(\mathbf{e}_i)=\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{v}\rangle=x_i$. 也就是說若令 $\rho(\mathbf{v})=f\in(\mathbb{R}^n)^*$, 則 $f(\mathbf{e}_i)=x_i$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. 反過來, 若 $f\in(\mathbb{R}^n)^*$, 則 $\rho^{-1}(f)=f(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+\cdots+f(\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$.

考慮 $\mathbb{C}^n$ 上的 standard inner product, 令 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ 為 $\mathbb{C}^n$ 的 standard basis. 若 $\mathbf{v}=z_1\mathbf{e}_1+\cdots+z_n\mathbf{e}_n\in\mathbb{C}^n$, 則 $\rho(\mathbf{v})(\mathbf{e}_i)=\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{v}\rangle=\overline{z_i}$. 也就是說若令 $\rho(\mathbf{v})=f\in(\mathbb{C}^n)^*$, 則 $f(\mathbf{e}_i)=\overline{z_i}$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. 反過來, 若 $f\in(\mathbb{C}^n)^*$, 則 $\rho^{-1}(f)=\overline{f(\mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1+\cdots+\overline{f(\mathbf{e}_n)}\mathbf{e}_n$.

5.3. Transpose and Adjoint

雖然以後我們關心的是 linear operator, 不過有關於 transpose 和 adjoint 的性質, 用一般的 linear transformation 較容易看出. 所以這一節中我們考慮的是一般的 linear transformation. 給定一個 linear transformation $T:V\to W$, 在 dual spaces W^*,V^* 上我們可以定義 T 的 transpose, 而若 V,W 為 inner product space, 我們也可以定義 T 的 adjoint. 我們將探討 transpose 和 adjoint 之間的關係.

首先我們探討一個 linear transformation $T:V\to W$ 的 transpose, 其中 V,W 皆為 vector space over F. 再次強調有關 T 的 transpose 不需假設 V,W 為 inner product space 而且也不需假設為 finite dimensional. 現對於任意 $f\in W^*$, 由於 T,f 皆為 linear transformation, 所以 $f\circ T:V\to F$ 亦為 linear transformation. 也就是說 $f\circ T\in V^*$. 所以我們可定義一個 mapping $T^{\mathrm{t}}:W^*\to V^*$, 其定義為 $T^{\mathrm{t}}(f)=f\circ T$, $\forall f\in W^*$. 依此定義, 對於任意 $f,g\in W^*$, $r,s\in F$ 我們有

$$T^{\mathrm{t}}(rf+sg)=(rf+sg)\circ T=r(f\circ T)+s(g\circ T)=rT^{\mathrm{t}}(f)+sT^{\mathrm{t}}(g),$$

故知 $T^{\mathrm{t}}:W^*\to V^*$ 為 linear transformation. 我們稱 T^{t} 為 T 的 *transpose*. 依定義 T 和 T^{t} 的關係為, 對任意 $\mathbf{v}\in V$, $f\in W^*$ 我們有

$$f(T(\mathbf{v}))=T^t(f)(\mathbf{v}).$$

接下來我們列出 transpose 的基本性質.

Proposition 5.3.1. 設 V,W,U 皆為 *vector space over* F.

(1) 若 $r,s \in F$ 且 $T_1 : V \to W$, $T_2 : V \to W$ 皆為 *linear transformations,* 則

$$(rT_1 + sT_2)^{\mathrm{t}} = rT_1^{\mathrm{t}} + sT_2^{\mathrm{t}}.$$

(2) 若 $T_1 : V \to W$, $T_2 : W \to U$ 皆為 *linear transformations,* 則

$$(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}} = T_1^{\mathrm{t}} \circ T_2^{\mathrm{t}}.$$

(3) $(\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}} = \mathrm{id}_{V^*}$, 特別地, 若 $T : V \to W$ 為 *isomorphism,* 則 $T^{\mathrm{t}} : W^* \to V^*$ 亦為 *isomorphism* 且

$$(T^{\mathrm{t}})^{-1} = (T^{-1})^{\mathrm{t}}.$$

Proof.

(1) 對於任意 $f \in W^*$, 因為 f 為 linear, 我們有

$$(rT_1 + sT_2)^{\mathrm{t}}(f) = f \circ (rT_1 + sT_2) = r(f \circ T_1) + s(f \circ T_2) = rT_1^{\mathrm{t}}(f) + sT_2^{\mathrm{t}}(f) = (rT_1^{\mathrm{t}} + sT_2^{\mathrm{t}})(f).$$

得證 $(rT_1 + sT_2)^{\mathrm{t}} = rT_1^{\mathrm{t}} + sT_2^{\mathrm{t}}$.

(2) 因為 $T_2 \circ T_1$ 為從 V 到 U 的 linear transformation, 所以 $(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}}$ 為從 U^* 到 V^* 的 linear transformation. 現對任意 $f \in U^*$, 我們有

$$(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}}(f) = f \circ (T_2 \circ T_1) = (f \circ T_2) \circ T_1 = T_1^{\mathrm{t}}(f \circ T_2) = T_1^{\mathrm{t}}(T_2^{\mathrm{t}}(f)) = T_1^{\mathrm{t}} \circ T_2^{\mathrm{t}}(f).$$

得證 $(T_2 \circ T_1)^{\mathrm{t}} = T_1^{\mathrm{t}} \circ T_2^{\mathrm{t}}$.

(3) 對於任意 $f \in V^*$, 我們有 $(\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}}(f) = f \circ \mathrm{id}_V = f$, 所以 $(\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}} = \mathrm{id}_{V^*}$. 現若 $T : V \to W$ 為 isomorphism, 我們有 $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V$ 且 $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W$. 故由 (2) 得

$$\mathrm{id}_{V^*} = (\mathrm{id}_V)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}} \circ (T^{-1})^{\mathrm{t}}, \quad \mathrm{id}_{W^*} = (\mathrm{id}_W)^{\mathrm{t}} = (T^{-1})^{\mathrm{t}} \circ T^{\mathrm{t}},$$

得證 T^{t} 為 isomorphism 且 $(T^{\mathrm{t}})^{-1} = (T^{-1})^{\mathrm{t}}$. □

以下結果告訴我們一個 linear transformation 其 kernel 和 image 和其 transpose 的 kernel 與 image 之間的關係. 這個結果對任意的 vector space 皆成立, 不過我們僅探討 finite dimensional 的情形.

Proposition 5.3.2. 假設 V,W 皆為 *finite dimensional vector space,* $T : V \to W$ 為 *linear transformation,* $T^{\mathrm{t}} : W^* \to V^*$ 為其 *transpose.* 則

$$\mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Im}(T)^0, \quad \mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Ker}(T)^0.$$

Proof. 假設 $f \in \mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}})$, 即 $T^{\mathrm{t}}(f) = f \circ T = \mathbf{O}$ in V^*. 這表示對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆有 $T^{\mathrm{t}}(f)(\mathbf{v}) = f(T(\mathbf{v})) = 0$. 得 $f \in \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}^0 = \mathrm{Im}(T)^0$. 反之, 若 $f \in \mathrm{Im}(T)^0$, 表示對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆有 $f(T(\mathbf{v})) = 0$, 亦即 $T^{\mathrm{t}}(f) = \mathbf{O}$ in V^*, 得證 $f \in \mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}})$.

另一方面, 假設 $f \in \mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}})$, 即存在 $g \in W^*$ 使得 $f = T^{\mathrm{t}}(g) = g \circ T$. 故對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, 我們有 $f(\mathbf{v}) = g(T(\mathbf{v})) = g(\mathbf{O}_W) = 0$. 也就是說 $f \in \mathrm{Ker}(T)^0$, 得證 $\mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}}) \subseteq \mathrm{Ker}(T)^0$. 現因 $T^{\mathrm{t}} : W^* \to V^*$ 為 linear transformation, 利用 Theorem 5.2.2 我們有

$$\dim(\mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(W^*) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(W) - \dim(\mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}})).$$

再由 $\mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Im}(T)^0$ 以及 Proposition 5.2.6 知

$$\dim(\mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(\mathrm{Im}(T)^0) = \dim(W) - \dim(\mathrm{Im}(T)),$$

故得

$$\dim(\mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

而因 $T : V \to W$ 為 linear transformation, 故知 $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(T))$, 再由 Proposition 5.2.6 知

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)^0) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

故得 $\dim(\mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(\mathrm{Ker}(T)^0)$, 得證 $\mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Ker}(T)^0$. □

Question 5.15. 在 *Proposition 5.3.2* 的證明中我們知道 $\dim(\mathrm{Im}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(\mathrm{Im}(T))$. 是否 $\dim(\mathrm{Ker}(T^{\mathrm{t}})) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$?

既然 $T^{\mathrm{t}} : W^* \to V^*$ 也是 linear transformation, 我們自然也會去考慮 T^{t} 的 transpose, 也就是 $(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} : (V^*)^* \to (W^*)^*$. 回顧一下當 V 為 finite dimensional, 我們有一個 isomorphism $\tau_V : V \to (V^*)^*$, 定義為對任意 $\mathbf{v} \in V$, $\tau_V(\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{v}}$ 其中 $\hat{\mathbf{v}}(f) = f(\mathbf{v}), \forall f \in V^*$. 我們有以下的圖示:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_V} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_W} \\ (V^*)^* & \xrightarrow{(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}} & (W^*)^* \end{array}$$

現對於任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們有 $(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}(\tau_V(\mathbf{v})) = \hat{\mathbf{v}} \circ T^{\mathrm{t}} \in (W^*)^*$. 也就是說對於任意 $f \in W^*$, 我們有

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}(\tau_V(\mathbf{v}))(f) = \hat{\mathbf{v}} \circ T^{\mathrm{t}}(f) = \hat{\mathbf{v}}(f \circ T) = f \circ T(\mathbf{v}) = f(T(\mathbf{v})).$$

另一方面 $T(\mathbf{v}) \in W$, 所以 $\tau_W(T(\mathbf{v})) = \widehat{T(\mathbf{v})} \in (W^*)^*$. 也就是說對於任意 $f \in W^*$, 我們有

$$\tau_W(T(\mathbf{v}))(f) = \widehat{T(\mathbf{v})}(f) = f(T(\mathbf{v})).$$

得證 $(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}(\tau_V(\mathbf{v})) = \tau_W(T(\mathbf{v})), \forall \mathbf{v} \in V$, 亦即

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \circ \tau_V = \tau_W \circ T.$$

我們證明了上面那個圖示為一個 *commutative diagram.* 再加上 τ_V 為 isomorphism, 故 $\tau_V^{-1} : (V^*)^* \to V$ 存在 (亦為 isomorphism). 我們有以下之結果.

Proposition 5.3.3. 假設 V, W 皆為 *finite dimensional vector space,* $T : V \to W$ 為 *linear transformation.* 令 τ_V 以及 τ_W 分別為 $V, (V^*)^*$ 以及 $W, (W^*)^*$ 之間的 *canonical map.* 則

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \tau_W \circ T \circ \tau_V^{-1}.$$

我們要了解一個 Linear transformation $T : V \to W$ 和 T 的 transpose $T^{\mathrm{t}} : W^* \to V^*$ 分別對應到 V, W 的 ordered basis 及其 dual basis 的 representative matrix 之間的關係.

Proposition 5.3.4. 令 $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n),\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$ 分別為 V,W 的 *ordered basis* 且令 $\beta^*=(\mathbf{v}_1^*,\ldots,\mathbf{v}_n^*),\gamma^*=(\mathbf{w}_1^*,\ldots,\mathbf{w}_m^*)$ 分別為相對應的 *dual basis* 所組成 V^*,W^* 的 *ordered basis.* 給定一個 *Linear transformation* $T:V\to W$*,* 我們有

$$_{\beta^*}[T^{\mathrm{t}}]_{\gamma^*}={}_{\gamma}[T]_{\beta}^{\mathrm{t}}.$$

Proof. 因為 $T^{\mathrm{t}}(\mathbf{w}_i^*)=\mathbf{w}_i^*\circ T\in V^*$, 若 $\mathbf{w}_i^*\circ T=c_{1,i}\mathbf{v}_1^*+\cdots+c_{n,i}\mathbf{v}_n^*$, 則依定義

$$c_{j,i}=\mathbf{w}_i^*\circ T(\mathbf{v}_j)=\mathbf{w}_i^*(T(\mathbf{v}_j)).$$

故若 $T(\mathbf{v}_j)=d_{1,j}\mathbf{w}_1+\cdots+d_{m,j}\mathbf{w}_m$, 則 $c_{j,i}=d_{i,j}$. 然而此處 $c_{j,i}$ 為 $_{\beta^*}[T^{\mathrm{t}}]_{\gamma^*}$ 的 (j,i)-th entry, 而 $d_{i,j}$ 為 $_{\gamma}[T]_{\beta}$ 的 (i,j)-th entry, 得證 $_{\beta^*}[T^{\mathrm{t}}]_{\gamma^*}={}_{\gamma}[T]_{\beta}^{\mathrm{t}}$. □

由 Proposition 5.3.4, 我們可將一個 linear transformation 的 transpose 和一個 matrix 的 transpose 相連結. 我們可以將 Proposition 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 換成有關 matrix 的 transpose 的性質.

