

基礎微積分

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

本講義針對三學分的大學基礎微積分，希望簡單介紹學生基礎微積分的概念。分成極限、微分以及積分三部分。全部以“說理”的方式進行，不涉及嚴格的證明。

本講義依照由 James Stewart 以及 Troy Day 所著 “Biocalculus: Calculus for the Life Sciences” 前六章的順序編排。在講義中稱此書為 [BioCalc.]，這本書的精華在於微積分在生科方面的應用，而本講義僅針對書中數學部分（微積分）加以補充說明，期望大家在了解數學部分後能很順利的銜接書中的應用部分。雖然講義編寫儘量自成一格，仍建議閱讀時以該書為主，本講義為輔。另外講義中的例子、習題大多取自於書中 Example 以及 Exercise。講義中會標明例子與習題在書中的編號，學生需利用書中更多的 Example 以及 Exercise 學習。

本講義雖然主要以中文撰寫，不過當涉及定義或專有名詞時，為免翻譯的困擾將以英文取代。因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現，若有不便請見諒。

本講義編寫費時，編寫完後並未經過嚴謹的校對。疏漏在所難免，雖不至於有理論性上嚴重的錯誤，但讀者仍應注意不宜概括全收。若發現錯誤，歡迎提出寶貴的意見。

極限以及連續性

本課程探討的是定義在實數且取值為實數的函數。函數的極限是學習微積分最重要的基本概念。在本章中，我們先介紹數列的極限進而介紹函數極限的基本概念，再利用極限的概念介紹何謂連續函數。接著，介紹一些求極值的方法以及連續函數的性質。

1.1. 數列的極限

所謂數列 (sequence) 的極限 (limit) 談的是有無限多項的數列 (infinite sequence) 其長期變化的趨勢。這裡，為了方便起見我們談的數列都有起始項，且項數是增加的。這裡我們不要求對極限性質的證明，而強調對這些性質的理解與運用，所以不會論及數列的極限在數學上嚴格的定義。

當不論及正式的定義，[BioCalc.] Definition 2.1.1 說一個數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 L ，指的是當 n 夠大時，都會使得 a_n 任意接近 L ，並用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (或 $a_n \rightarrow L$ as $n \rightarrow \infty$) 表示之。這裡要注意的是 L 必須是一個實數；而當 n 夠大時，都會使得 a_n 任意接近 L 說的是任選一個包含 L 的開區間 (例如 $(L - 0.001, L + 0.001)$) 都可以找到 N 使得當 $n \geq N$ 時， a_n (即第 N 項以後) 都會落在這區間內。

當一個數列極限存在且極限值為 L 時 (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$) 我們稱此數列收斂到 L (converges to L)，而若不強調其極限值僅強調其極限存在 (有時極限值不好求，我們僅關心其極限是否存在)，便稱此數列收斂 (converges)。反之，當一個數列極限不存在時，我們便稱此數列發散 (diverges)。

例子 1.1.1. [BioCalc.] Example 2.1.1 舉了 $a_n = \frac{1}{n}$ 和 $b_n = (-1)^n$ 這兩個例子。因為 n 越大， a_n 的分母越大，我們可推測 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ；而 b_n 在 $1, -1$ 間跳動沒有極限，所以 b_n diverges。由於計算機的取值有效位數有限制，僅代值看趨勢判斷極限值會有問題，所以正確的方式就是利用定義證明。例如對於數列 $\langle a_n \rangle$ 要證明其極限為 0 ，選取包含 0 的任意區間，對於夠大的 n ， a_n 都會落在這區間內。例如考慮區間 $(-0.01, 0.01)$ ，當 $n > 100$ 時，都會有

$0 < a_n < 0.01$ (即 $a_n \in (-0.01, 0.01)$)。數學上就是以此方法證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。論證一個數列收斂或發散有時相當困難，只要大家理解基本概念，在此課程不會要求。

注意：許多人會說 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 表示當 n 越來越大時 a_n 會越靠近 L ，不過這樣的說法容易

讓人誤解。例如考慮 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{當 } n \text{ 為奇數;} \\ \frac{2}{n}, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$ 這個數列是以忽遠忽近的方式接近 0。例如

$a_{100} = \frac{1}{50}, a_{101} = \frac{1}{101}, a_{102} = \frac{1}{51}$ ，並沒有越來越靠近 0。不過選取包含 0 的任意區間，對於夠大的 n ， a_n 都會落在這區間內。例如考慮區間 $(-0.01, 0.01)$ ，當 $n > 200$ 時，都會有 $-0.01 < a_n < 0.01$ (即 $a_n \in (-0.01, 0.01)$)。所以我們仍然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 #

由於我們關心的是數列長期變化的趨勢，對於發散的數列我們又區分成幾種情況。一種情況是任選一個正實數 M ，當 n 夠大時 a_n 都會大於 M ，此時我們用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 表示，並稱 a_n 發散到無窮大 (diverges to infinity)。反過來，若任選一個負實數 K ，當 n 夠大時 a_n 都會小於 K ，此時我們用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 表示，並稱 a_n 發散到負無窮大。例如 [BioCalc.] Example 2.1.2 中 $a_n = \sqrt{n}$ 就發散到無窮大。這兩種情況外的其他的情況，我們就直接說數列發散，也不會用 $\lim$ 的符號表示。例如前面例子 1.1.1 中 $b_n = (-1)^n$ 因為不會收斂到任何的值，所以發散，但 b_n 是有界的 (因 $|b_n| = 1$) 所以不會發散到無窮大。

一般來說，要了解一個數列收斂或發散並不容易，而若收斂要知道其極限為何更是困難。以後學了微積分，我們可以利用一些技巧處理。以下介紹的一些有關數列極限的基本性質。有了這些性質基本，我們就可以利用一些已知數列的極限求得其他相關數列的極限。

Theorem 1.1.2. 假設 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 均為收斂的數列。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。
- (3) 假設 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ 。

這個定理可以用極限定義方式證明，我們只要了解其意義，證明就略過了。請注意要使用此定理的先決條件是兩個數列都是收斂的。當 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 均為收斂的數列且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 。性質 (1) 說考慮相加的數列 $\langle s_n \rangle$ 其中 $s_n = a_n + b_n$ ，則 $\langle s_n \rangle$ 會收斂且 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A + B$ 。而若考慮相乘的數列 $\langle p_n \rangle$ 其中 $p_n = a_n \cdot b_n$ ，性質 (2) 告訴我們 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = AB$ 。又若對所有 n 皆有 $b_n \neq 0$ 且 $B \neq 0$ ，考慮相除的數列 $\langle q_n \rangle$ 其中 $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{A}{B}$ 。要注意這裡要求 b_n 皆不為 0，否則 q_n 會無法定義。另外，即使 b_n 皆不為 0，仍有可能 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B = 0$ (例如 $b_n = \frac{1}{n}$ 的情況)，所以我們也要排除 $B = 0$ 的情況。

雖然我們列的性質比 [BioCalc.] P.91 所列的 Limit Laws for Sequence 少，可是 [BioCalc.] 所列的性質有些部分是可以利用這裡的 Theorem 1.1.2 來推導。例如當 c 是一個常

數，我們可以將之看成是一個常數數列 $\langle b_n \rangle$ ，也就是說每一項 b_n 都等於 c ，所以我們有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ 。也因此數列 $\langle ca_n \rangle$ 就可視為數列 $\langle b_n a_n \rangle$ ，此時就可套用 Theorem 1.1.2(2) 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (1.1)$$

同樣的道理，對於給定的實數 r, s 如果數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 均為收斂，我們也可利用式子 (1.1) 以及 Theorem 1.1.2(1) 推得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ra_n + sb_n) = r \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + s \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (1.2)$$

例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

例子 1.1.3. 考慮數列 $\langle a_n \rangle$ 其中 $a_n = 2 + \frac{3}{n^2}$ 。由於 $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，所以利用極限乘法性質 (Theorem 1.1.2(2))，可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 又因為常數數列 2 是收斂的，所以由式子 (1.2) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 3 \times 0 = 2$ 。 #

另外當 $b_n = a_n$ 時，數列 $\langle a_n b_n \rangle$ 和 $\langle a_n^2 \rangle$ 是一樣的數列，所以同樣利用 Theorem 1.1.2(2) 我們也可推得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2$ 。同理，這也可推到更高次方，也就是說對任意的正整數 $k \in \mathbb{N}$ ，我們也會有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^k$ 。這對於負整數 $-k$ 也成立嗎？由於 $a_n^{-k} = \frac{1}{a_n^k}$ ，所以由 Theorem 1.1.2(3) 我們知當 $-k$ 為負整數時，只有當 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 時才能確保 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-k} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{-k}$ 。其實，這個性質不只對整數次方成立，對任意的實數次方也成立，所以我們有以下的定理。

Theorem 1.1.4. 給定實數 r ，假設 $\langle a_n \rangle$ 為收斂的數列且 a_n^r 皆有定義。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$ ，則我們有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^r = A^r.$$

又若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則當 $r > 0$ 時 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = 0$ ；而當 $r < 0$ 時數列 $\langle a_n^r \rangle$ 發散。

這裡要提醒一下對於非整數次方 r ，必需 $a_n > 0$ 才能確保 a_n^r 有定義。

再次強調這裡所述的性質的先決條件是數列必需收斂，也就是說若有其中一個數列發散就不適用。不過，當其中有一個收斂，另一個發散，我們依然可以利用前面的性質以及反證法得到一些有趣的結論。比方說若已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂、 $\langle b_n \rangle$ 發散，我們就可用反證法證得 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散。所謂反證法就是假設 $c_n = a_n + b_n$ 是收斂的，然後利用這假設得到矛盾。這就表示 $\langle c_n \rangle$ 是收斂的這個假設是錯的，因此得證 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散。事實上由於 $b_n = c_n - a_n$ ，而我們又已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂，所以如果 $\langle c_n \rangle$ 是收斂的，故由前面所提性質會導致相減的數列 $b_n = c_n - a_n$ 也會收斂。這與已知 b_n 發散相矛盾，所以 c_n 發散。

同樣的想法，如果已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂、 $\langle b_n \rangle$ 發散能否推導出 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散呢？我們依樣畫葫蘆，考慮 $c_n = a_n b_n$ ，並假設 $\langle c_n \rangle$ 收斂，此時由於 $b_n = \frac{c_n}{a_n}$ ，如果 $\langle a_n \rangle$ 不是收斂到 0，前面 Theorem 1.1.2(3) 告訴我們 $\langle b_n \rangle$ 會收斂，這就造成矛盾了。所以在 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 的情況下，我們可以保證 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散。我們把這些結果寫成以下引理 (Corollary)。

Corollary 1.1.5. 假設數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂且數列 $\langle b_n \rangle$ 發散。我們有以下結果：

- (1) 數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散。
- (2) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 則數列 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散。

當兩個數列都是發散，它們之間加減乘除後所得的數列收斂或發散的情況都有可能發生，一般就說這類的極限問題是不定型 (indeterminate form)。我們先看 [BioCalc.] Example 2.1.3 所考慮的數列極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n^2}{5+3n+4n^2}$ 。由於分子、分母都發散（趨近於無限大），所以是不定型，無法用前面極限性質決定其收斂或發散。不過若上下同除以 n^2 ，原數列並未改變，亦即

$$\frac{1+2n^2}{5+3n+4n^2} = \frac{\frac{1+2n^2}{n^2}}{\frac{5+3n+4n^2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2} + 2}{\frac{5}{n^2} + \frac{3}{n} + 4}.$$

這個新的表示法，分子 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + 2) = 2$ 、分母 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{5}{n^2} + \frac{3}{n} + 4) = 4$ ，所以可以套用極限的性質 (Theorem 1.1.2(3))，得到原數列的極限值為 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

習題 1.1. 假設數列 $\langle a_n \rangle$ 發散且數列 $\langle b_n \rangle$ 收斂。考慮 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ 。試利用反證法證明數列 $\langle c_n \rangle$ 發散。

習題 1.2. 上面所提 [BioCalc.] Example 2.1.3 這種不定型的問題其實都可以將分子、分母除以分母的最高次來處理。試用此法說明以下數列是收斂還是發散。

- (1) $\langle \frac{1+2n^2}{5+3n+4n^3} \rangle$ (Hint：分子、分母同時除以 n^3)。
- (2) $\langle \frac{1+2n^3}{5+3n+4n^2} \rangle$ (Hint：分子、分母同時除以 n^2 並利用 **習題 1.1** 的結果)。

習題 1.3. 此題希望能找到例子說明不定型的情況，收斂或發散都有可能。

- (1) 試找到三個發散的數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ ，滿足 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂，但 $\langle a_n + c_n \rangle$ 發散。
- (2) 試找到三個發散的數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ ，滿足 $\langle a_n b_n \rangle$ 收斂，但 $\langle a_n c_n \rangle$ 發散。

習題 1.4. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(17,18,19,22))

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}} \quad b_n = \sin \frac{n\pi}{2} \quad c_n = \cos \frac{n\pi}{2} \quad d_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{n}}.$$

(Hint： $\sqrt{n^3+4n}$ 的最高次項可視為 $n^{3/2}$ ； $\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$ ， $\sqrt[4]{n} = n^{1/4}$)

1.1.1. 等比數列與級數. 等比數列 (geometric sequence) $a, ar, ar^2, \dots$ 是一種常見的數列，它的通式可寫成 $b_n = ar^n$ ，其中 a 成為首項， r 稱為公比。我們要求 a, r 皆為非零實數。

很容易看出等比數列的極限會因 r 而影響。最重要的是當 $r > 0$ 時我們有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < r < 1; \\ 1, & \text{if } r = 1; \\ \infty, & \text{if } r > 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

此時對於實數 a 就可用極限的乘法處理 ar^n 的極限。注意，當 $r > 1$ 時， ar^n 會依 $a > 0, a < 0$ 分別發散到 ∞ 與 $-\infty$ 。另外，當 $r < 0$ 時，我們也可推得當 $-1 < r < 0$ 時 $\lim_{n \rightarrow \infty} ar^n = 0$ ；而當 $r \leq -1$ 時， ar^n 都會發散。我們有以下結論：

Proposition 1.1.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ar^n = \begin{cases} 0, & \text{if } -1 < r < 1; \\ a, & \text{if } r = 1; \\ \pm\infty, & \text{if } r > 1. \\ \text{diverges,} & \text{if } r \leq -1. \end{cases}$$

例子 1.1.7 (BioCalc.). Example 2.1.4 要求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{6^n}$ 。由於 $2, 6 > 1$ 所以 $2^n \rightarrow \infty$, $6^n \rightarrow \infty$ ，原極限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型。不過 $\frac{2^n - 1}{6^n} = (\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{6})^n$ ，所以原數列可看成兩個收斂（因 $0 < r < 1$ ）的等比數列的差，故得極限為 0。 #

和等比數列有關的就是等比級數 (geometric series)。將等比數列 $a, ar, ar^2, \dots$ 的前 $n+1$ 項加起來就稱為前 $n+1$ 項所成的級數，通常我們用 $s_n = \sum_{k=0}^n ar^k$ 來表示。如何將所有的項加起來呢？由於基本上我們只能每次做有限多個加法，無法將無窮多個數加在一起。所以我們會將 s_n 看成新的數列，並以其極限視為將每一項都加起來的值，稱為無窮級數 *infinite series*，用 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ 來表示。由於 $rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1}$ ，可得 $(r-1)s_n = rs_n - s_n = ar^{n+1} - a$ ，故

$$s_n = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (1.4)$$

由式子 (1.4) 以及 Proposition 1.1.6 我們有以下的定理：

Proposition 1.1.8. 考慮首項為 a 公比為 r 的無窮等比級數。

(1) 當 $|r| < 1$ 時，此級數收斂且

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}.$$

(2) 當 $|r| > 1$ 時，此級數發散。

附註：當 $r = 1$ 時，若 $n \rightarrow \infty$ ， $s_n = a + a + \dots + a = (n+1)a$ 會趨近於 $\pm\infty$ ；而當 $r = -1$ 時， $s_n = a - a + \dots$ 會因 n 為奇數、偶數取值在 $a, 0$ 間跳動。所以 $r = \pm 1$ 時，等比級數依然發散。

例子 1.1.9. 循環小數 $0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots$ 可以視為首項為 0.9 公比為 0.1 的無窮等比級數，故由 Proposition 1.1.8 可知此數等於 $\frac{0.9}{1-0.1} = 1$ 。

[BioCalc.] Example 2.1.7 要了解循環小數 $2.3\overline{17}$ 的值。由於

$$2.3\overline{17} = 2.3 + 0.017 + 0.00017 + 0.0000017 + \cdots,$$

我們可以將之視為 2.3 加上首項為 0.017 公比為 0.01 的無窮等比級數，故由 Proposition 1.1.8 得其值為 $\frac{23}{10} + \frac{0.017}{0.99}$ 。 #

習題 1.5. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(10,15,20,24))

$$a_n = \frac{5}{3^n}; \quad b_n = 1 - 0.2^n; \quad c_n = \frac{\pi^{n-1}}{3^n}; \quad d_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}.$$

習題 1.6. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(21,25))

$$r_n = \frac{10^n}{1 + 9^n}; \quad s_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}.$$

Hint: 分子、分母同時除以分母的最大項。 $e \approx 2.718$ 。

習題 1.7. 試將 $1.534\overline{2} = 1.53424242\ldots$ 寫成分數。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1.45)

1.1.2. 遞迴數列. 生命科學上很多問題的模型會用到遞迴數列 (recurrence sequence 或 [BioCalc.] 所稱 difference equation)，基本上，遞迴數列表達的便是前後幾項的關係，例如 $b_{n+1} = rb_n + c$ ，其中 r, c 是給定的實數。如果給定 b_0 ，那麼

$$b_1 = rb_0 + c, \quad b_2 = rb_1 + c = r(rb_0 + c) + c = r^2b_0 + rc + c, \quad (1.5)$$

如此一直下去，便稱為遞迴數列。

[BioCalc.] (Example 2.1.5, 2.1.6) 舉了一個病患每天用藥，藥物在病患身上每天濃度變化情況的模型： $C_{n+1} = 0.3C_n + 0.2$ 。假設病患在用藥前一天（第 0 天）沒有用藥，藥物濃度 $C_0 = 0$ 利用遞迴關係式可得 $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.3 \times 0.2 + 0.2 = 0.26$ ，如此一直下去，觀察此遞迴數列很可能會趨近一定值。我們假設極限存在，遞迴數列有一個很好的方法讓我們決定其極限為何。首先假設極限為 C ，由於 C_{n+1}, C_n 都會趨近於 C 故兩邊取極限得 $C = 0.3C + 0.2$ ，求得 $C = \frac{2}{7}$ 。這個方法求極限很簡單，但要注意它必需是知道數列有極限才使用。若數列極限不存在，用這方法還是可以求出值來，不過這個值絕不是極限，因為極限根本不存在。要怎樣確定這個極限是否存在呢？有時僅由數字可能會干擾我們看出其規律性，我們可以回到原來抽象的遞迴關係式 $b_{n+1} = rb_n + c$ 看出端倪。由式子 (1.5) 繼續下去可得

$$b_3 = rb_2 + c = r(r^2b_0 + rc + c) + c = r^3b_0 + (1 + r + r^2)c.$$

這樣大概可以看出（可用數學歸納法證明）對於一般的 $n \in \mathbb{N}$ ，

$$b_n = r^n b_0 + (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})c = r^n b_0 + \frac{r^n - 1}{r - 1}c.$$

又由 Proposition 1.1.6, 1.1.8 我們知道 b_n 只有在 $|r| < 1$ 時會收斂，此時可得極限為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{c}{1 - r}.$$

前面所提 [BioCalc.] 的例子中 $r = 0.3, c = 0.2$ ，故得極限為 $\frac{2}{7}$ 與前面吻合。

遞迴數列有時是很複雜的，[BioCalc.] Example 1.6.5, 2.1.8 探討了所謂的 *logistic difference equation*: $x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$ ，其中 c 是常數。這是一個常用來探討細胞分裂和昆蟲繁殖的模型。[BioCalc.] Example 2.1.8 舉了 $x_0 = 0.8, c = 2.8$ 以及 $x_0 = 0.4, c = 3.4$ 兩種情況探討。假設這兩種情況都收斂，我們就可用前面的方法，假設收斂到 x 。第一種情況由 $c = 2.8$ ，取極限可得 $x = 2.8x(1 - x)$ ，可解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{1.8}{2.8} = \frac{9}{14}$ 。事實上此情況當 $0 \leq x_0 \leq 1$ 時 x_n 確實收斂：當 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = 1$ 時會收斂到 0；而當 $0 < x_0 < 1$ 時會收斂到 $\frac{9}{14}$ 。至於當 $x_0 < 0$ 或 $x_0 > 1$ 時， x_n 是發散的，我們有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 。第二種情況由 $c = 3.4$ ，取極限可得 $x = 3.4x(1 - x)$ ，故 $x = 0$ 或 $x = \frac{12}{17}$ 。不過這次完全不同，除了 $x_0 = 0, 1$ 會收斂到 0 外，其他情況都是發散的。即使在 $0 < x_0 < 1$ 的情況， x_n 會在接近 0.84 和 0.45 兩處附近跳動。事實上從 $c = 3$ 開始 logistic sequence 就開始會有分歧的情況發生，而且當 c 越大分歧的現象就更多更複雜。有興趣的同學可上網查詢了解。

關於數列極限的性質，最後補充一下 [BioCalc.] 未提到的夾擠定理 (squeeze theorem)。考慮兩個數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 假設對每一項皆有 $a_n \leq b_n$ ，很自然的當 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 的極限分別為 A, B 時，我們可得 $A \leq B$ 。同理若另一數列 $\langle c_n \rangle$ 滿足 $c_n \leq a_n$ 且極限為 C ，我們也會有 $C \leq A$ 。而夾擠定理告訴我們的是如果不知數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限是否存在，但知道數列 $\langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 有相同的極限 L 且滿足 $c_n \leq a_n \leq b_n$ 則 $\langle a_n \rangle$ 的極限必存在且也等於 L 。

例如前面談過 $a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{當 } n \text{ 為奇數;} \\ 2/n, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$ 這個數列，我們可以考慮 $b_n = \frac{2}{n}$ 以及 $c_n = \frac{1}{n}$ 這兩個數列。很明顯的我們有 $c_n \leq a_n \leq b_n$ ，再加上 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ，故知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