Question 5.16. 令 $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n),\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$ 分別為 V,W 的 *ordered basis* 且令 $\hat{\beta}=(\widehat{\mathbf{v}_1},\ldots,\widehat{\mathbf{v}_n}),\hat{\gamma}=(\widehat{\mathbf{w}_1},\ldots,\widehat{\mathbf{w}_m})$ 分別為 $(V^*)^*,(W^*)^*$ 的 *ordered basis,* 其中 $\widehat{\mathbf{v}_i}=\tau_V(\mathbf{v}_i),\widehat{\mathbf{w}_j}=\tau_W(\mathbf{w}_j)$ *(*$\tau_V:V\to(V^*)^*$*,* $\tau_W:W\to(W^*)^*$ 為 *canonical maps.)* 請利用 *Proposition 5.3.3, 5.3.4* 證明

$$({}_{\gamma}[T]_{\beta}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}={}_{\hat{\gamma}}[(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}]_{\hat{\beta}}={}_{\gamma}[T]_{\beta}.$$

接下來我們要探討的是一個 linear transformation $T:V\to W$ 的 adjoint. 再次強調 adjoint 的定義是需要 V,W 皆為 finite dimensional inner product spaces. 回顧一下, 在此時我們有 $\rho_V:V\to V^*$, $\rho_W:W\to W^*$ 定義為 $\rho_V(\mathbf{v})=\langle\cdot,\mathbf{v}\rangle,\forall\mathbf{v}\in V$ 以及 $\rho_W(\mathbf{w})=\langle\cdot,\mathbf{w}\rangle,\forall\mathbf{w}\in W$ 且 ρ_V,ρ_W 皆為 conjugate isomorphism. 我們定義 T 的 *adjoint* $T^*:W\to V$ 為

$$T^*=\rho_V^{-1}\circ T^{\mathrm{t}}\circ\rho_W.$$

換言之對任意 $\mathbf{w}\in W$, 我們有

$$T^*(\mathbf{w})=\rho_V^{-1}\circ\rho_W(\mathbf{w})\circ T=\rho_V^{-1}(\langle T(\cdot),\mathbf{w}\rangle).$$

由 Lemma 5.2.9 (1) 我們知 $T^{\mathrm{t}}\circ\rho_W:W\to V^*$ 為 conjugate transformation, 故再由 Lemma 5.2.9 (2) 得 $T^*:W\to V$ 為 linear transformation. 我們有以下的 commutative diagram.

$$\begin{tikzcd} V & W \arrow[l, "T^*"'] \\ V^* \arrow[from=1-1, "\rho_V"] & W^* \arrow[l, "T^{\mathrm{t}}"'] \arrow[from=1-2, "\rho_W"] \end{tikzcd}$$

Theorem 5.3.5. 假設 V,W 皆為 *finite dimensional inner product space,* $T:V\to W$ 為 *linear transformation.* 則 T 的 *transpose* $T^*:W\to V$*,* 為唯一的 *linear transformation* 滿足

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{v},T^*(\mathbf{w})\rangle,\forall\mathbf{v}\in V,\mathbf{w}\in W.$$

Proof. 我們已知 T^* 為 linear transformation. 現對任意 $\mathbf{w}\in W$, 我們有 $\rho_V(T^*(\mathbf{w}))\in V^*$ 滿足對任意 $\mathbf{v}\in V$, 皆有 $\rho_V(T^*(\mathbf{w}))(\mathbf{v})=\langle \mathbf{v},T^*(\mathbf{w})\rangle$. 另一方面 $\rho_V(T^*(\mathbf{w}))=T^{\mathrm{t}}\circ\rho_W(\mathbf{w})$, 而對任意 $\mathbf{v}\in V$, 皆有 $T^{\mathrm{t}}\circ\rho_W(\mathbf{w})(\mathbf{v})=\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle$. 得證 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v},T^*(\mathbf{w})\rangle$

至於唯一性, 假設 $T':W\to V$ 亦滿足 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v},T'(\mathbf{w})\rangle$, $\forall \mathbf{v}\in V,\mathbf{w}\in W$, 則知對任意 $\mathbf{v}\in V,\mathbf{w}\in W$ 皆有 $\langle \mathbf{v},T^*(\mathbf{w})\rangle=\langle \mathbf{v},T'(\mathbf{w})\rangle$. 由 Proposition 5.1.6 得證 $T'=T^*$. □

要注意 Theorem 5.3.5 中左式的 inner product 是 W 的 inner product, 右式為 V 的 inner product. 當一個 linear transformation $T:V\to W$ 保持 inner product, 亦即

$$\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v}')\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}'\rangle,\quad \forall \mathbf{v},\mathbf{v}'\in V.$$

我們很自然有 T 為 one-to-one. 這是因為若 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$, 則 $\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle=0$, 得證 $\mathbf{v}=\mathbf{O}_V$. 故若 $\dim(W)=\dim(V)$, 則 T 為 isomorphism, 我們稱這樣的 isomorphism 為 *inner product isomorphism*. 此時 linear transformation $T^{-1}:W\to V$ 也會是 inner product isomorphism. 這是因為

$$\langle T^{-1}(\mathbf{w}),T^{-1}(\mathbf{w}')\rangle=\langle T(T^{-1}(\mathbf{w})),T(T^{-1}(\mathbf{w}'))\rangle=\langle \mathbf{w}.\mathbf{w}'\rangle,\quad \forall \mathbf{w},\mathbf{w}'\in W.$$

我們有以下判斷 inner product isomorphism 的方法.

Corollary 5.3.6. 假設 V,W 為 *finite dimensional inner product spaces,* $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $T^*W\to V$ 為其 *adjoint.* 則以下敘述為等價的 (*equivalent*).

(1) T 為 *inner product isomorphism.*

(2) T 為 *isomorphism* 且 $T^{-1}=T^*$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 對於任意 $\mathbf{v}\in V,\mathbf{w}\in W$, 我們有

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=\langle T(\mathbf{v}),T(T^{-1}(\mathbf{w}))\rangle=\langle \mathbf{v},T^{-1}(\mathbf{w})\rangle.$$

故利用 Theorem 5.3.5 有關 adjoint 的唯一性得證 $T^{-1}=T^*$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 對於任意 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$, 皆有

$$\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v}')\rangle=\langle \mathbf{v},T^*(T(\mathbf{v}'))\rangle=\langle \mathbf{v},T^{-1}(T(\mathbf{v}'))\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{v}'\rangle.$$

故 T 為 inner product isomorphism. □

接下來我們列出 adjoint 的基本性質.

Proposition 5.3.7. 設 V,W,U 皆為 *finite dimensional inner product space over* F.

(1) 若 $r,s\in F$ 且 $T_1:V\to W$, $T_2:V\to W$ 皆為 *linear transformations,* 則

$$(rT_1+sT_2)^*=\bar{r}T_1^*+\bar{s}T_2^*.$$

(2) 若 $T_1:V\to W$, $T_2:W\to U$ 皆為 *linear transformations,* 則

$$(T_2\circ T_1)^*=T_1^*\circ T_2^*.$$

(3) $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$, 特别地, 若 $T: V \to W$ 為 *isomorphism*, 則 $T^*: W \to V$ 亦為 *isomorphism* 且

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

(4) 若 $T: V \to W$ 為 *linear transformation*, 則

$$(T^*)^* = T.$$

Proof.

(1) 對於任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$, 利用 inner product 的性質我們有

$$\langle (rT_1 + sT_2)(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = r\langle T_1(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle + s\langle T_2(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = r\langle \mathbf{v}, T_1^*(\mathbf{w})\rangle + s\langle \mathbf{v}, T_2^*(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, (\bar{r}T_1^* + \bar{s}T_2^*)(\mathbf{w})\rangle.$$

故由 adjoint 的唯一性得證 $(rT_1 + sT_2)^* = \bar{r}T_1^* + \bar{s}T_2^*$.

(2) 因為 $T_2 \circ T_1$ 為從 V 到 U 的 linear transformation, 所以 $(T_2 \circ T_1)^*$ 為從 U 到 V 的 linear transformation. 現對任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in U$, 我們有

$$\langle (T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}), \mathbf{u}\rangle = \langle T_2(T_1(\mathbf{v})), \mathbf{u}\rangle = \langle T_1(\mathbf{v}), T_2^*(\mathbf{u})\rangle = \langle \mathbf{v}, T_1^*(T_2^*(\mathbf{u}))\rangle = \langle \mathbf{v}, T_1^* \circ T_2^*(\mathbf{u})\rangle.$$

故由 adjoint 的唯一性得證 $(T_2 \circ T_1)^* = T_1^* \circ T_2^*$.

(3) 對於任意 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, 我們有 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}'\rangle = \langle \mathrm{id}_V(\mathbf{v}), \mathbf{v}'\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathrm{id}_V^*(\mathbf{v}')\rangle$, 所以利用 Corollary 5.1.5 得證 $\mathrm{id}_V^*(\mathbf{v}') = \mathbf{v}'$, $\forall \mathbf{v}' \in V$. 亦即 $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$. 現若 $T: V \to W$ 為 isomorphism, 我們有 $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_V$ 且 $T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_W$. 故由 (2) 得

$$\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V^* = T^* \circ (T^{-1})^*, \quad \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_W^* = (T^{-1})^* \circ T^*,$$

得證 T^* 為 isomorphism 且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(4) 因 $T^*: W \to V$ 為 linear transformation, 對任意 $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ 我們有

$$\langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}, (T^*)^*(\mathbf{v})\rangle.$$

另一方面

$$\langle \mathbf{w}, T(\mathbf{v})\rangle = \overline{\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle} = \overline{\langle \mathbf{v}, T^*(\mathbf{w})\rangle} = \langle T^*(\mathbf{w}), \mathbf{v}\rangle,$$

我們得知 $(T^*)^*(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 得證 $(T^*)^* = T$. □

Question 5.17. 試利用 *adjoint* 的定義證明 *Proposition 5.3.7.*

接下來, 我們來看一個 linear transformation 和其 adjoint 它們的 kernel 和 image 之間的關係.

Proposition 5.3.8. 假設 V, W 為 *finite dimensional inner product spaces,* $T: V \to W$ 為 *linear transformation* 且 $T^*: W \to V$ 為其 *adjoint.* 則

(1) $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ 且 $\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

(2) T *is one-to-one* 若且唯若 T^* *is onto.* T *is onto* 若且唯若 T^* *is one-to-one.*

(3) $\mathrm{Ker}(T^* \circ T) = \mathrm{Ker}(T)$ 且 $\mathrm{Ker}(T \circ T^*) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

(4) $\mathrm{Im}(T^* \circ T) = \mathrm{Im}(T^*)$ 且 $\mathrm{Im}(T \circ T^*) = \mathrm{Im}(T)$.

Proof.

(1) 設 $\mathbf{w}\in\mathrm{Ker}(T^*)$, 即 $T^*(\mathbf{w})=\mathbf{O}_V$, 此時對任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們有

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v},T^*(\mathbf{w})\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{O}_V\rangle=0,$$

得證 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(T)^{\perp}$. 反之, 若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(T)^{\perp}$, 則對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $0=\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{v},T^*(\mathbf{w})\rangle$. 故由 Lemma 5.1.4 得證 $\mathbf{w}\in\mathrm{Ker}(T^*)$. 另一方面, 若 $\mathbf{v}\in\mathrm{Im}(T^*)$, 表示存在 $\mathbf{w}\in W$ 使得 $\mathbf{v}=T^*(\mathbf{w})$. 故對任意 $\mathbf{v}'\in\mathrm{Ker}(T)$, 皆有 $\langle \mathbf{v}',\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{v}',T^*(\mathbf{w})\rangle=\langle T(\mathbf{v}'),\mathbf{w}\rangle=\langle \mathbf{O}_W,\mathbf{w}\rangle=0$, 即 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$. 得證 $\mathrm{Im}(T^*)\subseteq\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$. 最後利用 $\mathrm{Ker}(T^*)=\mathrm{Im}(T)^{\perp}$ 得

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(T^*)) &= \dim(W)-\dim(\mathrm{Ker}(T^*))=\dim(W)-\dim(\mathrm{Im}(T)^{\perp})\\ &= \dim(W)-(\dim(W)-\dim(\mathrm{Im}(T)))=\dim(\mathrm{Im}(T))\end{aligned}$$

又因 $\dim(\mathrm{Ker}(T)^{\perp})=\dim(V)-\dim(\mathrm{Ker}(T))=\dim(\mathrm{Im}(T))$ 得 $\dim(\mathrm{Im}(T^*))=\dim(\mathrm{Ker}(T)^{\perp})$ 故得證 $\mathrm{Im}(T^*)=\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$.

(2) 若 T is one-to-one, 則 $\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$. 故由 (1) 知 $\mathrm{Im}(T^*)=\mathrm{Ker}(T)^{\perp}=\{\mathbf{O}_V\}^{\perp}=V$, 得證 T^* 為 onto. 反之, 若 T^* 為 onto, 得 $\mathrm{Ker}(T)^{\perp}=V$, 由 Corollary 5.1.14 知

$$\mathrm{Ker}(T)=(\mathrm{Ker}(T)^{\perp})^{\perp}=V^{\perp}=\{\mathbf{O}_V\}.$$

得證 T 為 one-to-one. 利用此結果將 T 用 T^* 取代, 得知 T^* 為 one-to-one 若且唯若 $(T^*)^*=T$ 為 onto.