習題 1.8. 已知下列初始為 a_0 的遞迴數列收斂，試求其極限。若有多種可能請說明極限應該是哪一個。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(28,31,47))

$$(1) a_0 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{3}.$$

$$(2) a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{6}{1 + a_n}.$$

$$(3) a_0 = 0.1, a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n).$$

習題 1.9. 對於下列初始為 a_0 的遞迴數列，先計算若收斂其極限為何。再利用前幾項的特性說明其為收斂或發散。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(29,32))

$$(1) a_0 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1.$$

$$(2) a_0 = 3, a_{n+1} = 8 - a_n.$$

1.2. 函數的極限

我們將數列極限的概念延伸到函數 (function) 的極限。兩者不同的地方在於，數列極限考慮的是代整數點的趨勢；而函數極限考慮的是代一個區間內所有的點的趨勢。基本上，若要談函數 $f(x)$ 在某一點 a 的極限，我們可以考慮極限為 a 的數列 $\langle a_n \rangle$ (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$) 然

後考慮新的數列 $\langle f(a_n) \rangle$ 。如果對所有這樣的數列， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 都有同樣的極限值，此極限值就是 $f(x)$ 在點 a 的極限。

1.2.1. 基本定義. 函數的極限包括當 x 趨近於無限大時的極限以及 x 趨近於某一點 a 的極限。而趨近於一點的極限，又可分成左極限以及右極限。我們將一一介紹這幾種極限。

1.2.1.1. x 趨近於無限大的極限. 給定一個函數 $f(x)$ 我們經常會需要了解當 x 越來越大時 $f(x)$ 會不會趨近於一個定值。我們的做法是考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ，然後將 x_n 代入 $f(x)$ ，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ 是否趨近於一個定值。不過由於整個實數上的點無法僅由一組數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 表示，所以必需考慮的是所有可能的數列。也就是說：如果對所有這種趨近於無窮大的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於無限大時有極限值 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 。注意這個極限通常也有人會說成 $f(x)$ 在無限大的極限為 L ，這樣的說法有其方便性但不是很正確（因為無限大不是一個點），所以我們盡量避免這種說法。

和數列極限很像， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 表示任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 x 大於某一個數值 M 後，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。例如 [BioCalc.] Example 2.2.1 所討論的 Monod growth function $f(x) = \frac{2x}{5+x}$ （養分濃度 x 與細菌成長率 $f(x)$ 的模型）。當 x 越來越大可得 $f(x)$ 會越來越接近 2。事實上我們可得 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ 。例如，當我們在 2 選取誤差為 0.01，會發現當 $x > 995$ 時 $f(x)$ 都會落在誤差範圍內，即 $1.99 < f(x) < 2.01$ 。

同樣的，我們也可以探討當 x 趨近於負無限大時，函數 $f(x)$ 的極限。也就是說考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ，然後將 x_n 代入 $f(x)$ ，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ 是否趨近於一個定值。如果對所有這種趨近於負無窮大的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於負無限大時有極限值 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 。此時，任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 x 小於某一個數值 M 後，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。

例子 1.2.1. [BioCalc.] Example 2.2.3。很容易看出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 以及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。如果我們在 0 考慮 0.001 的誤差範圍，會發現當 $x > 1000$ 時 $0 < \frac{1}{x} < 0.001$ ；而當 $x < -1000$ 時 $-0.001 < \frac{1}{x} < 0$ 。 #

當函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 時，函數圖形 $y = f(x)$ 有一個特點，也就是當 x 沿著 x 軸往外（即正無限大或負無限大的方向）移動時，圖形會越來越接近於水平直線 $y = L$ 。也因此，此時我們稱圖形 $y = f(x)$ 有“水平漸近線”（horizontal asymptote）。例如由例子 1.2.1 我們知 $y = 0$ （即 x 軸）為 $y = \frac{1}{x}$ 的水平漸近線。注意若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K$ 其中 $K \neq L$ ，則 $y = f(x)$ 會有 $y = L$ 以及 $y = K$ 這兩條水平漸近線。

當函數 $f(x)$ 在 x 趨近於無限大時沒有極限，我們便說 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ “不存在”或“發散”。同樣的，若 $f(x)$ 在 x 趨近於負無限大時沒有極限，我們便說 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ “不存在”或“發散”。怎樣判斷 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ “不存在”呢？如果找到數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 不存在，當然 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 就不存在。例如 $f(x) = x$ 的情形，我們選 $x_n = n$ ，就知當 $n \rightarrow \infty$ 時 $f(x_n) = x_n = n$ 極限不存在，所以此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 就不存在。另一種情況是找到兩

組趨近於無窮大的數列代入 $f(x)$ ，卻得到不同的極限。例如 [BioCalc.] Example 2.2.7 舉了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 這個極限不存在的例子。雖然我們將 $x_n = n\pi$ 這個數列代入 $\sin x$ 會得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0.$$

但若代 $x_n = \frac{n\pi}{2}$ 同樣有 $x_n \rightarrow \infty$ ，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 極限就不存在了。同樣的看法，我們也可知道 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ 不存在。

有一種極限不存在的情況和數列極限的一樣，我們會表示出來，也就是會趨近於正負無限大的情形。換句話說當 x 趨近於無限大時，若 $f(x)$ 的值也趨近於無窮大或負無窮大，我們就會分別用 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 表示。同理，當 x 趨近於負無限大時，如果 $f(x)$ 的值也趨近於無窮大或負無窮大，我們就會分別用 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 表示。例如 [BioCalc.] Example 2.2.9 我們有 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ 。我們也很容易看出 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty$ 。發散到正負無限大的狀況，有時在處理極限的問題時很有幫助，千萬不要因為極限不存在而忽視它。

1.2.1.2. 給定點的單邊極限。 我們先探討在某一點所謂“單邊極限” (*one-sided limit*)，再利用它來定義在該點的極限。一般來說，對一個函數 $f(x)$ ，我們會有興趣知道 x 在點 a 的右側逼近 a 時， $f(x)$ 變化的趨勢。所以我們考慮所有可能極限為 a 的數列 $\langle x_n \rangle$ ，其中 x_n 皆大於 a ，若所有這樣的數列皆滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 的極限都是 L ，我們便稱當 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 的“右極限” (*right-hand limit*) 為 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 。也可說當 x 從右邊趨近於 a 時， $f(x)$ 的極限為 L 。同樣的，我們也可考慮 x 從 a 的左邊逼近 a ，然後看 $f(x)$ 的極限是否存在。也就是說，考慮數列 $\langle x_n \rangle$ ，其中 x_n 皆小於 a 且 $x_n \rightarrow a$ 。若所有這樣的數列皆滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 的極限都是 L ，我們便稱當 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 的“左極限” (*left-hand limit*) 為 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 。也可說當 x 從左邊趨近於 a 時， $f(x)$ 的極限為 L 。

最常探討單邊極限的情況是所謂的分段函數（即函數在不同區域用不同的方法定義），以下例子是 [BioCalc.] 的 Example 2.3.7，這個函數是描述物種災難性滅絕的模型。

例子 1.2.2. 考慮某一物種的數量函數

$$N(K) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq K < a; \\ K, & \text{if } K \geq a. \end{cases}$$

這裡 a 是一個給定的正數。 K 代表的是棲息環境的素質， $N(K)$ 代表數量。此模型表示當環境夠好（即 $K \geq a$ ），數量便會隨著 K 增長；而環境變差（即 $K < a$ ），數量便會災難性滅絕歸於零。從 [BioCalc.] Example 2.3.7 所附 $N(K)$ 的圖形 (Figure 8)，我們可以看出當 K 從 a 的右邊漸漸靠近 a ，其極限會是 a （例如考慮數列 $K_n = a + \frac{1}{n}$ ，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = a$ ），這種情況我們就會用 $\lim_{K \rightarrow a^+} N(K) = a$ 來表示；然而當 K 從 a 的左邊漸漸靠近 a ，其極限會是 0 （例如考慮數列 $K_n = a - \frac{1}{n}$ ，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ ），因此可得 $\lim_{K \rightarrow a^-} N(K) = 0$ 。 #

當 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的左右極限趨近於正、負無限大時，我們依然會把它標示出來。分別用

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad (1.6)$$

表示。只要這四種其中一個成立，表示 x 從某一邊越來越接近 a 時，圖形會越來越接近於鉛直直線 $x = a$ 。因此，此時圖形 $y = f(x)$ 會有“鉛直漸近線”(vertical asymptote)。簡言之，當我們要說明函數圖形 $y = f(x)$ 有鉛直漸近線 $x = a$ 只要檢查式子 (1.6) 其中一個成立即可。例如函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，我們有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ 。從圖形來看，確實 $x = 0$ 為 $y = \frac{1}{x}$ 的鉛直漸近線。常用對數函數 $f(x) = \log x$ ，由於在 $x \leq 0$ 沒有定義，所以我們不能探討 $\log x$ 在 $x = 0$ 的左極限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \log x$ ，但能探討 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$ 。由於 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ ，所以 $x = 0$ 也是 $y = \log x$ 的鉛直漸近線。

1.2.1.3. x 趨近於給定點的極限。 我們接著談當 x 趨近於某一定值 a ，函數 $f(x)$ 的極限。同樣的，我們可以考慮所有趨近於 a 的數列 $\langle x_n \rangle$ 然後代入 $f(x)$ 考慮 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 。注意因為 $f(x)$ 在 a 的極限關心的是 $f(x)$ 在 a 附近的趨勢，而不是 a 這一點的取值，所以考慮的數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 其中 x_n 都避開 a 。如果對所有趨近於 a 的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 時有極限值 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。這個極限通常也有人會說成 $f(x)$ 在 a 的極限為 L ，這樣的說法有其方便性但容易造成誤解，因為如前所述，這個極限定義與 $f(x)$ 在 $x = a$ 的取值無關（即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 沒有定義也沒關係）。所以我們盡量避免這種說法。

從這種極限看法， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 表示任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 $x \neq a$ 但與 a 夠靠近時，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。例如考慮 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 。此時 $f(x)$ 在 $x = 1$ 是沒有定義的（因為分母會等於 0）；不過只要 $x \neq 1$ ，則皆有定義且因為 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ，此時會有 $f(x) = x + 1$ （例如 $f(1.01) = \frac{0.0201}{0.01} = 2.01$ ）。因此 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$ 。例如，當我們在 2 選取誤差為 0.01，會發現當 $x \neq 1$ 且與 1 在 0.01 的誤差範圍時（即 $0.99 < x < 1.01$ ）皆會滿足 $1.99 < f(x) = x + 1 < 2.01$ 。這個例子也告訴我們，對於函數在 x 趨近於 a 的極限，其在 a 的取值不重要，重點在於在 a 附近的取值。

當然了，有可能當 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 的極限不存在。[BioCalc.] Example 2.3.5 舉了 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ 不存在這個例子。雖然 $x_n = \frac{1}{n}$ 這個數列滿足 $x_n \rightarrow 0$ ，我們將 x_n 代入 $\sin \frac{\pi}{x}$ 會得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0$ 。但若代 $x_n = \frac{2}{n}$ 同樣有 $x_n \rightarrow 0$ ，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 極限就不存在了。事實上從 [BioCalc.] Example 2.3.5 的附圖 Figure 7 顯示函數 $\sin \frac{\pi}{x}$ 的圖形，在 $x = 0$ 附近是震盪很厲害的。

前面討論單邊極限的好處是，它可以幫助我們確認極限的存在性。當然了只要函數在任一邊趨近 a 的極限不存在，則該函數趨近 a 的極限自然不存在。然而，即使函數在任一邊趨近 a 的極限存在，但極限不同，則依極限定義，該函數趨近 a 的極限仍不存在。不過若函數兩邊趨近 a 的極限都存在且都等於 L ，當然此函數趨近 a 的極限就是 L 。所以我們

有以下結論：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x). \quad (1.7)$$

這裡 $\Leftrightarrow$ 一般稱為“若且唯若”(if and only if)。這個符號表示如果一邊是對的那麼另一邊也會對。也就是說兩邊會同時成立或同時不成立。

例子 1.2.3. [BioCalc.] Example 2.4.8 探討絕對值函數 $|x|$ 當 x 趨近於 0 的極限 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ 。若從左右極限觀點來看，當 $x \rightarrow 0^+$ 表示 x 皆大於 0，故此時 $|x| = x$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

然當 $x \rightarrow 0^-$ 表示 x 皆小於 0，故此時 $|x| = -x$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0.$$

所以由式子 (1.7) 的若且唯若（或稱“等價關係”）可知 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 。

[BioCalc.] Example 2.4.9 探討極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 。若從左右極限觀點來看，當 $x \rightarrow 0^+$ 表示 x 皆大於 0，故此時 $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

然當 $x \rightarrow 0^-$ 表示 x 皆小於 0，故此時 $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

所以式子 (1.7) 的右式不成立（即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ ），故由等價關係告訴我們左式也不成立，也就是說 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在。 $\#$

同前，當 x 趨近於 a ，但函數 $f(x)$ 趨近於正、負無限大的情形，雖然極限不存在我們仍會分別用 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 表示。例如 [BioCalc.] Example 2.3.9 我們有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ 。同理，我們也知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ 。

再次強調，當 x 趨近於 a 函數發散到正負無限大的狀況，有時在處理極限的問題時很有幫助，千萬不要因為極限不存在而忽視它。

習題 1.10. 令 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 。由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ 。

(1) 試寫下函數圖形 $y = f(x)$ 的水平漸近線以及鉛直漸近線。

(2) 考慮誤差範圍 0.01，試找到 L, S 使得當 $x > L$ 以及 $x < S$ 時都分別會滿足 $0.99 < f(x) < 1.01$ 。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.2.36.)

習題 1.11. 做 [BioCalc.] Exercise 2.3.6, 2.3.9.

習題 1.12. 試利用 $x < 0$ 時 $|x| = -x$ 說明 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) = -\infty$ 以及 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x} = 1$ 。

(取自 [BioCalc.] Exercise 2.4.35, 2.4.36.)

習題 1.13. 令 $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$ 。試利用 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ 求 $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ ，並說明 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 是否存在。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.4.37.)

1.2.2. 極限的性質與技巧. 了解函數極限的定義後，我們就可以探討極限的性質。這些性質都可以很方便讓我們求出極限，我們會利用這些性質探討一些求函數極限的技巧。

前面我們知道函數的極限都可以用數列的極限來表示，所以數列極限的性質，當然都可以套用在函數的極限上。由於我們探討的函數極限有許多種，為了方便起見我們都用 $\lim$ 來表示。也就是說，我們介紹的性質都適用於前面介紹過的 x 趨近於 ∞ 、 $-\infty$ 、 a 、 a^+ 、 a^- 的函數極限。不過要注意，在同一等式中當然是同一個趨近的形式。利用數列極限的性質 Theorem 1.1.2，我們有以下的性質：

Theorem 1.2.4. 假設函數 $f(x), g(x)$ 其極限 $\lim f(x), \lim g(x)$ 皆存在，則

- (1) $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$.
- (2) $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.
- (3) 當 $\lim g(x) \neq 0$ 時， $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

此定理的 (1)、(2)、(3) 分別稱為極限的加法性質、乘法性質、除法性質。同之前數列極限 (式子 (1.2)) 利用加法與乘法性質，我們也有函數極限的線性性質

$$\lim(rf(x) + sg(x)) = r \lim f(x) + s \lim g(x), r, s \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

例如，因為 $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ ，利用乘法性質，我們有 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ 。所以由線性性質可得

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x) = 2 \times 9 - 3 = 15.$$

從這裡我們可以知道，當 $f(x)$ 是一個多項式，則對任意的實數 a ， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

Theorem 1.2.4(3) 除法性質中分母 $g(x)$ 極限為 0 的情況被排除在外，因為此時 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 有可能無法馬上確定。接下來我們來探討這種分母趨近於 0 情況。其中最令人困擾的就是分子也趨近於 0，即 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ 的情形。這就是前面數列極限談過的不定型。以後我們還會探討許多不定型，目前這一種不定型，我們用 $\frac{0}{0}$ 來表示。稱之為不定型就是因為其極限各種可能都會發生，其極限值取決於分子、分母趨近於 0 的“速度”，因此要進一步處理才能確定。例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$ 都是 $\frac{0}{0}$ 不定型。因為 x^2 趨近於 0 的速度比 x 快，前者 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$ 極限為 0；後者 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$ 極限不存在。

至於分子極限不是 0，即 $\lim f(x) \neq 0$, $\lim g(x) = 0$ 的情形，我們可以馬上確定 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的極限不存在。事實上此時可得 $\lim \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$ ，也就是說函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 取絕對值的話，其極限會無窮大。不過若去掉絕對值，我們就得依在求極限的附近其正負的情況，判斷會是 ∞ 、 $-\infty$ 或都不是。有時為了方便，我們會用 $\frac{1}{0}$ 來表示這種極限（分子寫成 1，僅為了表示

其不為 0)。由於這種極限確定一定不存在，所以它「不是」不定型的極限。不過要記得 $\left|\frac{1}{0}\right| = \infty$ ，所以 $\frac{1}{0}$ 這種極限有可能是 ∞ 、 $-\infty$ 或都不是。

例子 1.2.5. 首先考慮 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2}$ 。由於當 x 趨近於 0 時， $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1 \neq 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ，所以我們馬上知道此為 $\frac{1}{0}$ 型的極限，故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x-1}{x^2} \right| = \infty$ 。接著便要討論其正負。由於當 x 趨近於 0（但不等於 0）時 $x-1$ 會是負的，而 x^2 會是正的，所以此時 $\frac{x-1}{x^2}$ 小於 0。因此推得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$ 。

同樣的，我們有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x-1}{x} \right| = \infty$ 。但當 x 趨近於 0 時 x 有正有負，故只能說 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}$ 不存在。事實上當 x 從 0 的右邊趨近於 0 時， x 是正的，但 $x-1$ 是負的，所以我們有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$ ，同理可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \infty$ 。

不論如何，函數圖形 $y = \frac{x-1}{x^2}$ 和 $y = \frac{x-1}{x}$ 都有一條鉛直漸近線 $x = 0$ 。 #

Theorem 1.2.4 只適用於兩個函數極限都存在的情形。之前談過兩個數列有任一各極限不存在的極限性質，對於函數依然適用。由於函數極限不存在的情形，我們依然對於是否趨近於 ∞ 或 $-\infty$ 有興趣，所以這裡我們特別把這些狀況的函數極限整理出來。不過因為情況很多，千萬不要用“背”的死記下來，應該盡量理解。重點放在判別是否為不定型的情況，若是不定型再額外處理。我們先看加（減）法的情形。

首先考慮 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ ，而函數 $g(x)$ 其極限不存在且 $\lim g(x) = \infty$ 的情況。此時對於 $\lim(f(x) + g(x))$ 以及 $\lim(f(x) - g(x))$ ，我們可以分別用一個固定的數 L 加、減很大很大的數的想法去理解，即 $L + \infty = \infty$ 和 $L - \infty = -\infty$ ，得到 $\lim(f(x) + g(x)) = \infty$ 以及 $\lim(f(x) - g(x)) = -\infty$ 。

同樣的，對於 $f(x)$ 和 $g(x)$ 極限都不存在且都趨近於 ∞ 的情形，它們相加就可以想成 $\infty + \infty = \infty$ ，所以此時 $\lim(f(x) + g(x)) = \infty$ 。不過對於 $f(x) - g(x)$ 就是所謂 $\infty - \infty$ 這種不定型的極限。例如 $f(x) = x + 5$ ， $g(x) = x$ 此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 5$ 。從這例子可看出 $\infty - \infty$ 這種不定型其極限可以是任何的實數；另一方面，考慮 $f(x) = 2x$ ， $g(x) = x$ ，此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ ，其極限不存在。所以 $\infty - \infty$ 確為不定型的極限。

接下來我們看乘法的情形。對於 $f(x)$ 和 $g(x)$ 極限都不存在且都趨近於 ∞ 的情形，它們相乘可以用 $\infty \cdot \infty = \infty$ 來簡化說明，所以很容易理解會有 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \infty$ 。同理當 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ ，而 $\lim g(x) = \infty$ 的情況。此時當 $L > 0$ 時 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \infty$ ；而若 $L < 0$ 則 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = -\infty$ 。不過對於 $L = 0$ 的情況就要特別注意了。也就是當 $\lim f(x) = 0$ ， $\lim g(x) = \infty$ 時，極限 $\lim(f(x) \cdot g(x))$ 就無法馬上確定了。這種情況就是所謂 $0 \cdot \infty$ 的不定型。例如 $f(x) = x$ ， $g(x) = \frac{1}{x^2}$ 的情形，此時 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ ，而 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 極限不存在。另一方面當 $f(x) = 3x^2$ ，此時依然有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ ，但是 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$ 。從這些例子，我們知道 $0 \cdot \infty$ 的極限有可能是任意的實數；也有可能不存在，所以它是不定型。

最後我們來談除法的情形。一般來說除法可以看成乘法來處理，也就是說將 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 看成 $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ 。例如若 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ ，而函數 $g(x)$ 其極限不存在且 $\lim g(x) = \infty$ 的情況。此時我們就可以將 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 視為 $L \cdot \frac{1}{\infty} = 0$ 。同理在 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = L$ 的情況，我們可以將 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 視為 $\infty \cdot \frac{1}{L}$ ，所以極限不存在。注意這裡即使 $L = 0$ 依舊成立，也就是說 $\frac{0}{\infty}$ 和 $\frac{\infty}{0}$ 都「不是」不定型。 $\frac{0}{\infty}$ 會趨近於 0，而 $\frac{\infty}{0}$ 會發散。唯有 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = \infty$ 的情形會有問題，此時可以將 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 視為 $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ ，故可視為 $\infty \cdot 0$ 的不定型。所以 $\frac{\infty}{\infty}$ 也是不定型。例如當 $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ ，我們有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ，此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ ；然而當 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ ，雖然依然 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ，但此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x = \infty$ ，極限不存在。從這些例子，我們知道 $\frac{\infty}{\infty}$ 的極限有可能是任意的實數；也有可能不存在，所以它是不定型。