(3) 很明顯我們有 $\mathrm{Ker}(T)\subseteq\mathrm{Ker}(T^*\circ T)$. 現若 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T^*\circ T)$, 則

$$\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle=\langle \mathbf{v},T^*(T(\mathbf{v}))\rangle=\langle \mathbf{v},\mathbf{O}_V\rangle=0.$$

得證 $T(\mathbf{v})=\mathbf{O}_W$, 即 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$. 利用此結果將 T 用 T^* 取代, 再利用 $(T^*)^*$ 得 $\mathrm{Ker}(T\circ T^*)=\mathrm{Ker}(T^*)$.

(4) 很明顯我們有 $\mathrm{Im}(T^*\circ T)\subseteq\mathrm{Im}(T^*)$. 然而由 (3) 我們有

$$\dim(\mathrm{Im}(T^*\circ T))=\dim(V)-\dim(\mathrm{Ker}(T^*\circ T))=\dim(V)-\dim(\mathrm{Ker}(T))=\dim(\mathrm{Ker}(T)^{\perp}),$$

再由 (1) $\mathrm{Im}(T^*)=\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$ 得知 $\dim(\mathrm{Im}(T^*\circ T))=\dim(\mathrm{Im}(T^*))$, 證得 $\mathrm{Im}(T^*\circ T)=\mathrm{Im}(T^*)$. 利用此結果將 T 用 T^* 取代, 得證 $\mathrm{Im}(T\circ T^*)=\mathrm{Im}(T)$. □

Question 5.18. 試證明 $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Im}(T^*)^{\perp}$ 且 $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T^*)^{\perp}$.

對於 $T:V\to W$ 和它的 adjoint $T^*:W\to V$ 的 representative matrix 當然有一定的關係, 由於 adjoint 和 inner product 有關, 所以 V,W 所選的 ordered basis 應也要和 inner product 有關. 事實上若分別取 V 和 W 的 orthonormal basis 所組成的 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 和 $\gamma=(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$, 且 $T(\mathbf{v}_i)=c_{1,i}\mathbf{w}_1+\cdots+c_{m,i}\mathbf{w}_m$, 則依定義 ${}_{\gamma}[T]_{\beta}$ 的 (j,i)-th entry 為 $c_{j,i}$. 然而因 $\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ 為 W 的 orthonormal basis, 我們有 $c_{j,i}=\langle T(\mathbf{v}_i),\mathbf{w}_j\rangle=\langle \mathbf{v}_i,T^*(\mathbf{w}_j)\rangle$. 另一方面若 $T^*(\mathbf{w}_j)=d_{1,j}\mathbf{v}_1+\cdots+d_{n,j}\mathbf{v}_n$, 則 ${}_{\beta}[T^*]_{\gamma}$ 的 (i,j)-th entry 為

$$d_{i,j}=\langle T^*(\mathbf{w}_j),\mathbf{v}_i\rangle=\overline{\langle \mathbf{v}_i,T^*\mathbf{w}_j\rangle}=\overline{c_{j,i}}.$$

也就是說 ${}_\beta[T^*]_\gamma$ 是將 ${}_\gamma[T]_\beta$ 先取 transpose 再將每個 entry 取其 conjugate 而得. 我們有以下的定義.

Definition 5.3.9. 假設 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 且 $B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$. 對所有 $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, 令 $a_{j,i}$ 為 A 的 (j,i)-th entry 且 $b_{i,j}$ 為 B 的 (i,j)-th entry. 若 $b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}$, 則稱 B 為 A 的 *adjoint* 且以 A^* 來表示.

要注意, 依此定義 $(A^*)^* = A$, 且若 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, 則 $A^* = A^t$. 又依此定義, 我們有以下之結果.

Proposition 5.3.10. 假設 V, W 為 *finite dimensional inner product space,* 且分別選取 V 和 W 的 *orthonormal basis* 所組成的 *ordered basis* $\beta = (\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 和 $\gamma = (\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m)$. 若 $T: V \to W$ 為 *linear transformation* 且 $T^*: W \to V$ 為 T 的 *adjoint,* 則

$${}_\beta[T^*]_\gamma = ({}_\gamma[T]_\beta)^*.$$

由 Proposition 5.3.10, 我們可將一個 linear transformation 的 adjoint 和一個 matrix 的 adjoint 相連結. 我們可以將 Proposition 5.3.7, 5.3.8 換成有關 matrix 的 adjoint 的性質.

另外要注意的是在 Theorem 5.3.5 中我們強調一個 linear transformation 的 adjoint 是唯一的, 這是在給定一個 inner product 的條件之下. 在不同的 inner product 之下, 一個 linear transformation 會有不同的 adjoint, 我們看以下的例子.

Example 5.3.11. 考慮 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定義為

$$T(x_1,x_2,x_3) = (4x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 4x_2 + 4x_3, 2x_1 + x_2 + 4x_3).$$

考慮 $\mathbb{R}^3$ 上兩個 inner products $\langle\,,\rangle$ 以及 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$, 其中 $\langle\,,\rangle$ 為 standard inner product, 即

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

而 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ 的定義為

$$\langle\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle\rangle = x_1y_1 + \frac{1}{4}x_2y_2 + x_3y_3.$$

若考慮 $\mathbb{R}^3$ 為 standard inner product space, 則 $\varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 為 $\mathbb{R}^3$ 的一組 ordered orthonormal basis. 此時 $[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 故由 Proposition 5.3.10 得 $[T^*]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, 即此時 $T^*(x_1,x_2,x_3) = (4x_1 + 4x_2 + 2x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$.

若考慮 $\mathbb{R}^3$ 為以 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ 為 inner product 的 inner product space, 則可取

$$\beta = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,1)\}$$

為 $\mathbb{R}^3$ 的一組 ordered orthonormal basis. 此時 $[T]_\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 由 Proposition 5.3.10 得 $[T^*]_\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 故知此時 $T^* = T$, 即

$$T^*(x_1,x_2,x_3) = (4x_1+x_2+2x_3, 4x_1+4x_2+4x_3, 2x_1+x_2+4x_3).$$

5.4. The Adjoint of Linear Operators

這一節中我們特別要探討一個 linear operator $T:V\to V$ 的 adjoint. 我們也會探討一些特別的 operator 的 adjoint. 所以本節中的 vector space V 永遠是一個 finite dimensional inner product space over F, 其中 $F=\mathbb{C}$ 或 $F=\mathbb{R}$.

當 $T:V\to V$ 為 linear operator, 則其 adjoint $T^*:V\to V$ 亦為 linear operator. 所以對任意 $f(x)\in F[x]$, $f(T^*)$ 亦有定義且為 linear operator. 我們對任意 $f(x)\in F[x]$, $f(T)$ 的 adjoint 為何有興趣. 首先若 $f(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$, 我們定義 $\overline{f}(x)=\overline{c_n}x^n+\cdots+\overline{c_1}x+\overline{c_0}$, 則有以下結果.

Lemma 5.4.1. 若 $T:V\to V$ 為 *linear operator,* 則對任意 $f(x)\in F[x]$ 皆有

$$(f(T))^* = \overline{f}(T^*).$$

Proof. 首先由 Proposition 5.3.7(2) 知 $(T^{\circ n})^* = (T^*)^{\circ n}$. 故若 $f(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$, 則再由 Proposition 5.3.7(1)(3) 得證

$$\begin{aligned}(f(T))^* &= (c_nT^{\circ n}+\cdots+c_1T+c_0\mathrm{id}_V)^* = \overline{c_n}(T^{\circ n})^*+\cdots+\overline{c_1}T^*+\overline{c_0}\,\mathrm{id}_V^* \\ &= \overline{c_n}(T^*)^{\circ n}+\cdots+\overline{c_1}T^*+\overline{c_0}\,\mathrm{id}_V = \overline{f}(T^*).\end{aligned}$$

□

由 Proposition 5.3.10 以及 Lemma 5.4.1, 我們馬上可以得到 T 和 T^* 的 characteristic polynomials $\chi_T(x)$ 和 $\chi_{T^*}(x)$ 之間的關係, 以及它們的 minimal polynomials $\mu_T(x)$ 和 $\mu_{T^*}(x)$ 之間的關係.

Lemma 5.4.2. 若 $T:V\to V$ 為 *linear operator,* 則

$$\chi_{T^*}(x)=\overline{\chi_T}(x) \quad \textit{and} \quad \mu_{T^*}(x)=\overline{\mu_T}(x).$$

Proof. 由於 characteristic polynomial 與 ordered basis 的選取無關, 所以我們特別選取 V 的一組 orthonormal basis 所組成的 ordered basis β. 由 Proposition 5.3.10 知 $[T^*]_\beta = ([T]_\beta)^*$, 故得 $\chi_{T^*}(x)=\overline{\chi_T}(x)$.

由 minimal polynomial 定義知 $\mu_T(T)=\mathbf{O}$, 故由 Lemma 5.4.1, 得 $\overline{\mu_T}(T^*)=(\mu_T(T))^*=\mathbf{O}$, 故知 $\mu_{T^*}(x)\mid\overline{\mu_T}(x)$. 同理由 $(T^*)^*=T$, 得 $\mu_T(x)\mid\overline{\mu_{T^*}}(x)$, 再將兩邊多項式的係數取 conjugate 得 $\overline{\mu_T}(x)\mid\mu_{T^*}(x)$. 得證 $\mu_{T^*}(x)=\overline{\mu_T}(x)$. □

有關 linear operator 的 decomposition, 最重要的便是 T-invariant subspace. 現若 W 為 T-invariant subspace, 我們自然會問 W 是否為 T^*-invariant subspace. 一般來說這不一定對, 但我們有以下之結果.

Lemma 5.4.3. 若 $T : V \to V$ 為 *linear operator,* 則 $W \subseteq V$ 為 *T-invariant subspace* 若且唯若 $W^\perp \subseteq V$ 為 *T^*-invariant subspace.*

Proof. 假設 W 為 T-invariant, 要說明 $W^\perp$ 為 T^*-invariant, 就是要說明對任意 $\mathbf{w}' \in W^\perp$ 皆有 $T^*(\mathbf{w}') \in W^\perp$. 然而若 $\mathbf{w} \in W$, 則由 $T(\mathbf{w}) \in W$ 以及 $\mathbf{w}' \in W^\perp$, 得 $\langle \mathbf{w}, T^*(\mathbf{w}')\rangle = \langle T(\mathbf{w}), \mathbf{w}'\rangle = 0$. 此即證明 $T^*(\mathbf{w}') \in W^\perp$, 故 $W^\perp$ 為 T^*-invariant.

反之, 若 $W^\perp$ 為 T^*-invariant, 則由上面所證 $(W^\perp)^\perp = W$ 為 $(T^*)^*$-invariant, 即 T-invariant. □

給定一個 inner product space V, 及其 subspace W, 最直接的 decomposition 為 $V = W \boxplus W^\perp$. 所以當 W 為 T-invariant 時, 我們自然會問是否 $W^\perp$ 亦為 T-invariant. 利用 Lemma 5.4.3, 這剛好回答了何時 W 亦為 T^*-invariant.

Corollary 5.4.4. 假設 $T : V \to V$ 為 *linear operator* 且 $W \subseteq V$ 為 *T-invariant subspace.* 則 $W^\perp$ 為 *T-invariant subspace* 若且唯若 W 為 *T^*-invariant subspace.* 另外若 W 為 *T-invariant* 和 *T^*-invariant,* 則

$$(T|_W)^* = T^*|_W.$$

Proof. 由 Lemma 5.4.3, 我們知 $W^\perp$ 為 T-invariant 等價於 $W = (W^\perp)^\perp$ 為 T^*-invariant. 此時對任意的 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ 皆有

$$\langle T|_W(\mathbf{w}), \mathbf{w}'\rangle = \langle T(\mathbf{w}), \mathbf{w}'\rangle = \langle \mathbf{w}, T^*(\mathbf{w}')\rangle = \langle \mathbf{w}, T^*|_W(\mathbf{w}')\rangle,$$

得證 $(T|_W)^* = T^*|_W$. □

接下來我們探討幾個特殊的 linear operator 及其 adjoint 間的關係. 首先回顧若 $V = W_1 \oplus W_2$, 則對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆存在唯一的 $\mathbf{w}_1 \in W_1$, $\mathbf{w}_2 \in W_2$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. 此時我們定義 $\pi_{W_1,W_2} : V \to V$, 為 $\pi_{W_1,W_2}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_1$. 我們稱 π_{W_1,W_2} 為 *projection* on W_1 along W_2. 要注意, 若 $V = W_1 \oplus W_2'$, 其中 $W_2 \neq W_2'$, 則 $\pi_{W_1,W_2} \neq \pi_{W_1,W_2'}$.

Question 5.19. 如上所述, $\pi_{W_2,W_1}(\mathbf{v})$ 為何? 並說明若 $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_2'$ 但 $W_2 \neq W_2'$ 則 $\pi_{W_1,W_2} \neq \pi_{W_1,W_2'}$.

當 V 是 finite dimensional inner product space, 我們可由 $V = W_1 \oplus W_2$ 推得 $V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$. 這是因為若 $\mathbf{w} \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$, 則對任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們有 $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, 其中 $\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2$, 故得 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}\rangle = 0$. 由 Lemma 5.1.4 得知 $\mathbf{w} = \mathbf{O}_V$. 再由

$$\dim(W_1^\perp + W_2^\perp) = \dim(W_1^\perp) + \dim(W_2^\perp) = \dim(W_2) + \dim(W_1) = \dim(V),$$

得證 $V = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$. 利用此我們可以得到 π_{W_1,W_2} 的 adjoint $\pi^*_{W_1,W_2}$.

Proposition 5.4.5. 若 $V = W_1 \oplus W_2$, 則 $V = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$ 且

$$\pi_{W_1,W_2}^* = \pi_{W_2^{\perp},W_1^{\perp}}.$$

Proof. 前面已知 $V = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$, 故對任意 $\mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$, 我們知存在 $\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2$ 以及 $\mathbf{w}_1' \in W_1^{\perp}, \mathbf{w}_2' \in W_2^{\perp}$ 滿足 $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}' = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2'$. 此時

$$\langle \pi_{W_1,W_2}(\mathbf{v}), \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2' \rangle.$$

另一方面

$$\langle \mathbf{v}, \pi_{W_2^{\perp},W_1^{\perp}}(\mathbf{v}') \rangle = \langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2' \rangle.$$

得證 $\langle \pi_{W_1,W_2}(\mathbf{v}), \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v}, \pi_{W_2^{\perp},W_1^{\perp}}(\mathbf{v}') \rangle, \forall \mathbf{v},\mathbf{v}' \in V$, 即 $\pi_{W_1,W_2}^* = \pi_{W_2^{\perp},W_1^{\perp}}$. □

我們知道在 inner product space 中最常用的 decomposition 就是 $V = W \boxplus W^{\perp}$. 此時我們稱 projection $\pi_{W,W^{\perp}}$ 為 *orthogonal projection* on W. 為了方便, 以後我們都會把 orthogonal projection on W 用 π_W 來表示 (因為它僅和 W 有關). 利用 Proposition 5.4.5, 我們馬上有以下之結果.

Corollary 5.4.6. 設 V 是 *finite dimensional inner product space* 且 W 為其 *subspace.* 令 $\pi_W : V \to V$ 為 *orthogonal projection on* W, 則 $\pi_W = \pi_W^{\circ 2}$ 且 $\pi_W^* = \pi_W$.

Proof. 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們有 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, 其中 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{w}' \in W^{\perp}$, 故

$$\pi_W^{\circ 2}(\mathbf{v}) = \pi_W(\pi_W(\mathbf{v})) = \pi_W(\pi_W(\mathbf{w} + \mathbf{w}')) = \pi_W(\mathbf{w}) = \pi_W(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V.$$

得證 $\pi_W = \pi_W^{\circ 2}$. 另一方面, 利用 Proposition 5.4.5 以及 $(W^{\perp})^{\perp} = W$, 我們有

$$\pi_W^* = \pi_{W,W^{\perp}}^* = \pi_{(W^{\perp})^{\perp},W^{\perp}} = \pi_{W,W^{\perp}} = \pi_W.$$

□

Question 5.20. 試證明對任意 $\mathbf{v} \in V$, π_W 就是 *Proposition 5.1.12* 中提的 *projection* proj_W.

一個 linear operator $T : V \to V$ 若滿足 $T^{\circ 2} = T$, 則稱為 *idempotent.* 由 Corollary 5.4.6 的證明我們知道任何的 projection 皆為 idempotent (不需 orthogonal projection 之假設). 至於 $T^* = T$ 的性質, 我們稱為 *self-adjoint.* 一般的 projection 不會是 self-adjoint, 除非它是 orthogonal projection, 這是由於我們有下結果.

Proposition 5.4.7. 假設 $T : V \to V$ 為 *linear transformation* 滿足 $T^{\circ 2} = T$, 則下列敘述為等價*:*

(1) T 為 *orthogonal projection.*

(2) $T^* = T$.

(3) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}$.

(4) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$.

Proof. 首先我們說明若 T 為 idempotent (即 $T^{\circ 2}=T$), 則 $T=\pi_{\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)}$. 這需先證明 $V=\mathrm{Im}(T)\oplus\mathrm{Ker}(T)$. 事實上 $\dim(V)=\dim(\mathrm{Im}(T))+\dim(\mathrm{Ker}(T))$, 所以只要證明

$$\mathrm{Im}(T)\cap\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\},$$

則由 $\mathrm{Im}(T)+\mathrm{Ker}(T)\subseteq V$, 可得 $V=\mathrm{Im}(T)\oplus\mathrm{Ker}(T)$. 然而若 $\mathbf{v}\in\mathrm{Im}(T)$, 表示存在 $\mathbf{w}\in V$ 使得 $\mathbf{v}=T(\mathbf{w})$, 故由 $T^{\circ 2}=T$, 得 $T(\mathbf{v})=T^{\circ 2}(\mathbf{w})=T(\mathbf{w})=\mathbf{v}$. 若再加上 $\mathbf{v}\in\mathrm{Ker}(T)$ 可得 $\mathbf{v}=T(\mathbf{v})=\mathbf{O}_V$. 現已知 $V=\mathrm{Im}(T)\oplus\mathrm{Ker}(T)$, 故對任意 $\mathbf{v}$, 皆存在 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(T),\mathbf{w}'\in\mathrm{Ker}(T)$ 使得 $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{w}'$. 可得 $T(\mathbf{v})=T(\mathbf{w})+T(\mathbf{w}')=T(\mathbf{w})$. 但前面已知若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Im}(T)$, 則 $T(\mathbf{w})=\mathbf{w}$, 故知 $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$. 此和 projection on $\mathrm{Im}(T)$ along $\mathrm{Ker}(T)$ 即 $\pi_{\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)}$ 對 $\mathbf{v}$ 的作用相同, 故得證 $T=\pi_{\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)}$.

現由 Corollary 5.1.14, 我們知道 $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Im}(T)^{\perp}$ 若且唯若 $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$ (即 (3) $\Leftrightarrow$ (4)). 而又若 $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Im}(T)^{\perp}$ 則 $\pi_{\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)}=\pi_{\mathrm{Im}(T),\mathrm{Im}(T)^{\perp}}$, 得證 $T=\pi_{\mathrm{Im}(T),\mathrm{Ker}(T)}$ 為 orthogonal projection (即 (3) $\Rightarrow$ (1)). 又若 T 為 orthogonal projection, 則由 Corollary 5.4.6 知 $T^*=T$ (即 (1) $\Rightarrow$ (2)). 最後利用 Proposition 5.3.8(1) 知若 $T^*=T$, 則 $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$ (且 $\mathrm{Ker}(T)=\mathrm{Im}(T)^{\perp}$) (即 (2) $\Rightarrow$ (3)(4)) 得證本定理. □

一般來說, 我們可以將一個 finite dimensional inner product space 寫成 orthogonal direct sum $V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$, 此時 $W_i^{\perp}=\oplus_{j\neq i}W_j$. 若令 π_i 為 orthogonal projection on W_i (即 $\pi_i=\pi_{W_i}$), 則很容易看出

$$\pi_1+\cdots+\pi_k=\mathrm{id}_V.$$

我們稱此為 *orthogonal resolution of the identity.* 注意此時我們有 $\pi_i^{\circ 2}=\pi_i$, $\pi_i^*=\pi_i$ 以及當 $i\neq j$ 時, $\pi_i\circ\pi_j=\mathbf{O}$. 事實上, 我們有以下之結果.

Lemma 5.4.8. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space* 且 W_1,W_2 為 V 的 *subspace.* 令 π_1,π_2 分別為 *orthogonal projection on* W_1,W_2. 則下列為等價:

(1) $W_1\perp W_2$.

(2) $\pi_1\circ\pi_2=\mathbf{O}$.

(3) $\pi_2\circ\pi_1=\mathbf{O}$.

Proof. 對於任意 $\mathbf{v}\in V$, 由於 $\pi_1(\mathbf{v})\in W_1$, 故若 $W_1\perp W_2$, 則 $\pi_1(\mathbf{v})\in W_2^{\perp}$. 得證 $\pi_2(\pi_1(\mathbf{v}))=\mathbf{O}_V$, $\forall\mathbf{v}\in V$ 即 $\pi_1\circ\pi_2=\mathbf{O}$. 同理可得 $\pi_2\circ\pi_1=\mathbf{O}$.

現對任意 $\mathbf{w}_1\in W_1,\mathbf{w}_2\in W_2$, 我們有 $\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle=\langle\pi_1(\mathbf{w}_1),\pi_2(\mathbf{w}_2)\rangle=\langle\mathbf{w}_1,\pi_1^*(\pi_2(\mathbf{w}_2))\rangle$. 因 π_1 為 orthogonal projection, 由 Corollary 5.4.6 知 $\pi_1^*=\pi_1$. 故若 $\pi_1\circ\pi_2=\mathbf{O}$, 則 $\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle=\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{O}_V\rangle=0$, 得證 $W_1\perp W_2$. 同理若 $\pi_2\circ\pi_1=\mathbf{O}$ 亦可得 $W_1\perp W_2$. □

回顧過去我們提過, 若對於 linear operator $T:V\to V$, 我們可以找到 V 的一組 basis 是由 T 的 eigenvectors 所組成, 則表示 T 是 diagonalizable. 特別的, 若存在一組 T 的 eigenvectors 形成 V 的一組 orthogonal basis (或 orthonormal basis), 則我們有以下的定義.

Definition 5.4.9. 假設 V 是一個 finite dimensional inner product space over F 且 $T:V\to V$ 為 linear operator. 若存在一組 T 的 eigenvectors 形成 V 的一組 orthogonal basis (或 orthonormal basis), 則我們稱 T 為 *unitary diagonalizable* (當 $F=\mathbb{R}$ 時, 有的書會特別稱 T 為 *orthogonal diagonalizable*).

當 A 是一個 $n\times n$ matrix over F, 若考慮 F^n 上的 standard inner product, 存在一組 A 的 eigenvectors 為 F^n 的一組 orthogonal basis (或 orthonormal basis), 則我們稱 A 為 *unitary diagonalizable* (當 $F=\mathbb{R}$ 時, 有的書會特別稱 A 為 *orthogonal diagonalizable*).

在此特別說明, 當一個 matrix A 為 unitary diagonalizable 時, 在 $F=\mathbb{C}$ 的情況即表示存在一個 matrix P 滿足 $P^*=P^{-1}$ 使得 P^*AP 為一個 diagonal matrix. 這樣的矩陣 P 是由那些 eigenvectors 所成的 orthonormal basis 所組成的, 我們稱為 *unitary matrix.* 而在 $F=\mathbb{R}$ 的情況, 表示存在一個 matrix P 滿足 $P^{\mathrm{t}}=P^{-1}$ 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為一個 diagonal matrix. 這樣的矩陣 P 是由那些 eigenvectors 所成的 orthonormal basis 所組成的, 我們稱為 *orthogonal matrix.* 這就是 unitary diagonalizable (或 orthogonal diagonalizable) 名稱的由來. 為了方便起見, 我們不去區分 unitary diagonalizable 或 orthogonal diagonalizable, 一律用 unitary diagonalizable 來稱之. 接下來我們來探討 unitary diagonalizable linear operator 的特性.

Proposition 5.4.10. 假設 V 是一個 *finite dimensional inner product space over* F 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator.* 則下列是等價的.

(1) T 為 *unitary diagonalizable.*

(2) 存在相異 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$ 使得 $V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k}$, 其中 E_{λ_i}, 為 λ_i 的 *eigenspace,* 即 $E_{\lambda_i}=\{\mathbf{v}\in V\mid T(\mathbf{v})=\lambda_i\mathbf{v}\}$.

(3) 存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$ 使得 $T=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k$, 其中 π_i 為 *orthogonal projection* 且滿足 $\pi_i\circ\pi_j=\mathbf{O}$, $\forall i\neq j$.

Proof. 假設 T 為 unitary diagonalizable, 假設 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 T 的一組 eigenvectors 所組成的 orthogonal basis. 將其適當重排使得相同 eigenvalue 的 eigenvectors 擺在一起, 我們假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{l_1}$ 為 eigenvalue 為 λ_1 的 eigenvectors, $\mathbf{v}_{l_1+1},\ldots,\mathbf{v}_{l_2}$ 為 eigenvalue 為 λ_2 的 eigenvectors, 依此類推 (其中每個 λ_i 皆相異). 我們要說明 $W_i=\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_{l_{i-1}+1},\ldots,\mathbf{v}_{l_i}\})$ 等於 E_{λ_i}. 事實上 $W_i\subseteq E_{\lambda_i}$, 又由 T 為 diagonalizable 知 $V=E_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_k}$. 我們有

$$\dim(V)=\dim(W_1)+\cdots+\dim(W_k)\leq\dim(E_{\lambda_1})+\cdots+\dim(E_{\lambda_k})=\dim(V),$$

得證 $\dim(W_i)=\dim(E_{\lambda_i})$, 即 $W_i=E_{\lambda_i}$. 很自然的, 對於 $i\neq j$ 我們有 $W_i\perp W_j$, 故得證 $V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k}$. 反之, 若 $V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k}$, 則考慮每個 E_{λ_i} 上的一組 orthogonal basis, 由於這些 E_{λ_i} 上的 orthogonal basis 可組成 V 的一組 orthogonal basis, 且皆為 T 的 eigenvectors. 得證 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

現若 $V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k}$, 則對任意 $\mathbf{v}\in V$, 我們有 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_k$, 其中 $\mathbf{v}_i\in E_{\lambda_i}$. 此時令 π_i 為 orthogonal projection on E_{λ_i}, 則由 Lemma 5.4.8 知 $\pi_i\circ\pi_j=\mathbf{O}$, $\forall i\neq j$ 且

$$(\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k)(\mathbf{v})=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots\lambda_k\mathbf{v}_k=T(\mathbf{v}_1)+\cdots+T(\mathbf{v}_k)=T(\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_k)=T(\mathbf{v}).$$

得證 $T=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k$, 故 (2) $\Rightarrow$ (3).