我們這裡談論的是函數之間加、減、乘、除，四則運算的極限問題。在求極限過程中，若極限不是不定型的情形，很快的便能求得其極限或是知道極限不存在。所以能分辨是否為不定型的極限很重要。目前函數四則運算的極限不定型的形式有 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $0 \cdot \infty$ 以及 $\infty - \infty$ 四種（將來談指數型函數時，還會有 1^∞ 、 ∞^0 以及 0^0 三種不定型的極限）。前面我們都是用簡單的例子說明不定型的極限，其實不定型極限問題有些可能很棘手。目前我們可以處理的方式是利用代數的方法將其化為非不定型的極限來處理。將來學了微分可用更有效率的方法（即 L'Hospital's Rule）處理。所以目前不必太過擔心不定型的極限問題。以下我們舉一些 [BioCalc.] 的例子供大家參考：

例子 1.2.6. [BioCalc.] Example 2.4.3, 2.4.5, 2.4.6 分別舉了三個 $\frac{0}{0}$ 不定型的例子

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}.$$

處理 $\frac{0}{0}$ 不定型的極限，目前的方法就是利用代數的方法（例如上下同時除以分母為 0 的因式）將原式改寫成非不定型的形式再求極限。所以將 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ 除掉 $x-1$ 的因式可得 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$ 。同理 $(3+h)^2 - 9 = 6h + h^2$ 所以 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6$ 。而 $\sqrt{t^2 + 9} - 3 = \frac{t^2 + 9 - 9}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$ ，所以 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{6}$ 。

[BioCalc.] Example 2.2.4、2.2.5 以及 2.2.11 討論的極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{5+N}$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t}{1+4t^2}$ 以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$ 都是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型的極限。上下分別除以分母中趨近於 ∞ 的最大項 N 、 $4t^2$ 以及

$-x$ ，可得非不定型的極限形式（分母極限都是 1）：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{5}{N} + 1}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{4t^2} + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-1}{\frac{-3}{x} + 1},$$

進而得到極限分別為 2、0 以及 $-\infty$ 。

#

$\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 是不定型的基本形式其餘的不定型一般來說都是化成這兩種形式再處理。例如 $0 \cdot \infty$ 的情形，我們可以將 ∞ 看成 $\frac{1}{0}$ ，所以可以將 $0 \cdot \infty$ 化成 $0 \cdot \frac{1}{0}$ 的形式，亦即看成 $\frac{0}{0}$ 的不定型來處理。同理也可以將 0 看成 $\frac{1}{\infty}$ ，所以可以將 $0 \cdot \infty$ 化成 $\frac{1}{\infty} \cdot \infty$ 的形式，亦即看成 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型來處理。至於處理不定型 $\infty - \infty$ 的極限問題，通常也是利用代數的方法將之化為非不定型的形式就可求出其極限了，我們看以下例子：

例子 1.2.7. [BioCalc.] Example 2.2.10, 2.2.6 分別舉了 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ 這兩個例子，都是 $\infty - \infty$ 這種不定型的極限。由於 $x^2 - x = x(x - 1)$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot (x - 1)]$ 可視為 $\infty \cdot \infty$ 這個非不定型的極限，得到其極限為 ∞ 。而 $\sqrt{x^2 + 1} - x$ 為了去掉根號，可以改寫成

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}. \quad (1.9)$$

由於 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ 是 $\infty + \infty$ 形式，其極限為 ∞ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

可視為 $\frac{1}{\infty}$ 這個非不定型的極限，得到其極限為 0。

#

另外還有一種求函數極限的方式，就是前面數列極限也談論過的夾擠定理（squeeze theorem）。首先大家應該不難理解，若兩函數 $f(x), g(x)$ 當 x 在要討論極限的附近，都滿足 $f(x) \leq g(x)$ ，且 $f(x), g(x)$ 的極限值存在，則會有 $\lim f(x) \leq \lim g(x)$ 。這裡所謂“附近”指的是：如果是 x 趨近於無窮大情形，“附近”表示的是當 x 大於某個數（例如大於 10000）時都滿足 $f(x) \leq g(x)$ ；而如果是 x 趨近於某個實數 a 的情形，“附近”表示的是當 $x \neq a$ 但在包含 a 的某個開區間內（例如 $a = 3$ 時 $x \in (2.99, 3) \cup (3, 3.01)$ ）都滿足 $f(x) \leq g(x)$ 。在 x 趨近於負無窮大和左、右極限的情況，也是同樣的看法。另外要注意即使在求極限的附近，都滿足 $f(x) < g(x)$ 也僅能推出 $\lim f(x) \leq \lim g(x)$ 未必會有 $\lim f(x) < \lim g(x)$ 。例如考慮 $f(x) = -\frac{x^3}{x}$, $g(x) = \frac{x^3}{x}$ ，我們知道 $f(x), g(x)$ 在 $x = 0$ 沒有定義，不過雖然在 $x = 0$ 附近皆有 $f(x) = -x^2 < g(x) = x^2$ ，但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 。因為 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$ 而且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 。所以切記在取極限時，不等式一定要加上等號。同理，如果另一個函數 $h(x)$ 當 x 在要討論極限的附近，都滿足 $h(x) \leq f(x)$ ，且 $h(x)$ 的極限值存在，則會有 $\lim h(x) \leq \lim f(x)$ 。也就是說此時 $\lim h(x) \leq \lim f(x) \leq \lim g(x)$ 。夾

擠定理談的是 $\lim h(x) = \lim g(x)$ 這種特殊情況，此時不需假設 $\lim f(x)$ 存在，也能確保 $\lim h(x) = \lim f(x) = \lim g(x)$ 。夾擠定理正確的敘述如下：

Theorem 1.2.8 (Squeeze Theorem). 對於函數 $f(x)$ ，若存在兩函數 $g(x), h(x)$ 滿足當 x 在要討論極限的附近，都符合 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $\lim h(x) = \lim g(x) = L$ ，則 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ 。

夾擠定理的意義在於，當我們不知函數 $f(x)$ 的極限是否存在，但認為它存在時。可以嘗試找兩個函數 $g(x), h(x)$ 滿足當 x 在要討論極限的附近，都符合 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $g(x), h(x)$ 有相同的極限 L 。此時便可確認 $f(x)$ 的極限存在。而且既然 $f(x)$ 的極限存在，就可以由前面所提的 $L = \lim h(x) \leq \lim f(x) \leq \lim g(x) = L$ ，確定 $\lim f(x) = L$ 。我們看一下 [BioCalc.] Example 2.4.10 有關夾擠定理的例子。

例子 1.2.9. 考慮 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ，我們要探討極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。首先注意，我們已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在，且極限不是 ∞ 也不是 $-\infty$ 。所以目前這個極限，無法用前面談論四則運算的極限性質處理。由於對於任意實數 θ 皆有 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ，因此對於 0 附近的點 x （注意 $x \neq 0$ ）皆滿足 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ，又由於 $x^2 > 0$ 所以這個不等式乘上 x^2 可得 $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$ 。現若考慮 $g(x) = x^2, h(x) = -x^2$ 對於 0 附近的點 x ，皆會滿足 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。

#

習題 1.14. 先說明以下是哪一些類型的極限。若不是不定型直接說明其極限值或不存在；若是不定型，請化成非不定型說明其極限值或不存在。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{5}{10^r}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{3 + e^{-2x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 2.2(12, 19, 24, 26); 2.4(14, 19, 22)）

習題 1.15. 假設考慮兩函數 $f(x), g(x)$ 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 。試利用極限乘法性質說明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，並依此處理以下問題：

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 。

(2) 試求 a 使得 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + 2x - 2}$ 極限存在，並求此極限值。

（取自 [BioCalc.] Exercise 2.4.49, 2.4.51）

1.3. 連續函數

我們將介紹連續函數 (*continuous function*) 以及知道一個函數是連續的之後, 如何幫助我們處理函數的極限問題。雖然連續在意義上是接續不斷的, 但連續函數的定義是先定義在一個點的連續。若一個函數在一個區間中的每一個點都連續, 才會稱此函數為這個區間的一個連續函數。

給定一個點 a , 我們先定義何謂在點 a 連續的函數。首先觀察函數 $f(x)$ 若在 $x = a$ 沒有定義, 則 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 的位置沒有點對應在其圖形上, 所以圖形好像在 $x = a$ 之處斷掉似的, 我們當然不會認為 $f(x)$ 在此點連續。另一方面如果當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限不存在 (例如趨近於 ∞ 或左右極限不同), 表示在 a 的附近函數圖形無法靠攏, 我們當然也會認為 $f(x)$ 在此點不連續。最後即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 有定義, 且當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限存在且極限值為 L , 但 $L \neq f(a)$ 。這表示雖然函數圖形在 a 的附近都往 L 靠攏但在 $x = a$ 突然跳開了, 此時我們仍然認為函數 $f(x)$ 在點 a 不連續。綜合以上, 在排除了我們認為在點 a 不連續的看法後, 我們有以下函數在點 a 連續的定義。

Definition 1.3.1. 給定一實數 a , 考慮函數 $f(x)$, 若以下三個條件 $f(x)$ 皆滿足, 則稱 $f(x)$ 在 a 點連續。

- (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 時有定義。
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

例如對於實數 a , 我們有 $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, 所以依極限乘法性質, 對於任意 $m \in \mathbb{N}$ 皆有 $\lim_{x \rightarrow a} x^m = a^m$ 。也因此對於一個多項式 $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$, 利用極限線性性質 (式子 (1.8)), 我們有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0] = c_n (\lim_{x \rightarrow a} x^n) + \cdots + c_1 (\lim_{x \rightarrow a} x) + c_0 = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a).$$

所以多項式函數在任何實數點 a 都是連續的。

當 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的極限存在, 但 $f(x)$ 在 a 點不連續, 表示 $f(x)$ 在 $x = a$ 時無定義, 或是 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ 。此時這種不連續性稱為 *removable discontinuity* (可去除的), 因為若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 我們只要重新定義 $f(x)$ 在 $x = a$ 的值為 L 即可讓 $f(x)$ 在 a 點連續。也就是說談連續性, 極限的存在性還是最重要的。例如 [BioCalc.] Example 2.4.3 考慮的函數 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 是沒有定義的, 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不連續。但因為 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$, 如果我們定義 $f(1) = 2$, 就會使得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 是連續的。換言之, $f(x)$ 除了 $x = 1$ 以外, 其餘在 1 附近的點, 其取值與 $x + 1$ 是一樣的, 而只要更動 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的取值就能讓它和 $x + 1$ 一樣在 $x = 1$ 連續, 所以我們說函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的不連續性是 removable。

至於函數 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的極限不存在的情形, 也有兩種特別的情況經常被探討。一種是 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, 這種在 a 點的不連續性稱為 *infinite discontinuity*;

另一種是 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ，這種在 a 點的不連續性稱為 *jump discontinuity*。在 jump discontinuity 的情形，如果恰有 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ 的情形發生，我們便稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的左端連續；而若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的右端連續。例如在例子 1.2.3 ([BioCalc.] Example 2.4.9) 我們討論過 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的情形。我們知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的不連續性屬於 jump discontinuity。雖然此函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 無定義，不過當初若定義 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的值為 -1 (即 $f(0) = -1$)，則 $f(x)$ 就會在 $x = 0$ 的左端連續。當然了若定 $f(0) = 1$ ，則 $f(x)$ 就會在 $x = 0$ 的右端連續。不過，不管怎樣重新定義 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的值，都無法去除其在 $x = 0$ 的不連續性，所以 jump discontinuity 不會是 removable。