反之, 若 $T=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k$, 令 $\mathrm{Im}(\pi_i)=W_i$, 則由 $\pi_i\circ\pi_j=\mathbf{O}$, $\forall i\neq j$ 知 $W_i\perp W_j$, $\forall i\neq j$. 考慮 β_i 為 W_i 的一組 orthogonal basis, 且令 $W=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$. 若 $W=V$, 則 $\beta=\cup_{i=1}^k\beta_i$ 為 V 的一組 orthogonal basis, 且對任意 $\mathbf{v}\in\beta_i$, 由於 $\mathbf{v}\in W_i$ 當 $j\neq i$, 我們有 $\pi_j(\mathbf{v})=\pi_j(\pi_i(\mathbf{v}))=\mathbf{O}_V$. 故 $T(\mathbf{v})=\lambda_i\mathbf{v}$, 亦即 $\mathbf{v}$ 為 T 的 eigenvector. 而若 $V\neq W$, 令 $W_{k+1}=W^\perp$, 此時 $V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k\boxplus W_{k+1}$. 若再取 β_{k+1} 為 W_{k+1} 的一組 orthogonal basis, 則 $\beta=\cup_{i=1}^{k+1}\beta_i$ 為 V 的一組 orthogonal basis. 又對於 $\mathbf{v}\in\beta_{k+1}$ 我們有 $\mathbf{v}\in W_i^\perp$, $\forall i\in\{1,\ldots,k\}$, 故 $\pi_i(\mathbf{v})=0$ 得 $T(\mathbf{v})=\mathbf{O}_V=0\mathbf{v}$, 即 $\mathbf{v}$ 為 T 的 eigenvector. 得證 β 為 V 的一組 orthogonal basis 且 β 中的元素皆為 T 的 eigenvector, 即 T 為 unitary diagonalizable. 得證 (3) $\Rightarrow$ (1). □

由 Proposition 5.4.10 我們知道若 $T:V\to V$ 為 unitary diagonalizable, 則存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$ 以及 orthogonal projections $\pi_1,\ldots,\pi_k$ 使得 $T=\lambda_1\pi_1+\cdots+\lambda_k\pi_k$, 這稱為 T 的 *spectral resolution*. 此時由 Proposition 5.3.7 得

$$T^*=\overline{\lambda_1}\pi_1^*+\cdots+\overline{\lambda_k}\pi_k^*=\overline{\lambda_1}\pi_1+\cdots+\overline{\lambda_k}\pi_k.$$

再由 $\pi_i\circ\pi_j=\mathbf{O}$, $\forall i\neq j$ 且 $\pi_i{}^{\circ 2}=\pi_i$ 得

$$T^*\circ T=\overline{\lambda_1}\lambda_1\pi_1+\cdots+\overline{\lambda_k}\lambda_k\pi_k=T\circ T^*.$$

符合 $T^*\circ T=T\circ T^*$ 的 linear operator T 稱為 *normal operator*, 這是我們下一節所要探討的課題.

Question 5.21. 試證明若 $n\times n$ *matrix* A 為 *unitary diagonalizable,* 則 $A^*A=AA^*$.

5.5. Normal Operators

我們將探討 normal operator 的性質. 由於我們探討的 normal operator 為定義在 over F ($F=\mathbb{C}$ 或 $F=\mathbb{R}$) 的 finite dimensional inner product space. 所以本節中的 vector space 一定是 finite dimensional inner product space 且其 over 的 field 為 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$, 我們就不再贅敘.

Definition 5.5.1. 設 $T:V\to V$ 為 linear operator, 若 T 滿足 $T^*\circ T=T\circ T^*$, 則稱 T 為一個 *normal operator.*

設 A 為一個 $n\times n$ matrix, 若 A 滿足 $A^*A=AA^*$, 則稱 A 為一個 *normal matrix.*

Question 5.22. 一個 *orthogonal projection* 是否為 *normal?*

首先我們觀察可以由一個 normal operator 得到更多的 normal operator.

Lemma 5.5.2. 假設 $T:V\to V$ 為 *normal operator.*

(1) T^* 亦為 *normal operator.*

(2) 若 $W,W^\perp$ 皆為 T*-invariant,* 則 $T|_W$ 亦為 *normal operator.*

(3) 若 T 為 *isomorphism,* 則 T^{-1} 亦為 *normal operator.*

(4) 對任意 $f(x) \in F[x]$, $f(T)$ 亦為 *normal operator.*

Proof. (1) 由 $(T^*)^* = T$, 可得 T^* 亦為 normal.

(2) 由 Corollary 5.4.4, 我們知此時 W 亦為 T^*-invariant 且 $(T|_W)^* = T^*|_W$. 故

$$(T|_W)^* \circ T|_W = T^*|_W \circ T|_W = (T^* \circ T)|_W = (T \circ T^*)|_W = T|_W \circ (T|_W)^*.$$

(3) 由 Proposition 5.3.7, 我們知此時 $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, 故

$$(T^{-1})^* \circ T^{-1} = (T^*)^{-1} \circ T^{-1} = (T \circ T^*)^{-1} = (T^* \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ (T^{-1})^*.$$

(4) 若 $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$, 則 $f(T) = c_n T^{\circ n} + \cdots + c_1 T + c_0 \mathrm{id}_V$ 且由 Lemma 5.4.1 知 $f(T)^* = \overline{c_n}(T^*)^{\circ n} + \cdots + \overline{c_1} T^* + c_0 \mathrm{id}_V$. 現因 $c_i T^{\circ i} \circ f(T)^* = c_i \sum_{j=0}^{n} c_j T^{\circ i} \circ (T^*)^{\circ j}$, 可得

$$f(T) \circ f(T)^* = \sum_{i,j} c_i c_j T^{\circ i} \circ (T^*)^{\circ j}.$$

同理

$$f(T)^* \circ f(T) = \sum_{i,j} c_j c_i (T^*)^{\circ j} \circ T^{\circ i}.$$

故依假設 $T \circ T^* = T^* \circ T$, 知 $T^{\circ i} \circ (T^*)^{\circ j} = (T^*)^{\circ j} \circ T^{\circ i}$, 得證 $f(T) \circ f(T)^* = f(T)^* \circ f(T)$. □

接下來我們探討 normal operator 的性質, 在這一節我們先探討一些在 $F = \mathbb{C}$ 和 $F = \mathbb{R}$ 時都會對的性質, 下一節我們在分別針對 $F = \mathbb{C}$ 和 $F = \mathbb{R}$ 來探討個別的性質.

首先由 normal 的定義 (即 $T \circ T^* = T^* \circ T$), 對任意 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, 我們有

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, T^*(T(\mathbf{w})) \rangle = \langle \mathbf{v}, T(T^*(\mathbf{w})) \rangle = \langle T^*(\mathbf{v}), T^*(\mathbf{w}) \rangle.$$

因此對任意 $\mathbf{v} \in V$ 可得

$$\|T(\mathbf{v})\|^2 = \langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle T^*(\mathbf{v}), T^*(\mathbf{v}) \rangle = \|T^*(\mathbf{v})\|^2.$$

得證以下性質.

Lemma 5.5.3. 假設 $T: V \to V$ 為 *normal operator,* 對任意 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 我們有以下的性質.

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle T^*(\mathbf{v}), T^*(\mathbf{w}) \rangle \quad \text{and} \quad \|T(\mathbf{v})\| = \|T^*(\mathbf{v})\|.$$

現若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$, 則因 $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{O}_V\| = 0$, 利用 Lemma 5.5.3 可得 $\|T^*(\mathbf{v})\| = 0$, 亦即 $T^*(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$. 也就是說 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T^*)$, 得證 $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^*)$. 同理可得 $\mathrm{Ker}(T^*) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$, 故知 $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$. 事實上由 Proposition 5.3.8, 我們可得下列性質.

Lemma 5.5.4. 假設 $T: V \to V$ 為 *normal operator,* 則我們有以下的性質.

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*), \quad \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^*), \quad \text{and} \quad \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{O}_V\}.$$

Proof. 因 $T^* \circ T = T \circ T^*$, 由 Proposition 5.3.8 知

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^* \circ T) = \mathrm{Ker}(T \circ T^*) = \mathrm{Ker}(T^*),$$

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T \circ T^*) = \mathrm{Im}(T^* \circ T) = \mathrm{Im}(T^*).$$

由此再利用 Proposition 5.3.8 所知的 $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$, 得

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp.$$

得證

$$\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T)^\perp \cap \mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{O}_V\}.$$

□

利用 Lemma 5.5.4, 我們馬上得到關於 normal operator 非常重要的性質.

Corollary 5.5.5. *假設 $T: V \to V$ 為 normal operator, 則我們有以下的性質.*

(1) $\mathbf{v} \in V$ 是 T 的 *eigenvector* 且其 *eigenvalue* 為 λ 若且唯若 $\mathbf{v} \in V$ 是 T^* 的 *eigenvector* 且其 *eigenvalue* 為 $\overline{\lambda}$.

(2) 對任意 $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(T^{\circ m}) = \mathrm{Ker}(T)$.

(3) 若 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 且 $\mu_{\mathbf{v}}(x)$ 和 $\mu_{\mathbf{w}}(x)$ 為 *relatively prime (互質)*, 則 $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Proof. (1) 我們知道 T 的 eigenvalue 為 λ 的 eigenvector 為 $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{id}_V)$ 中的 nonzero element, 而 T^* 的 eigenvalue 為 $\overline{\lambda}$ 的 eigenvector 為 $\mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_V)$ 中的 nonzero element. 由 Lemma 5.5.2(4) 我們知 $T - \lambda \mathrm{id}_V$ 亦為 normal operator, 故由 Lemma 5.5.4 知

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{id}_V) = \mathrm{Ker}((T - \lambda \mathrm{id}_V)^*) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_V^*) = \mathrm{Ker}(T^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_V).$$

證得 eigenvalue 為 λ 的 T 的 eigenvector 就是 eigenvalue 為 $\overline{\lambda}$ 的 T^* 的 eigenvector.

(2) 首先證明 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2}) = \mathrm{Ker}(T)$. 很明顯的 $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$. 現若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T^{\circ 2})$, 則因 $T(\mathbf{v}) \in \mathrm{Ker}(T)$ 且 $T(\mathbf{v}) \in \mathrm{Im}(T)$. 由 Lemma 5.5.4 可得 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$, 故知 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T)$. 即 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2}) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$, 得證 $\mathrm{Ker}(T^{\circ 2}) = \mathrm{Ker}(T)$.

接著利用數學歸納法, 若 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T^{\circ m})$, 則由 $T^{\circ m-1}(\mathbf{v}) \in \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T)$, 得 $T^{\circ m-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{O}_V$, 即 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T^{\circ m-1})$. 依歸納假設, 得 $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(T^{\circ m-1}) = \mathrm{Ker}(T)$. 得證 $\mathrm{Ker}(T^{\circ m}) = \mathrm{Ker}(T)$.

(3) 由 $\mu_{\mathbf{v}}(x)$ 和 $\mu_{\mathbf{w}}(x)$ 互質知存在 $f(x), g(x) \in F[x]$ 使得 $f(x)\mu_{\mathbf{v}}(x) + g(x)\mu_{\mathbf{w}}(x) = 1$. 由此得

$$\mathbf{v} = f(T) \circ \mu_{\mathbf{v}}(T)(\mathbf{v}) + g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T)(\mathbf{v}) = g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T)(\mathbf{v}).$$

另一方面, 由 $g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T)(\mathbf{w}) = \mathbf{O}_V$ 知 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T))$, 又由 Lemma 5.5.2(4) 知 $g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T)$ 亦為 normal operator, 故再由 Lemma 5.5.4 知 $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}((g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T))^*)$, 亦即 $(g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T))^*(\mathbf{w}) = \mathbf{O}_V$. 最後由 adjoint 的性質知

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T)(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, (g(T) \circ \mu_{\mathbf{w}}(T))^*(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{O}_V \rangle = 0.$$

□

回顧當 $T: V \to V$ 是 linear operator, 我們有所謂的 primary decomposition theorem, 也就是說若 $\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$, 其中 $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ 且 $p_1(x), \ldots, p_k(x) \in F[x]$ 為相異的 monic irreducible polynomial, 則 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, 其中 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T)^{\circ m_i})$. 當 T 為 normal operator 時, 其 primary decomposition 有以下特殊的形式.

Proposition 5.5.6. 假設 $T : V \to V$ 為 *normal operator,* 則 $\mu_T(x) = p_1(x)\cdots p_k(x)$, 其中 $p_1(x),\ldots,p_k(x) \in F[x]$ 為相異的 *monic irreducible polynomial.* 若對所有 $i = 1,\ldots,n$ 令 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T))$, 則

$$V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k.$$

Proof. 假設 $\mu_T(x) = p_1(x)^{m_1}\cdots p_k(x)^{m_k}$. 利用 Lemma 5.5.2(4) 我們知 $p_i(T)$ 亦為 normal operator, 故由 Corollary 5.5.5(2) 知 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T)^{\circ m_i}) = \mathrm{Ker}(p_i(T))$. 換言之對任意 $i = 1,\ldots,k$, 皆有 $\mu_{T|_{W_i}}(x) = p_i(x)$, 得證

$$\mu_T(x) = \mu_{T|_{W_i}}(x)\cdots\mu_{T|_{W_k}}(x) = p_1(x)\cdots p_k(x).$$

現若 $i \neq j$, 因 $\mu_{T|_{W_i}}(x) = p_i(x)$ 和 $\mu_{T|_{W_j}}(x) = p_j(x)$ 為 relatively prime, 對任意 $\mathbf{w}_i \in W_i$, $\mathbf{w}_j \in W_j$ 因 $\mu_{\mathbf{w}_i}(x) \mid p_i(x)$ 和 $\mu_{\mathbf{w}_j}(x) \mid p_j(x)$, 知 $\mu_{\mathbf{w}_i}(x)$ 和 $\mu_{\mathbf{w}_j}(x)$ 為 relatively prime. 利用 Corollary 5.5.5(3), 知 $\mathbf{w}_i \perp \mathbf{w}_j$, 得證 $W_i \perp W_j$, 故知 $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k$. □

接下來我們介紹兩種特別的 normal operator.

Definition 5.5.7. 假設 $T : V \to V$ 為 linear operator. 若 $T^* = T$, 則稱 T 為 *self-adjoint* operator. 若 $T^* = -T$, 則稱 T 為 *skew-adjoint* operator.

若一個 $n \times n$ matrix A 滿足 $A = A^*$, 則稱 A 為 *self-adjoint* matrix. 若 $A = -A^*$, 則稱 A 為 *skew-adjoint* matrix.

注意在 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 的情形, 當 A 為 self-adjoint matrix (即 $A^{\mathrm{t}} = A$) 一般也稱為 *symmetric* matrix. 而當 A 為 skew-adjoint matrix (即 $A^{\mathrm{t}} = -A$) 一般也稱為 *skew-symmetric* matrix. 在 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的情形, 有的書將 self-adjoint 稱為 *Hermitian* 而將 skew-adjoint 稱為 *skew-Hermitian.*

很明顯的 self-adjoint operator 和 skew-adjoint operator 皆為 normal operator. 我們曾在上一節介紹過 self-adjoint operator. 事實上特別介紹這兩種 normal operator 是因為有以下重要的性質.

Proposition 5.5.8. 假設 $T : V \to V$ 為 *linear operator.* 存在唯一的 *self-adjoint operator* $T_1 : V \to V$ 以及唯一的 *skew-adjoint operator* $T_2 : V \to V$ 滿足 $T = T_1 + T_2$. 特別的, 我們有 T 為 *normal operator* 若且唯若 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

Proof. 若 T_1 為 self-adjoint, T_2 為 skew-adjoint 且 $T_1 + T_2 = T$. 則由 Proposition 5.3.7(1) 知 $T^* = T_1^* + T_2^* = T_1 - T_2$, 得 $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $T_2 = \frac{1}{2}(T - T^*)$. 故得證唯一性. 另一方面若 $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $T_2 = \frac{1}{2}(T - T^*)$, 則由 Proposition 5.3.7(1) 得 $T_1^* = T_1$, $T_2^* = -T_2$. 亦即 T_1 為 self-adjoint, T_2 為 skew-adjoint 且 $T_1 + T_2 = T$. 故得證存在性.

現由

$$T \circ T^* = (T_1 + T_2) \circ (T_1 - T_2) = {T_1}^{\circ 2} - T_1 \circ T_2 + T_2 \circ T_1 - {T_2}^{\circ 2},$$
$$T^* \circ T = (T_1 - T_2) \circ (T_1 + T_2) = {T_1}^{\circ 2} + T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1 - {T_2}^{\circ 2}.$$

得 $T \circ T^* = T^* \circ T$ 若且唯若 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. □

和 normal operator 的情況一樣, 我們來看看如何可得到更多的 self-adjoint operator.

Lemma 5.5.9. 假設 $T:V\to V$, $T_1:V\to V$ 為 *self-adjoint operator.*

(1) $T+T_1$ 亦為 *self-adjoint operator.*

(2) 若 W 為 T*-invariant,* 則 $T|_W$ 亦為 *self-adjoint operator.*

(3) 若 T 為 *isomorphism,* 則 T^{-1} 亦為 *self-adjoint operator.*

(4) 對任意 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $f(T)$ 亦為 *self-adjoint operator.*

Proof. (1) 因 $(T+T_1)^*=T^*+T_1^*=T+T_1$, 故 $T+T_1$ 為 self-adjoint operator.

(2) 由 $T=T^*$ 得 W 亦為 T^*-invariant, 故由 Corollary 5.4.4, 得 $(T|_W)^*=T^*|_W=T|_W$.

(3) 由 Proposition 5.3.7(3) 知 $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}=T^{-1}$, 故 T^{-1} 為 self-adjoint.

(4) 由 Lemma 5.4.1 知 $(f(T))^*=\overline{f}(T^*)=\overline{f}(T)$. 但 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 故有 $\overline{f}(x)=f(x)$, 得證 $f(T)$ 為 self-adjoint operator. □

Question 5.23. 若 $T:V\to V$, $T_1:V\to V$ 為 *normal operator,* 是否 $T+T_1$ 亦為 *normal operator?*

Question 5.24. 假設 $T:V\to V$ 為 *self-adjoint operator* 且 $f(x)\in F[x]$. 試證明 $f(T)$ 為 *self-adjoint operator* 若且唯若 $\mu_T(x)\mid f(x)-\overline{f}(x)$.

關於 self-adjoint operator 我們有以下重要的性質.

Lemma 5.5.10. 假設 $T:V\to V$ 為 *self-adjoint operator.* 若 λ 為 T 的 *eigenvalue,* 則 $\lambda\in\mathbb{R}$.

Proof. 因 T 為 normal, 由 Corollary 5.5.5(1) 知, 若 $\mathbf{v}\in V$ 為相對於 λ 的 T 的 eigenvector, 即 $T(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{v}$ 亦為相對於 $\overline{\lambda}$ 的 T^* 的 eigenvector, 即 $T^*(\mathbf{v})=\overline{\lambda}\mathbf{v}$. 但由 T 為 self-adjoint 之假設, 我們有 $T(\mathbf{v})=T^*(\mathbf{v})$, 亦即 $\lambda\mathbf{v}=\overline{\lambda}\mathbf{v}$. 故由 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 得知 $\lambda=\overline{\lambda}$, 即 $\lambda\in\mathbb{R}$. □

至於 skew-adjoint operator, 我們也有和 self-adjoint 相類似的性質. 以下因證明和 Lemma 5.5.9 相似, 我們就不再證明.

Lemma 5.5.11. 假設 $T:V\to V$, $T_1:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.*

(1) $T+T_1$ 亦為 *skew-adjoint operator.*

(2) 若 W 為 T*-invariant,* 則 $T|_W$ 亦為 *skew-adjoint operator.*

(3) 若 T 為 *isomorphism,* 則 T^{-1} 亦為 *skew-adjoint operator.*

Question 5.25. 假設 $T:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 是否對任意 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, $f(T)$ 亦為 *skew-adjoint operator?*

關於 skew-adjoint operator 我們有以下重要的性質.

Lemma 5.5.12. 假設 $T:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 若 λ 為 T 的 *eigenvalue,* 則 λ 的 *real part (*實部*)* 為 0.

Proof. 因 T 為 normal, 由 Corollary 5.5.5(1) 知, 若 $\mathbf{v}\in V$ 為相對於 λ 的 T 的 eigenvector, 即 $T(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{v}$ 亦為相對於 $\overline{\lambda}$ 的 T^* 的 eigenvector, 即 $T^*(\mathbf{v})=\overline{\lambda}\mathbf{v}$. 但由 T 為 skew-adjoint 之假設, 我們有 $T^*(\mathbf{v})=-T(\mathbf{v})$, 亦即 $-\lambda\mathbf{v}=\overline{\lambda}\mathbf{v}$. 故由 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 得知 $\lambda+\overline{\lambda}=0$, 即 λ 之實部為 0. □

上面所提有關 normal operator, self-adjoint operator 以及 skew-adjoint operator 的性質都可以套用在相對應的 normal matrix, self-adjoint matrix 以及 skew-adjoint matrix. 例如任意的 $n\times n$ matrix 都可以唯一寫成一個 self-adjoint matrix 和一個 skew-adjoint matrix 之和. 這些請大家自行轉換, 我們就不再贅述了.

5.6. The Spectral Theorem

這一節中我們將 over $\mathbb{C}$ 和 over $\mathbb{R}$ 的情況分開討論, 進而推導出 normal operator 的 spectral theorem.

5.6.1. Normal Operator over $\mathbb{C}$. 首先我們考慮 V 為 finite dimensional inner product space over $\mathbb{C}$ 且 $T:V\to V$ 為 normal operator 的情形. 此時因 $\mathbb{C}$ 為 algebraically closed, 我們可以將 T 的 minimal polynomial 完全分解. 亦即存在 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ 以及 $m_1,\dots,m_k\in\mathbb{N}$ 使得 $\mu_T(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$. 依此, 利用 Proposition 5.5.6 我們可以得到 over $\mathbb{C}$ 的 normal operator 的 spectral theorem.

Theorem 5.6.1 (Spectral Theorem: complex case)**.** 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{C}$ 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator.* 則 T 為 *unitary diagonalizable* 若且唯若 T 為 *normal operator.*

Proof. 由 Proposition 5.4.10 我們知道若 T 為 unitary diagonalizable 則 T 為 normal operator.

現假設 T 為 normal operator 由 Proposition 5.5.6, 得 $\mu_T(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$, 其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{C}$ 為相異, 且 $V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$, 其中 $W_i=\mathrm{Ker}((T-\lambda_i\mathrm{id}_V))=E_{\lambda_i}$ 為 λ_i 的 eigenspace, 得

$$V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k},$$

故由 Proposition 5.4.10 知 T 為 unitary diagonalizable. □

考慮 $\mathbb{C}^n$ 上的 standard inner product, 利用 Theorem 5.6.1, 我們馬上得到矩陣形式的 spectral theorem.

Corollary 5.6.2. 假設 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 則 A 為 *normal matrix* (即 $AA^*=A^*A$) 若且唯若存在 *unitary matrix* $P\in M_n(\mathbb{C})$ (即 $P^{-1}=P^*$) 使得 P^*AP 為 *diagonal matrix.*

我們馬上得到有關 self-adjoint operator 以及 skew-adjoint operator 的 spectral theorem.

Corollary 5.6.3. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{C}$ 且 $T: V \to V$ 為 *linear operator*. 我們有以下性質.

(1) T 為 *self-adjoint operator* 若且唯若 T 為 *unitary diagonalizable* 且 T 的 *eigenvalue* 皆為實數.

(2) T 為 *skew-adjoint operator* 若且唯若 T 為 *unitary diagonalizable* 且 T 的 *eigenvalue* 的實部為 0.

Proof. 利用 Theorem 5.6.1, Lemma 5.5.10 我們得若 T 為 self-adjoint operator 則 T 為 unitary diagonalizable 且 T 的 eigenvalue 皆為實數. 反之若 T 為 unitary diagonalizable 且 T 的 eigenvalue 皆為實數, 則由 Proposition 5.4.10 知存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ 以及 orthogonal projections π_i 使得 $T = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k$. 此時 $T^* = \lambda_1\pi_1^* + \cdots + \lambda_k\pi_k^*$ 且因 $\pi_i^* = \pi_i$, 得證 $T^* = T$. 同理可證得 skew-adjoint 的情形, 在此略過. □

Question 5.26. 若 $T: V \to V$ 為 *self-adjoint*, 則 $\chi_T(x), \mu_T(x)$ 為何種形式? 若 $T: V \to V$ 為 *skew-adjoint*, 則 $\chi_T(x), \mu_T(x)$ 為何種形式?

同樣的我們也有 self-adjoint matrix 和 skew-adjoint 相對應的結果.

Corollary 5.6.4. 假設 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 我們有以下性質.

(1) $A^* = A$ 若且唯若存在 *unitary matrix* $P \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

(2) $A^* = -A$ 若且唯若存在 *unitary matrix* $P \in M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 的實部為 0.

注意 Corollary 5.6.4 中 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 不必相異. 另外在 skew-adjoint 的情形 γ_i 的實部為 0 一般稱為 purely imaginary number (純虛數), 不過這裡 γ_i 有可能為 0.

5.6.2. Normal operator over $\mathbb{R}$. 在 over $\mathbb{C}$ 的情況我們用到 $\mathbb{C}$ 為 algebraically closed, 由於 $\mathbb{R}[x]$ 中的 irreducible polynomial, 有可能是二次的, 因此我們需要用其他的方法處理 over $\mathbb{R}$ 的情形. 假設 V 為 over $\mathbb{R}$ 的 finite dimensional inner product space, 首先注意在此情形 $T: V \to V$ 為 normal operator 並不一定為 unitary (orthogonal) diagonalizable. 事實上由 Proposition 5.4.10 我們知道若 T 為 unitary diagonalizable, 則存在 $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ 且 $\pi_1, \dots, \pi_k$ 為 orthogonal projection 使得 $T = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k$. 此時因

$$T^* = \overline{\lambda_1}\pi_1^* + \cdots + \overline{\lambda_k}\pi_k^* = \lambda_1\pi_1 + \cdots + \lambda_k\pi_k = T,$$

得知 T 必為 self-adjoint operator. 事實上我們有以下之結果.