函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的連續性既然是用它在 x 趨近於 a 的極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 來定義，很自然的連續和極限有同樣的性質。利用 Theorem 1.2.4，我們有以下連續的性質。

Theorem 1.3.2. 假設函數 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 都是連續的，則

- (1) $f(x) + g(x)$ 在 $x = a$ 連續。
- (2) $f(x) \cdot g(x)$ 在 $x = a$ 連續。
- (3) 當 $g(a) \neq 0$ 時， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = a$ 連續。

不難理解在除法時要排除 $g(a) = 0$ 的情況，不只因為分母極限為 0 極限除法性質不適用，事實上當 $g(a) = 0$ 時，函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = a$ 無定義，當然就不連續了。例如 [BioCalc.] Example 2.5.5 考慮有理函數 (即兩個多項式相除，英文稱為 rational function) $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ 。若令 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ， $g(x) = 5 - 3x$ ，由於 $f(x), g(x)$ 都是多項式，我們知道它們在任意的點都是連續的。然而 $g(\frac{5}{3}) = 0$ ，所以 $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ 在 $x = \frac{5}{3}$ 不連續。不過由於 $g(x) = 5 - 3x$ 在 $x \neq \frac{5}{3}$ 時都不等於 0，所以由 Theorem 1.3.2 (3) 知道 $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ 在 $\frac{5}{3}$ 以外的點都是連續的。

當一個函數在一個區間 I 上的所有的點都連續時，我們便稱此函數為在 I 上的連續函數。不過要注意，如果這個區間是包含端點的情況，例如 $I = [a, b]$ ，則函數不止要在開區間 (a, b) 內所有的點連續，還要在 a 的右端連續，以及 b 的左端連續，才能說在區間 $[a, b]$ 連續。當函數 $f(x)$ 在區間 I 是連續且不是常數時，很容易理解 $f(x)$ 會把 I 上面的點連續沒有斷點送到另一個區間 J 。此時我們稱當 $f(x)$ 定義在 I 時其值域為 J 。因為沒有間斷，所以若 $a, b \in I$ ，則對任意介於 $f(a), f(b)$ 之間的點 d ，我們都可以找到 c 介於 a, b 之間滿足 $f(c) = d$ 。這稱為連續函數的中間值定理 (intermediate value theorem)。例如 [BioCalc.] Example 2.5.10 考慮函數 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ ，我們知道多項式函數在實數上處處連續。若定義在區間 $[1, 2]$ ，由於 $f(1) = -1$ ， $f(2) = 12$ ，因此 $f(x)$ 的值域會包含 $[-1, 12]$ 這個區間。又因 0 介於 $-1, 12$ 之間，所以我們可以在 $1, 2$ 之間找到一點 c 使得 $f(c) = 0$ 。

我們可以將 Theorem 1.3.2 關於在一點連續函數的四則運算，推廣到以下在區間連續函數的四則運算。

Theorem 1.3.3. 假設函數 $f(x), g(x)$ 在區間 I 都是連續的，則

- (1) $f(x) + g(x)$ 在 I 連續。
- (2) $f(x) \cdot g(x)$ 在 I 連續。
- (3) 當 $g(x)$ 滿足對所有 $a \in I$ 皆有 $g(a) \neq 0$ 時， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 連續。否則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 僅在 I 中滿足 $g(a) = 0$ 的點 a 不連續。

有了 Theorem 1.3.3 我們就可利用一些已知的連續函數得到更多的連續函數。首先我們來看幾個基本的在整個實數上連續的函數。前面已經提過，若 $f(x)$ 為多項式函數，則對於任意實數 a 皆有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，也就是說多項式函數在任意的實數點都連續，所以它是在整個實數連續的函數。多項式相加與相乘當然還是多項式，所以 Theorem 1.3.3 的 (1), (2) 沒有問題。至於相除的情況，若 $f(x), g(x)$ 都是多項式且 $g(x)$ 不為零多項式，則 Theorem 1.3.3 (3) 告訴我們，有理函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 只有在有限多個點不連續，因為 $g(x) = 0$ 只有有限多個實數解。我們看以下的例子。

例子 1.3.4. 考慮有理函數 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 。由於 $x^2-1=0$ 只有兩個實數解 $x=-1$ 和 $x=1$ ，所以我們知 $f(x)$ 僅在 $-1, 1$ 兩點不連續。由於 $x \rightarrow -1$ 時，分子趨近於 -2 而分母趨近於 0 ，這是 $\frac{1}{0}$ 型的極限，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 的不連續性屬於 infinite discontinuity ($x=-1$ 會是 $y=f(x)$ 的鉛直漸近線)。而在 $x \rightarrow 1$ 時，分子、分母都趨近於 0 ，這是 $\frac{0}{0}$ 的不定型。分子分母同除 $x-1$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 的不連續性屬於 removable discontinuity。注意 $x=1$ 不會是 $y=f(x)$ 的鉛直漸近線。

另一種常見在整個實數連續的函數，就是三角的正弦函數 $\sin x$ 與餘弦函數 $\cos x$ 。回顧一下正餘弦函數的定義，在坐標平面的單位圓上從點 $(1, 0)$ 移動 x 弧長（逆時鐘為正、順時鐘為負），所在的點其 x -坐標為 $\cos x$ 、而 y -坐標就是 $\sin x$ 。從點在單位圓的移動，我們觀察其 x -坐標、 y -坐標的變化是連續不斷的，所以可以由此理解 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是實數上的連續函數。而 $\tan x$ 由於其定義為 $\frac{\sin x}{\cos x}$ ，所以由連續函數除法性質知， $\tan x$ 在 $\cos x \neq 0$ 的點（即 $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ ）都是連續的。以後我們也常會用到 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 、 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 以及 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ 這些三角函數。從除法性質，我們知道 $\sec x$ 連續的點和 $\tan x$ 一樣；而 $\csc x$ 與 $\cot x$ 都在 $\sin x \neq 0$ 的點（即 $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ ）都是連續的。

還有一種在實數上連續的函數，就是所謂的指數函數 (exponential function)。給定一正實數 b ，我們稱 $f(x) = b^x$ 為以 b 為底 (base) 的指數函數。我們簡單說明一下其定義。當 x 為正整數 n 時， $f(n) = b^n$ 就是把 n 個 b 乘在一起。我們也可定義 $f(\frac{1}{n}) = b^{1/n} = c$ 就是滿足 $c^n = b$ 的正實數。我們也繼續定義 $f(\frac{m}{n}) = (b^{1/n})^m$ ，也就是 $f(x)$ 在所有的正有理數都可定義。至於對任意的正實數 r ，會發現當考慮任意由有理數所形成的數列 $\langle x_n \rangle$ ，

若 $x_n \rightarrow r$, 則 b^{x_n} , 會趨近於一固定的實數。我們就定這個實數為 $f(r) = b^r$ 的值。這樣的定義不只讓 $f(x) = b^x$ 在整個正實數有定義且因為滿足當 $x \rightarrow r$ 時都會有 $b^x \rightarrow b^r$, 亦即 $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = f(r)$, 因此也讓 $f(x) = b^x$ 在整個正實數是連續的。若對於負實數 $-r$ 再定義 $f(-r) = \frac{1}{b^r}$, 我們就把指數函數 $f(x) = b^x$ 的定義域推廣到負實數且讓它在負實數也是連續的。最後由於 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1$, 若我們再定義 $f(0) = b^0 = 1$, 就把指數函數 $f(x) = b^x$ 的定義域推廣到整個實數且讓它在所有的實數都是連續的。

知道以上這些函數在哪裡連續, 利用 Theorem 1.3.3 我們便可利用它們的四則運算而了解更多的函數在哪裡是連續的。

例子 1.3.5. 我們探討函數 $\frac{2^x \sin x}{x^2 - 1}$ 和 $\frac{x^2 + \cos x}{2 + \sin x}$ 分別在哪裡是連續的。

首先 $2^x \sin x$ 和 $x^2 - 1$ 在整個實數連續, 但 $x^2 - 1$ 在 $x = -1, 1$ 等於 0, 故知 $\frac{2^x \sin x}{x^2 - 1}$ 在區間 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ 以及 $(1, \infty)$ 是連續的。

現考慮 $x^2 + \cos x$ 和 $2 + \sin x$ 也都在整個實數連續。而分母 $2 + \sin x$ 絕不為 0, 因為 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 。因此 $\frac{x^2 + \cos x}{2 + \sin x}$ 仍在整個實數連續。 #

合成函數可以讓我們得到更多、更複雜的函數。雖然感覺較複雜, 不過極限對於合成函數有很好的性質。給定兩個函數 $f(x), g(x)$, 我們用 $f \circ g(x)$ 表示它們的合成函數。意思是, 若 a 在 $g(x)$ 的定義域中, 我們可以將 a 代入函數 $g(x)$ 中。若所得的值 $g(a)$ 仍在 f 的定義域, 則可將 $g(a)$ 再代入 $f(x)$ 中, 得到 $f(g(a))$ 。因此我們定義將 a 代入 $f \circ g(x)$ 的值 $f \circ g(a)$ 為 $f(g(a))$ 。因為 $f \circ g(a) = f(g(a))$ 對可定義的任意實數 a 皆成立, 所以通常我們也將合成函數寫成 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 。例如我們通常將 $(\sin x)^2$ 寫成 $\sin^2 x$ 。它就是令 $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$ 寫成的合成函數

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x.$$

若反過來合成 $g \circ f(x)$ 就會是 $g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$ 。當然了, 若定義域符合的話, 我們可以把好多個函數合成起來。例如 $\cos(2^{\sin(x+1)})$, 就是將 $x+1$ 代入 $\sin x$, 所得的函數 $\sin(x+1)$ 再代入 2^x , 最後再將所得的函數 $2^{\sin(x+1)}$ 代入 $\cos x$ 得到的。

接下來我們看合成函數 $f \circ g(x)$ 極限的性質。如果 $g(x)$ 在 a 附近不是常數且當 $x \rightarrow a$ 時 $g(x) \rightarrow b$, 此時若能確定當 $x \rightarrow b$ 時 $f(x) \rightarrow c$, 則

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{g(x) \rightarrow b} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c. \quad (1.10)$$

特別的, 假設 $g(x)$ 在 $x = a$ 連續, 我們知當 $x \rightarrow a$ 時 $g(x) \rightarrow g(a)$, 若又假設 $f(x)$ 在 $x = g(a)$ 連續, 即 $x \rightarrow g(a)$ 時 $f(x) \rightarrow f(g(a))$ 則由式子 (1.10) 可得 $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f \circ g(a)$, 也就是函數 $f \circ g(x)$ 在 $x = a$ 是連續的。因此我們有關合成函數的連續性。

Theorem 1.3.6. 假設可函數 $g(x)$ 定義在區間 I 其值域為 J 且 $g(x)$ 在 I 為連續。若函數 $f(x)$ 在 J 亦為連續, 則合成函數 $f \circ g(x)$ 在 I 為連續。