Theorem 5.6.5. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator,* 則 T 為 *unitary diagonalizable* 若且唯若 T 為 *self-adjoint operator.*

Proof. 前面已知若 T 為 unitary diagonalizable 則 T 為 self-adjoint operator. 現假設 T 為 self-adjoint operator, 因 T 為 normal, 故由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x)=p_1(x)\cdots p_k(x)$, 其中 $p_1(x),\ldots,p_k(x)$ 為相異的 monic irreducible polynomial in $\mathbb{R}[x]$, 且 $V=W_1\boxplus\cdots\boxplus W_k$, 其中 $W_i=\mathrm{Ker}(p_i(T))$. 我們欲說明對所有 $i=1,\ldots,k$, $p_i(x)$ 皆為一次的 polynomial, 即存在 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 使得 $p_i(x)=x-\lambda_i$. 此即得證 $W_i=E_{\lambda_i}$ 為 λ_i 的 eigenspace, 即 $V=E_{\lambda_1}\boxplus\cdots\boxplus E_{\lambda_k}$, 故由 Proposition 5.4.10 知 T 為 unitary diagonalizable.

現任取 V 的一組 orthonormal basis 所組成的 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$. 由 $T=T^*$ 以及 Proposition 5.3.10 知 $[T]_\beta^*=[T^*]_\beta=[T]_\beta$, 亦即 $[T]_\beta$ 為 self-adjoint matrix in $M_n(\mathbb{R})$. 當然 $[T]_\beta$ 看成 $M_n(\mathbb{C})$ 的 matrix 亦為 self-adjoint, 故套用 Corollary 5.6.4(1), 我們知存在 $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\chi_{[T]_\beta}(x)=\chi_T(x)=(x-\gamma_1)\cdots(x-\gamma_n).$$

亦即 $\chi_T(x)$ 可以完全分解成 $\mathbb{R}[x]$ 中的一次多項式的乘積, 故由 $\mu_T(x)\mid\chi_T(x)$, 得證存在 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 使得 $p_i(x)=x-\lambda_i$. □

我們馬上得到有關於 symmetric matrix 相對應的性質.

Corollary 5.6.6. 假設 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 則 $A^{\mathrm{t}}=A$ 若且唯若存在 *orthogonal matrix* $P\in M_n(\mathbb{R})$ (即 $P^{-1}=P^{\mathrm{t}}$) 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為 $M_n(\mathbb{R})$ 中的 *diagonal matrix.*

接下來我們探討 over $\mathbb{R}$ 的 skew-adjoint operator.

Lemma 5.6.7. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *linear operator,* 則 T 為 *skew-adjoint* 若且唯若對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=0$.

Proof. 首先強調 over $\mathbb{R}$ 的 inner product 有對稱性, 即 $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle,\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. 現假設 $T^*=-T$, 則對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},T^*(\mathbf{v})\rangle=\langle\mathbf{v},-T(\mathbf{v})\rangle=-\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle,$$

得證 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=0$.

反之, 若對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=0$, 則對任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 我們有

$$0=\langle T(\mathbf{v}+\mathbf{w}),\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle=\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle+\langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle.$$

得知對任意 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ 皆有

$$\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle=-\langle T(\mathbf{w}),\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},-T(\mathbf{w})\rangle,$$

利用 adjoint 的唯一性 (Theorem 5.3.5) 得證 $T^*=-T$. □

當 T 為 skew-adjoint, 假設 $x-\lambda\in\mathbb{R}[x]$ 是 $\mu_T(x)$ 的一次因式, 即 $\lambda\in\mathbb{R}$ 為 T 的一個 eigenvalue. 令 $\mathbf{v}\in V$ 為相對於 λ 的 eigenvector, 即 $T(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$. 由 Lemma 5.6.7 知 $0=\langle T(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=\langle\lambda\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=\lambda\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$. 由於 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}_V$, 得知 $\lambda=0$. 也就是說 x 是 $\mu_T(x)$ 唯一可能的實係數一次因式. 事實上我們有以下結果.

Corollary 5.6.8. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *nonzero skew-adjoint operator.* 若 T 為 *isomorphism,* 則存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$. 若 T 不是 *isomorphism,* 則存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=x(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$.

Proof. 我們已知 $\mu_T(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中可能的一次因式為 x. 現在考慮 $\mu_T(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中可能的二次質因式. 假設 $x^2+rx+s\in\mathbb{R}[x]$, 為 $\mu_T(x)$ 的一個二次質因式. 則由 cyclic decomposition theorem 知存在 $\mathbf{v}\in V$ 滿足 $\mu_{\mathbf{v}}(x)=x^2+rx+s$. 由 Lemma 5.6.7, 我們知 $\langle T^{\circ 2}(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle=0$. 又 $T^{\circ 2}(\mathbf{v})=-rT(\mathbf{v})-s\mathbf{v}$, 故得

$$0=\langle -rT(\mathbf{v})-s\mathbf{v},T(\mathbf{v})\rangle=-r\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle-s\langle\mathbf{v},T(\mathbf{v})\rangle=-r\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle.$$

然而 $T(\mathbf{v})\neq 0$ (否則 $\mu_{\mathbf{v}}(x)\mid x$), 故得 $r=0$. 而又若 $s\leq 0$, 則 x^2+s 不為 irreducible polynomial, 故知 $s>0$. 得知 $\mu_T(x)$ 唯一可能的二次質因式為 x^2+b^2 其中 $b\neq 0$ 這樣的形式.

現若 T 為 isomorphism, 即 $\mathrm{Ker}(T)=\{\mathbf{O}_V\}$, 得知 x 不可能為 $\mu_T(x)$ 的因式. 故 $\mu_T(x)$ 只有二次的質因式, 又由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x)$ 的質因式不會重複出現, 證得存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$. 而若 T 不是 isomorphism, 即 $\dim(\mathrm{Ker}(T))>0$, 得知 x 必為 $\mu_T(x)$ 的因式, 證得存在 $b_1,\ldots,b_k\in\mathbb{R}$ 皆相異且不為 0 使得 $\mu_T(x)=x(x^2+b_1^2)\cdots(x^2+b_k^2)$. □

若 T 為 skew-adjoint operator 且 $p(x)$ 是 $\mu_T(x)$ 的質因式, 令 $W=\mathrm{Ker}(p(T))$ 由 primary decomposition theorem, 我們需要了解 $T|_W$. 當 $p(x)=x$ 時, $W=\mathrm{Ker}(T)$ 此時 $T|_W$ 為 zero mapping. 故僅要考慮 $p(x)=x^2+b^2$, $b\neq 0$ 的情形. 此時 $W=\mathrm{Ker}(T^{\circ 2}+b^2\mathrm{id}_V)$, 為 T-invariant, 故由 Lemma 5.5.11(2), $T|_W$ 亦為 skew-adjoint. 又此時 $\mu_{T|_W}(x)=x^2+b^2$, 所以我們僅要考慮以下之情形.

Lemma 5.6.9. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T:V\to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 假設 $\mu_T(x)=x^2+b^2$ 其中 $b\neq 0$, 則存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta=\begin{pmatrix} M & & \mathbf{O}\\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M\end{pmatrix}, \text{其中 } M=\begin{pmatrix} 0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Proof. 任取 $\mathbf{v}\in V$ 且 $\|\mathbf{v}\|=1$. 因 $T^{\circ 2}+b^2\mathrm{id}_V=\mathbf{O}$, 我們有 $T(T(\mathbf{v}))=-b^2\mathbf{v}$. 考慮 T-cyclic subspace $W=\mathrm{Span}(\{\mathbf{v},T(\mathbf{v})\})$. 因

$$\|T(\mathbf{v})\|^2=\langle T(\mathbf{v}),T(\mathbf{v})\rangle=\langle\mathbf{v},T^*(T(\mathbf{v}))\rangle=\langle\mathbf{v},-T(T(\mathbf{v}))\rangle=\langle\mathbf{v},b^2\mathbf{v}\rangle=b^2.$$

令 $\mathbf{v}' = \frac{1}{b}T(\mathbf{v})$. 由 Lemma 5.6.7 知 $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{b}\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = 0$. 故 $\beta_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ 為 W 的一個 ordered orthonormal basis. 因

$$T(\mathbf{v}) = b\mathbf{v}', T(\mathbf{v}') = \frac{1}{b}T(T(\mathbf{v})) = -b\mathbf{v},$$

我們得

$$[T|_W]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

現考慮 $V = W \boxplus W^\perp$. 因 W 為 T-invariant, 由 Lemma 5.4.3 知 $W^\perp$ 為 T^*-invariant. 但 $T^* = -T$, 故知 $W^\perp$ 亦為 T-invariant. 再由 Lemma 5.5.11 知 $T|_{W^\perp}$ 亦為 skew-adjoint. 現因 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) \mid \mu_T(x)$, 得 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = 1$ 或 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = x^2 + b^2$. 若 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = 1$, 表示 $W^\perp = \{\mathbf{O}_V\}$, 亦即表示 $V = W$, 得證本定理. 若 $\mu_{T|_{W^\perp}}(x) = x^2 + b^2$, 則我們可套用數學歸納法找到 $W^\perp$ 的一組 ordered orthonormal basis β_2 使得 $[T|_{W^\perp}]_{\beta_2}$ 為如 (5.4) 的 block diagonal matrix. 此時將 β_1, β_2 合組成 V 的一組 ordered orthonormal basis β, 則 $[T]_\beta$ 即為所求. $\square$

Example 5.6.10. 假設 V 為 finite dimensional inner product space over $\mathbb{R}$ 且 $T : V \to V$ 為 skew-adjoint operator. 若 $\chi_T(x) = (x^2+2)^2$, 則由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x) = x^2 + 2$. 故由 Lemma 5.6.9 知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 5.27. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$ 且 $T : V \to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 若已知 $\mu_T(x) = x^2 + b^2$ 其中 $b \neq 0$, 試說明 $\dim(V)$ 必為偶數.

對於一般的 over $\mathbb{R}$ 的 skew-adjoint operator $T : V \to V$, 由 Proposition 5.5.6 知 $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k$, 其中 $W_i = \mathrm{Ker}(T)$ 或 $W_i = \mathrm{Ker}(T^{\circ 2} + b^2 \mathrm{id}_V)$. 若 $W_i = \mathrm{Ker}(T)$, 因 $T|_{W_i}$ 為 zero mapping, 任取 W_i 的一組 ordered orthonormal basis β_i, 皆會使得 $[T|_{W_i}]_{\beta_i}$ 為 zero matrix. 而若 $W_i = \mathrm{Ker}(T^{\circ 2} + b^2 \mathrm{id}_V)$, 由 Lemma 5.6.9 我們可以找到 W_i 的一組 ordered orthonormal basis β_i, 使得 $[T|_{W_i}]_{\beta_i}$ 為如 (5.4) 的 block diagonal matrix. 由於這些 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 可以組成 V 的一組 orthonormal ordered basis, 我們有以下之結果.

Theorem 5.6.11. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$. 則 $T : V \to V$ 為 *skew-adjoint operator* 若且唯若存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} M_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l \end{pmatrix}, \text{ 其中 } M_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}, b_i \neq 0 \text{ 或 } M_i = 0. \tag{5.5}$$

Proof. 若 $T : V \to V$ 為 skew-adjoint operator 由前面的說明我們知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.5) 的 block diagonal matrix.

反之, 若存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.5) 的 block diagonal matrix, 則由 Proposition 5.3.10 知

$$[T^*]_\beta = [T]_\beta^* = \begin{pmatrix} M_1^* & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l^* \end{pmatrix},$$

其中 $M_i^* = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix} = -M_i$ 或 $M_i^* = 0 = -M_i$. 換言之, $[T^*]_\beta = -[T]_\beta = [-T]_\beta$, 得證 $T^* = -T$. □

由 Theorem 5.6.11, 我們可得到有關於 skew-adjoint matrix 的性質. 也就是說 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 滿足 $A^{\mathrm{t}} = -A$ 若且唯若存在 orthogonal matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為如 (5.5) 的 block diagonal matrix.

Question 5.28. 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^{\mathrm{t}} = -A$. 若已知 $\chi_A(x) = x^3(x^2+1)(x^2+2)^2$, *試寫下如 (5.5) 的 block diagonal matrix* B *使得* $A \sim B$. *試寫下* A *的 rational form (或 classical form). 為何* A *的 rational form 不是 skew-symmetric?*

最後我們來探討一般 over $\mathbb{R}$ 的 normal operator. 若 $T : V \to V$ 為 normal operator, 則由 Proposition 5.5.6 我們有 $V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k$, 其中 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T))$ 且 $p_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ 為 monic irreducible polynomial. 我們知 $\mathbb{R}[x]$ 中的 monic irreducible polynomial 僅有以下兩種形式, 即 $x - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, 以及 $(x-a)^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq 0$. 若 $p_i(x) = x - \lambda$, 則 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T))$ 為 eigenvalue 為 λ 的 eigenspace. 所以我們僅要探討 $p_i(x) = (x-a)^2 + b^2$ 的情形. 注意由於 $W_i^\perp = \boxplus_{j \neq i} W_j$ 且 W_j 皆為 T-invariant, 得 $W_i^\perp$ 亦為 T-invariant. 故由 Lemma 5.5.2(2) 知 $T|_{W_i}$ 亦為 normal operator. 又此時 $\mu_{T|_{W_i}}(x) = (x-a)^2 + b^2$, 所以我們僅要考慮以下之情形.