例如前面所提函數 $\cos(2^{\sin(x+1)})$, 由於牽涉的每個函數皆在整個實數連續, 所以此函數在整個實數亦連續。

當一個函數 $f(x)$ 定義在區間 I 且為一對一（即 I 中相異兩點 a, b 分別代入 $f(x)$ 所得 $f(a), f(b)$ 也會不同），此時若 $f(x)$ 的值域為 J ，則存在一個定義在 J 且值域為 I 的函數 $g(x)$ 滿足 $g \circ f(x) = x$ 且 $f \circ g(x) = x$ 。這個函數 $g(x)$ 稱為 $f(x)$ 的反函數 (inverse function)，記為 $f^{-1}(x)$ （注意： $f^{-1}(x)$ 的定義域是 $f(x)$ 的值域）。由於 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ，所以若一對一函數 $f(x)$ 為定義在 I 且值域為 J 的連續函數，其因圖形連續沒有斷點，故 $f^{-1}(x)$ 的圖形也會是連續沒有斷點，因此 $f^{-1}(x)$ 會是定義在 J 的連續函數。我們來看一些常見的函數及其反函數。

二次函數 $f(x) = x^2$ ，雖然定義在整個實數是連續的，但它不是一對一的（例如 $f(-1) = f(1)$ ）。不過若將之限制在 $[0, \infty)$ 這個區間，它便是一對一的，此時值域也是 $[0, \infty)$ 。所以它有反函數 $f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ ，也會是定義在 $[0, \infty)$ 的連續函數。至於 $g(x) = x^3$ 為在整個實數是一對一的連續函數，其值域也是整個實數，所以它的反函數 $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ 也是定義在整個實數的連續函數。對於一般的實數 r 我們都可定義出函數 $h(x) = x^r$ ，當 $r > 0$ 時 $h(x)$ 為定義在 $[0, \infty)$ 的連續函數；而當 $r < 0$ 時，因為 $h(x)$ 在 $x = 0$ 無定義，所以是定義在 $(0, \infty)$ 的連續函數。

對於底數為正實數 b 的指數函數 $f(x) = b^x$ ，前面已知它是定義在整個實數的連續函數。當 $a_1 \neq a_2$ 時 $f(a_1) = b^{a_1} \neq f(a_2) = b^{a_2}$ ，因為由指數律 $\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = b^{a_1 - a_2} \neq 1$ ，所以 $f(x)$ 是一對一的。由於 $f(x)$ 的值域為 $(0, \infty)$ ，所以它有一個定義在 $(0, \infty)$ 的反函數 $f^{-1}(x) = \log_b(x)$ ，我們稱為底為 b 的對數函數 (logarithmic function)。 $\log_b(x)$ 是定義在正實數 $(0, \infty)$ 上的連續函數其值域為整個實數。當底數 $b = 10$ 時，通常就用 $\log x$ 來表示 $\log_{10} x$ 。微積分最常用的是在底數為 e 的情況，一般用 $\ln x$ 來表示 $\log_e x$ ，稱為自然對數 (nature logarithm)。

三角函數由於其週期性，我們知道它們在整個實數不會是一對一，不過通常會選取一個包含 0 的最大區間使其為一對一，然後考慮定義在這區間的反函數。例如 $\sin x$ 若限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 就會是一對一且值域仍為 $[-1, 1]$ 。所以它的反函數 $\sin^{-1} x$ 就是定義在 $[-1, 1]$ 且值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的連續函數。同樣的道理 $\cos x$ 若限制在 $[0, \pi]$ 就會是一對一且值域仍為 $[-1, 1]$ 。所以它的反函數 $\cos^{-1} x$ 就是定義在 $[-1, 1]$ 且值域為 $[0, \pi]$ 的連續函數。至於 $\tan x$ ，我們是限制在開區間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。因為其值域為整個實數，所以 $\tan x$ 的反函數 $\tan^{-1} x$ 就會是定義在整個實數且值域為 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的連續函數。要注意，通常當 n 是自然數時，我們用 $\sin^n x$ 來表示 $(\sin x)^n$ 。但這不適用於負整數，因為 $\sin^{-1} x$ 是用表示 $\sin x$ 的反函數，而不是表示 $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ （回顧一下 $(\sin x)^{-1}$ 是用 $\csc x$ 來表示）。為了避免混淆，有時反三角函數是用前面加 “arc”（代表是弧度）來表示。例如 $\sin^{-1} x = \arcsin x$ ， $\cos^{-1} x = \arccos x$ 以及 $\tan^{-1} x = \arctan x$ 。

習題 1.16. 說明以下函數的極限可以利用哪些連續函數的性質（加法、乘法、除法、合成）處理。請確認在所求極限的點連續，並求其極限。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^4 x}{5 + 2x^3}; \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \theta \sin \theta; \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x + \sin x); \quad \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 2.4(5, 6, 7); 2.5(30, 31)）

微分

我們將從切線斜率的觀點介紹微分。微分事實上牽涉到極限的概念，也因此我們可以利用極限的性質推導出微分的性質與規則。利用這些規則，可以讓我們更輕易的求一個函數的微分。首先我們將專注於微分的性質與技巧，接著再談微分的應用。

2.1. 微分的定義與基本性質

在函數圖形 $y = f(x)$ 上固定一點 P ，設其坐標為 $(x_0, f(x_0))$ ，接著在 $y = f(x)$ 上選 P 點附近的一點 Q 。它們的連線 $\overline{PQ}$ 稱為函數圖形 $y = f(x)$ 通過 P, Q 兩點的割線 (secant line)。漸漸的將 Q 點沿著 $y = f(x)$ 往 P 點移動，若不管 Q 在 P 的左邊或右邊，這些割線都會趨近於一條線，這一條線便稱為函數圖形 $y = f(x)$ 在 P 點的切線，此切線的斜率便定義成 $f(x)$ 在 x_0 的微分 (derivative)。

固定 $y = f(x)$ 上一點 $P(x_0, f(x_0))$ ，在此圖形上另一點 $Q(t, f(t))$ 與 P 所連直線的斜率為 $\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ 。首先注意，如果 Q 趨近於 P 時直線 $\overline{PQ}$ 會趨近於在 P 點的切線，當然 $\overline{PQ}$ 的斜率也會趨近於該切線的斜率。然而當 t 趨近於 x_0 時，自然 Q 便趨近於 P ，所以此時 $\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ 的極限值就是在 P 點切線的斜率。我們有以下的定義。

Definition 2.1.1. 對於函數 $f(x)$ 的定義域上一點 x_0 ，如果極限

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

存在，則稱 $f(x)$ 在 x_0 可微 (differentiable)，且其極限值稱為 $f(x)$ 在 x_0 的“微分值”或“導數” (derivative of $f(x)$ at x_0) 並以 $f'(x_0)$ 表示。

定義中兩個極限其實是一樣的，若令 $t = x_0 + h$ 則左邊的分母 $t - x_0$ 就等於右邊的分母 h ，而且 $t \rightarrow x_0$ 就表示 $h = t - x_0 \rightarrow 0$ 。由於以後在處理為分時，有可能其中一個極限會比另一個好處理，所以我們把兩種寫法都列出。例如在處理 $f(x) = x^2$ 在 $x = 3$ 的微分，我們可以用

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = 6 + h$$

所以當 $h \rightarrow 0$ 可得 $f'(3) = 6$ 。若是用 $\frac{f(t) - f(3)}{t - 3} = \frac{t^2 - 9}{t - 3}$ 就必須使用平方差公式 $t^2 - 9 = (t + 3)(t - 3)$ 得到 $\frac{t^2 - 9}{t - 3} = t + 3$ ，因此由 $t \rightarrow 3$ 可得 $f'(3) = 6$ 。

當 $f(x)$ 在 x_0 可微，表示極限 $\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ 存在（極限為 $f'(x_0)$ ）。又由於 $\lim_{t \rightarrow x_0} [t - x_0]$ 極限也存在（極限為 0），所以依照極限乘法性質（Theorem 1.2.4(2)），可得

$$\lim_{t \rightarrow x_0} [f(t) - f(x_0)] = \lim_{t \rightarrow x_0} \left[\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \cdot (t - x_0) \right] = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \cdot \lim_{t \rightarrow x_0} [t - x_0] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

（參考 Exercise 1.15）這告訴我們 $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0)$ ，也就是說 $f(x)$ 在 x_0 是連續的。我們證得了以下的定理。

Theorem 2.1.2. 若函數 $f(x)$ 在 x_0 可微，則 $f(x)$ 在 x_0 連續。

注意這個定理並沒有說 $f(x)$ 在 x_0 連續的話會使得 $f(x)$ 在 x_0 可微，事實上這在一般情況可能是錯的。我們有以下的例子。

例子 2.1.3 ([BioCalc.], Example 3.2.6) 考慮絕對值函數 $f(x) = |x|$ 。我們知道 $f(x)$ 在整個實數是連續的。我們探討 $f(x)$ 在哪裡是可微的。在 $x_0 > 0$ 的情況，當 t 趨近於 x_0 時， t 也會大於 0，故此時

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{|t| - |x_0|}{t - x_0} = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{t - x_0}{t - x_0} = 1.$$

另一方面，在 $x_0 < 0$ 的情況，當 t 趨近於 x_0 時， t 也會小於 0，故此時

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{|t| - |x_0|}{t - x_0} = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{-t - (-x_0)}{t - x_0} = -1.$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0 \neq 0$ 的情形是可微的。然而在 $x_0 = 0$ 時，當 t 趨近於 0 時， t 可能是大於 0，也可能小於 0。事實上此時 $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{|t|}{t}$ ，而在例子 1.2.3 ([BioCalc.] Example 2.4.9)

我們知道 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$ 極限不存在（左極限為 -1 ；右極限為 1 ），所以 $f(x)$ 在 0 雖然是連續的，但不可微分。 #

若每次求一個函數在某一點的微分都用極限的定義處理，當然是麻煩的事。我們可以探討在一般情況求在 x_0 的微分與 x_0 的關係，也就是將微分這個動作看成是推導出新的函數（稱為導函數）且用 $f'(x)$ 來表示這個導函數。例如前面提到 $f(x) = x^2$ 這個函數，對於 $f(x)$ 在 x_0 的微分依定義為

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{t^2 - x_0^2}{t - x_0} = \lim_{t \rightarrow x_0} (t + x_0) = 2x_0.$$

我們便稱 $f(x) = x^2$ 的導函數是 $f'(x) = 2x$ 。知道 $f(x)$ 的導函數是 $f'(x)$ 後，我們要知道 $f(x)$ 在 x_0 的微分值就可以直接將 x_0 代入 $f'(x)$ 即可。例如已知 $f'(x) = 2x$ 是 $f(x) = x^2$ 的導函數，所以要得到 x^2 在 $x = 3$ 的微分值，我們將 $x = 3$ 代入 $2x$ 得到 $f'(3) = 6$ ，和之前的結果一致。函數 $f(x)$ 的導函數有許多種寫法，除了目前使用的 $f'(x)$ 外，另外一個較常用的寫法是 $\frac{d}{dx} f(x)$ 。例如我們可以用 $(x^2)' = 2x$ 也可以用 $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ 來表示 x^2 的導函數是 $2x$ 。