Lemma 5.6.12. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ 為 *normal operator* 且 $\mu_T(x) = (x-a)^2 + b^2$ 其中 $b \neq 0$. 令 $T = T_1 + T_2$, 其中 $T_1 : V \to V$ 為 *self-adjoint operator,* $T_2 : V \to V$ 為 *skew-adjoint operator.* 則

(1) T_2 為 *isomorphism.*

(2) $\mu_{T_1}(x) = x - a$.

(3) $\mu_{T_2}(x) = x^2 + b^2$.

Proof. Proposition 5.5.8 告訴我們 T_1, T_2 必存在且唯一. 又 T 為 normal 故 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

(1) 我們只要證明 $\mathrm{Ker}(T_2) = \{\mathbf{O}_V\}$, 便可得 T_2 為 isomorphism. 現假設 $\mathrm{Ker}(T_2) \neq \{\mathbf{O}_V\}$ 且令 $W = \mathrm{Ker}(T_2)$. 由 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ 知對任意 $\mathbf{w} \in W$, $T_2(T_1(\mathbf{w})) = T_1(T_2(\mathbf{w})) = T_1(\mathbf{O}_V) = \mathbf{O}_V$. 亦即 $T_1(\mathbf{w}) \in \mathrm{Ker}(T_2) = W$, 得證 W 為 T_1-invariant. 又對任意 $\mathbf{w} \in W$, 皆有

$$T(\mathbf{w}) = T_1(\mathbf{w}) + T_2(\mathbf{w}) = T_1(\mathbf{w}), \text{ 即 } T|_W = T_1|_W.$$

由 Lemma 5.5.9 知 $T_1|_W$ 為 self-adjoint, 故 $T|_W$ 為 self-adjoint. 然而 $\mu_{T|_W}(x) \mid \mu_T(x)$ 且 $\mu_{T|_W}(x) \neq 1$ (否則 $W = \{\mathbf{O}_V\}$), 由 $(x-a)^2 + b^2$ $(b \neq 0)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中為 irreducible 得 $\mu_{T|_W}(x) =$

$\mu_T(x) = (x-a)^2 + b^2$. 另一方面由 $T|_W$ 為 self-adjoint, Theorem 5.6.5 告訴我們 $T|_W$ 為 unitary-diagonalizable, 此即表示 $\mu_{T|_W}(x)$ 可以分解成 $\mathbb{R}[x]$ 中一次多項式的乘積. 由此矛盾得證 $W = \operatorname{Ker}(T_2) = \{\mathbf{O}_V\}$.

(2) 由 $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ 得

$$T^{\circ 2} = (T_1 + T_2) \circ (T_1 + T_2) = {T_1}^{\circ 2} + 2T_1 \circ T_2 + {T_2}^{\circ 2}.$$

同理由 $T^* = T_1^* + T_2^* = T_1 - T_2$, 得 $(T^*)^{\circ 2} = {T_1}^{\circ 2} - 2T_1 \circ T_2 + {T_2}^{\circ 2}$, 與上式相減得

$$T^{\circ 2} - (T^*)^{\circ 2} = 4T_1 \circ T_2. \tag{5.6}$$

另一方面, 由 Lemma 5.4.2 知 $\mu_{T^*}(x) = \overline{\mu_T}(x) = (x-a)^2 + b^2$, 故知

$$T^{\circ 2} = 2aT - (a^2 + b^2)\mathrm{id}_V, \quad (T^*)^{\circ 2} = 2aT^* - (a^2 + b^2)\mathrm{id}_V.$$

相減得

$$T^{\circ 2} - (T^*)^{\circ 2} = 2a(T - T^*) = 4aT_2. \tag{5.7}$$

由等式 (5.6), (5.7) 得 $4T_1 \circ T_2 = 4aT_2$, 由 (1) 知 T_2^{-1} 存在, 故將前面等式兩邊與 T_2^{-1} 合成得 $T_1 = a\,\mathrm{id}_V$. 即 $T_1 - a\,\mathrm{id}_V = \mathbf{O}$, 證得 $\mu_{T|_1}(x) = x - a$.

(3) 由 (2) 知 $T_2 = T - a\,\mathrm{id}_V$, 故

$${T_2}^{\circ 2} = (T - a\,\mathrm{id}_V)^{\circ 2} = T^{\circ 2} - 2aT + a^2\mathrm{id}_V = (2aT - (a^2+b^2)\mathrm{id}_V) - 2aT + a^2\mathrm{id}_V = -b^2\mathrm{id}_V,$$

即 ${T_2}^{\circ 2} + b^2\mathrm{id}_V = \mathbf{O}$. 由 $b \neq 0$, $x^2 + b^2$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中為 irreducible, 得證 $\mu_{T_2}(x) = x^2 + b^2$. □

在 Lemma 5.6.12 中, 因 T_2 為 skew-adjoint 且 $\mu_{T_2}(x) = x^2 + b^2$, 由 Lemma 5.6.9 知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T_2]_\beta$ 為如 (5.4) 的 block diagonal matrix. 而 $T_1 = a\,\mathrm{id}_V$, 故若 $\dim(V) = n$, 則 $[T_1]_\beta = aI_n$. 故由 $[T]_\beta = [T_1 + T_2]_\beta = [T_1]_\beta + [T_2]_\beta$ 我們有以下之結果.

Corollary 5.6.13. 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ 為 *normal operator.* 若 $\mu_T(x) = (x-a)^2 + b^2$ 其中 $b \neq 0$ 則存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} M & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M \end{pmatrix}, \text{其中 } M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Example 5.6.14. 假設 V 為 finite dimensional inner product space over $\mathbb{R}$ 且 $T : V \to V$ 為 normal operator. 若 $\chi_T(x) = (x^2 + 4x + 6)^2$, 則由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x) = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$. 故由 Corollary 5.6.13 知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

對於一般的 over $\mathbb{R}$ 的 normal operator $T: V \to V$, 由 Proposition 5.5.6 知 $\mu_T(x) = p_1(x)\cdots p_k(x)q_1(x)\cdots q_l(x)$, 其中 $p_1(x),\ldots,p_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ 為相異的 monic irreducible polynomial of degree 2, $q_1(x),\ldots,q_l(x) \in \mathbb{R}[x]$ 為相異的 monic polynomial of degree 1. 令 $W_i = \mathrm{Ker}(p_i(T))$, $E_j = \mathrm{Ker}(q_j(T))$, 則

$$V = W_1 \boxplus \cdots \boxplus W_k \boxplus E_1 \boxplus \cdots \boxplus E_l.$$

由於 $E_j = \mathrm{Ker}(q_j(T))$ 為 T 的一個 eigenspace, 任取 E_j 的一組 ordered orthonormal basis β'_j, 皆會使得 $[T|_{E_j}]_{\beta'_j}$ 為 diagonal matrix. 而因 $p_i(x)$ 為 $(x-a)^2+b^2$ 的形式且 $T|_{W_j}$ 仍為 normal, 又 $\mu_{T|_{W_i}}(x) = p_i(x)$, 由 Corollary 5.6.13 我們可以找到 W_i 的一組 orthonormal ordered basis β_i, 使得 $[T|_{W_i}]_{\beta_i}$ 為如 (5.8) 的 block diagonal matrix. 由於這些 $\beta_1,\ldots,\beta_k,\beta'_1,\ldots,\beta'_l$ 可以組成 V 的一組 ordered orthonormal basis, 我們有以下有關 over $\mathbb{R}$ 的 spectral theorem.

Theorem 5.6.15 (Spectral Theorem: real case)**.** 假設 V 為 *finite dimensional inner product space over* $\mathbb{R}$. 則 $T: V \to V$ 為 *normal operator* 若且唯若存在 V 的一組 *ordered orthonormal basis* β 使得 $[T]_\beta$ 為以下的 *block diagonal matrix*

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} M_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l \end{pmatrix}, \text{其中 } M_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}, b_i \neq 0 \text{ 或 } M_i = \lambda_i. \tag{5.9}$$

Proof. 若 $T: V \to V$ 為 normal operator 由前面的說明我們知存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.9) 的 block diagonal matrix.

反之, 若存在 V 的一組 ordered orthonormal basis β 使得 $[T]_\beta$ 為如 (5.9) 的 block diagonal matrix, 則由 Proposition 5.3.10 知

$$[T^*]_\beta = [T]^*_\beta = \begin{pmatrix} M_1^* & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & M_l^* \end{pmatrix},$$

其中 $M_i^* = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ 或 $M_i^* = \lambda_i = M_i$. 由於 $M_iM_i^* = M_i^*M_i$, 可得 $[T]_\beta[T^*]_\beta = [T^*]_\beta[T]_\beta$, 得證 $T \circ T^* = T^* \circ T$. □

由 Theorem 5.6.15, 我們可得到有關於 normal matrix 的性質. 也就是說 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 滿足 $A^{\mathrm{t}}A = AA^{\mathrm{t}}$ 若且唯若存在 orthogonal matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{\mathrm{t}}AP$ 為如 (5.9) 的 block diagonal matrix.

Question 5.29. 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A^{\mathrm{t}}A = AA^{\mathrm{t}}$. 若已知

$$\chi_A(x) = (x^2+1)(x^2+4x+6)^2(x+1)^2(x^2-2),$$

試寫下如 *(5.9)* 的 *block diagonal matrix* B 使得 $A \sim B$. 試寫下 A 的 *rational form*. 為何 A 的 *rational form* 不是 *normal?*

最後我們特別做以下的提醒. 一個 linear operator $T:V\to V$ 是否為 diagonalizable, 和 V 是否為 inner product space 無關. 但 T 是否為 unitary diagonalizable 就和 inner product 有關了. 也就是說 V 用不同的 inner product, 不會改變 T 是否為 diagonalizable 的性質, 但有可能改變其是否為 unitary diagonalizable 的性質. 我們有以下的例子.

Example 5.6.16. 在 Example 5.3.11 中我們考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為

$$T(x_1,x_2,x_3)=(4x_1+x_2+2x_3,4x_1+4x_2+4x_3,2x_1+x_2+4x_3).$$

以及 $\mathbb{R}^3$ 上兩個 inner products $\langle\,,\rangle$ 以及 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$. 簡單的計算我們得 T 的 eigenvalues 為 2 和 8 且其對應的 eigenspaces 分別為 $E_2=\mathrm{Span}(\{(1,-2,0),(1,0,-1)\})$ 以及 $E_8=\mathrm{Span}(\{(1,2,1)\})$.

若考慮 $\mathbb{R}^3$ 為 standard inner product space, 此時 $T\neq T^*$ 故 T 不是 self-adjoint operator. 由 Theorem 5.6.5 知 T 在 standard inner product $\langle\,,\rangle$ 之下不是 unitary diagonalizable. 事實上 $\langle(1,-2,0),(1,2,1)\rangle=-3\neq 0$, 知 $E_2\not\subseteq E_8^{\perp}$. 但因 T 仍為 diagonalizable, 亦即 T 的 minimal polynomial $\mu_T(x)$ 可寫成一次 monic polynomial 的乘積 (事實上我們有 $\mu_T(x)=(x-2)(x-8)$). 依此我們可利用 Theorem 5.6.15 得知 T 在 standard inner product 之下不是 normal operator. 事實上由 Example 5.3.11 知此時

$$[T^*\circ T]_\varepsilon=[T^*]_\varepsilon[T]_\varepsilon=\begin{pmatrix}4&4&2\\1&4&1\\2&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2\\4&4&4\\2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36&22&32\\22&18&22\\32&22&36\end{pmatrix},$$

而

$$[T\circ T^*]_\varepsilon=[T]_\varepsilon[T^*]_\varepsilon=\begin{pmatrix}4&1&2\\4&4&4\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&4&2\\1&4&1\\2&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&28&17\\28&48&28\\17&28&21\end{pmatrix},$$

考慮 $\mathbb{R}^3$ 為以 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ 為 inner product 的 inner product space 時, 我們得 $T^*=T$, 亦即 T 為 self-adjoint operator, 故由 Theorem 5.6.5 知 T 在此 inner product 之下為 unitary diagonalizable. 事實上由 $\langle\langle(1,-2,0),(1,2,1)\rangle\rangle=0$ 以及 $\langle\langle(1,0,-1),(1,2,1)\rangle\rangle=0$ 得此時 $E_2\perp E_8$. 利用 Gram-Schmidt's process 找到 E_2 的一組 orthogonal basis, 其過程如下: 令 $\mathbf{v}_1=(1,-2,0),\mathbf{w}_2=(1,0,-1)$, 則取

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{w}_2-\frac{\langle\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{v}_1\rangle\rangle}{\langle\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle\rangle}\mathbf{v}_1=(1,0,-1)-\frac{1}{2}(1,-2,0)=(\frac{1}{2},1,-1),$$

可得 $\langle\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle\rangle=0$, 故 $\{(1,-2,0),(\frac{1}{2},1,-1),(1,2,1)\}$ 為 T 的 eigenvectors 且為 $\mathbb{R}^3$ 在 $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ 之下的一組 orthogonal basis.