Remark 2.1.4. $f(x)$ 的導函數 $\frac{d}{dx}f(x)$ 這個符號中 dx 表示對函數的變數 x 微分。如果函數是以 t 為變數，例如 $f(t)$ ，那它的導函數就得用 $\frac{d}{dt}f(t)$ 來寫。另外絕不能偷懶只寫 df ，它指的是函數 f 取值的差；而 dx 指的是變數 x 的差，所以必需是 df 除以 dx 才會符合微分的定義。因此有的微積分書籍會用 $\frac{df}{dx}$ 表示 $f(x)$ 的導函數，不過為了與 [BioCalc.] 一致，我們用 $\frac{d}{dx}f(x)$ 來表示。

接下來我們將介紹一系列導函數的性質，有了這些性質我們就可以利用一些已知的函數的導函數推導出更多函數的導函數。再次強調一次，函數 $f(x)$ 在 x_0 的微分值 $f'(x_0)$ 的求法可以直接用定義處理或先求出導函數 $f'(x)$ 再將 x_0 代入得到。由於我們可以很容易用導函數性質推導出許多函數的導函數，所以之後我們幾乎是先求出導函數再代值的方法處理。不過千萬不要誤以為：『 $f'(x_0)$ 是將 x_0 代入 $f(x)$ 再微分』（那只會得到 0）。

為了讓式子簡潔好記，當談論到函數與導函數時，由於沒有牽涉到代點取值的問題，我們有時會單純的將函數 $f(x)$ 簡化寫成 f ，而其導函數 $f'(x)$ 寫成 f' 。

2.1.1. 線性性質. 微分線性性質 (linear rule) 指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$ ，對於任意實數 r, s 若我們考慮新的函數 $rf(x) + sg(x)$ (簡寫成 $rf + sg$)，則它的導函數為 $rf'(x) + sg'(x)$ (簡寫成 $rf' + sg'$)。

為了不要符號太複雜，我們將此性質分開成加法 (sum rule) 與乘係數 (constant multiple rule) 兩個性質說明。首先我們說明若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 則 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ 。依定義 $h(x)$ 在 x_0 的微分為 $\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{h(t) - h(x_0)}{t - x_0}$ 。然而

$$\frac{h(t) - h(x_0)}{t - x_0} = \frac{(f(t) + g(t)) - (f(x_0) + g(x_0))}{t - x_0} = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} + \frac{g(t) - g(x_0)}{t - x_0},$$

所以當 $t \rightarrow x_0$ 利用極限加法性質可得極限值為 $f'(x_0) + g'(x_0)$ ，亦即 $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ 。由於這在所有 $f(x), g(x)$ 皆可微的點 x_0 都成立，故得 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ ，亦即 $(f + g)' = f' + g'$ 。

同樣的方法，若令 $h(x) = rf(x)$ ，由於

$$\frac{h(t) - h(x_0)}{t - x_0} = \frac{rf(t) - rf(x_0)}{t - x_0} = r \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}.$$

當 $t \rightarrow x_0$ 兩邊取極限可得 $h'(x_0) = rf'(x_0)$ 。因此 $(rf)' = rf'$ 。

由以上兩性質就可得導函數的線性性質

$$(rf + sg)' = (rf)' + (sg)' = rf' + sg'.$$

例如當 $f(x) = x, g(x) = 1$ ，由微分定義我們知道 $f'(x) = 1, g'(x) = 0$ 。因此對任意的一次函數 $h(x) = rx + s$ 可得其導函數

$$h'(x) = (rf(x) + sg(x))' = rf'(x) + sg'(x) = r \cdot 1 + s \cdot 0 = r.$$

以後為了方便，函數 x 和 1 的微分可以直接分別用 $x' = 1$ 和 $1' = 0$ 來表示，因此可寫成

$$(rx + s)' = rx' + s1' = r \cdot 1 + s \cdot 0 = r.$$

若用 $\frac{d}{dx}$ 的寫法可表成

$$\frac{d}{dx}(rx + s) = r \frac{d}{dx}x + s \frac{d}{dx}1 = r \cdot 1 + s \cdot 0 = r.$$

2.1.2. 乘法性質. 微分乘法性質 (product rule) 指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$, 若我們考慮新的函數 $f(x) \cdot g(x)$ (簡寫成 $f \cdot g$), 則它的導函數為 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (簡寫成 $f' \cdot g + f \cdot g'$)。

首先令 $h(x) = f(x)g(x)$, 我們有 $\frac{h(t) - h(x_0)}{t - x_0} = \frac{f(t)g(t) - f(x_0)g(x_0)}{t - x_0}$ 。由於分子要湊出 $f(t) - f(x_0)$ 和 $g(t) - g(x_0)$ 這兩項, 我們特別把分子 $f(t)g(t) - f(x_0)g(x_0)$ 改寫成

$$f(t)g(t) - f(x_0)g(t) + f(x_0)g(t) - f(x_0)g(x_0) = (f(t) - f(x_0))g(t) + f(x_0)(g(t) - g(x_0)).$$

因此當 $t \rightarrow x_0$ 時, 利用

$$\frac{h(t) - h(x_0)}{t - x_0} = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}g(t) + f(x_0)\frac{g(t) - g(x_0)}{t - x_0}$$

以及極限加法、乘法性質, 兩邊取極限可得 $h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ 。注意這個極限我們用到了 $t \rightarrow x_0$ 時 $g(t) \rightarrow g(x_0)$, 也就是 $g(x)$ 在 x_0 的連續性 (因為已知 $g'(x_0)$ 存在, Theorem 2.1.2 確保 $g(x)$ 在 x_0 連續)。因為這對所有 $f(x), g(x)$ 可微的點 x_0 都成立, 所以推得導函數的乘法性質

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

例如前面已知 $x' = 1$, 因此利用 x^2 可寫成 $x \cdot x$, 可得

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

而 $x^3 = x \cdot x^2$ 故

$$(x^3)' = (x \cdot x^2)' = x' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot (2x) = 3x^2.$$

這樣一直下去, 由其規律假設對於自然數 $n-1$, 我們有 $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$, 因此用數學歸納法證得

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = x' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

若用 $\frac{d}{dx}$ 的寫法可表成 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$. 這個式子稱為微分的 *power rule*。

利用線性以及 power rule, 對於多項式函數 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$, 我們都可得到 $f(x)$ 的導函數

$$(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)' = nc_n x^{n-1} + (n-1)c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_1.$$

例如

$$\frac{d}{dx}\left(2x^5 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3\right) = 10x^4 - 9x^2 + x + 4.$$

2.1.3. 除法性質. 微分除法性質 (quotient rule) 指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$, 若考慮新的函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ (簡寫成 $\frac{f}{g}$), 則它的導函數為 $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (簡寫成 $\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$)。

我們直接用乘法性質來處理 $\frac{f}{g}$ 的導函數。由於 $\frac{f}{g} \cdot g = f$ 此等式兩邊表示是同樣的函數 (當然是在 $g(x) \neq 0$ 的地方), 將等式兩邊微分, 也會是同樣的函數。也就是說 $(\frac{f}{g} \cdot g)' = f'$ 。利用乘法性質 $(\frac{f}{g} \cdot g)' = (\frac{f}{g})' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g'$, 因此 $(\frac{f}{g})' \cdot g + \frac{f}{g} \cdot g' = f'$ 。移項後可得

$$(\frac{f}{g})' = \frac{1}{g}(f' - \frac{f}{g} \cdot g') = \frac{1}{g}(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g}) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

例如 [BioCalc.] Example 3.4.4 有理函數 $\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$ 的導函數為

$$\frac{(x^2 + x - 2)' \cdot (x^3 + 6) - (x^2 + x - 2) \cdot (x^3 + 6)'}{(x^3 + 6)^2} = \frac{(2x + 1) \cdot (x^3 + 6) - (x^2 + x - 2) \cdot 3x^2}{(x^3 + 6)^2}.$$

特別的, 當 $f(x) = 1$ 是常數時 $f'(x) = 0$, 因此我們有導函數的倒數性質 (reciprocal rule)

$$(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}.$$

例如前面已知對於自然數 n , 我們有 $(x^n)' = nx^{n-1}$, 因此利用 x^{-n} 可寫成 $\frac{1}{x^n}$, 可得

$$(x^{-n})' = (\frac{1}{x^n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(-n)-1}.$$

因此我們將 power rule 推廣到一般的非零整數 m 皆有

$$\frac{d}{dx} x^m = mx^{m-1}.$$

2.1.4. 連鎖性質. 微分連鎖性質 (chain rule) 指的是如果知道兩函數 $f(x), g(x)$ 的導函數 $f'(x), g'(x)$, 我們考慮合成函數 $f(g(x))$ (簡寫成 $f \circ g$), 則它的導函數為 $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (簡寫成 $(f' \circ g) \cdot g'$)。

首先令 $h(x) = f(g(x))$, 我們有

$$\frac{h(t) - h(x_0)}{t - x_0} = \frac{f(g(t)) - f(g(x_0))}{t - x_0} = \frac{f(g(t)) - f(g(x_0))}{g(t) - g(x_0)} \cdot \frac{g(t) - g(x_0)}{t - x_0}.$$

如果 $g(x)$ 在 x_0 可微且 $f(x)$ 在 $g(x_0)$ 可微, 由於 $g(x)$ 在 x_0 連續, 當 $t \rightarrow x_0$ 時, 如果 $g(x)$ 在 x_0 附近不是常數, 則 $g(t) \rightarrow g(x_0)$, 所以 $\frac{f(g(t)) - f(g(x_0))}{g(t) - g(x_0)}$ 的極限為 $f'(g(x_0))$ 。因此利用極限乘法性質, 兩邊取極限可得 $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ 。而若 $g(x)$ 在 x_0 附近是常數, 則 $h(x) = f(g(x))$ 在 x_0 附近也是常數, 因此 $h'(x_0) = g'(x_0) = 0$, 也就是說此時 $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ 依然成立。因為這對所有符合 $f(x)$ 在 $g(x_0)$ 可微且 $g(x)$ 在 x_0 可微的那些 x_0 都成立, 所以推得導函數的連鎖性質

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

例如 [BioCalc.] Example 3.5.3 求多項式函數 $(x^3 - 1)^{100}$ 的導函數，我們不可能將它展開再套用多項式的導函數。而是將之看成合成函數 $f(g(x))$ 其中 $f(x) = x^{100}$, $g(x) = x^3 - 1$ 。由於 $f'(x) = 100x^{99}$, $g'(x) = 3x^2$ ，利用 chain rule 可得

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99} \cdot (3x^2) = 300x^2(x^3 - 1)^{99}.$$

事實上對於一般情況，當 m 為非零整數時 $(f(x))^m$ 的導函數，利用 chain rule 和 power rule 會是

$$\frac{d}{dx}(f(x))^m = m(f(x))^{m-1} \cdot f'(x).$$

特別的當 $m = -1$ 時 $\frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ （注意不要和反函數 $f^{-1}(x)$ 搞混），所以我們有

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = \frac{d}{dx}(f(x))^{-1} = -(f(x))^{-2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

和前面說的倒數性質一致。

例子 2.1.5. 我們用兩種方法來求 [BioCalc.] Example 3.5.5 $g(t) = (\frac{t-2}{2t+1})^9$ 的導函數。我們可以將 g 看成合成函數 $f \circ h$ ，其中 $f(t) = t^9$, $h(t) = \frac{t-2}{2t+1}$ 。所以利用 chain rule 和 quotient rule 可得

$$g'(t) = 9(\frac{t-2}{2t+1})^8 \cdot (\frac{t-2}{2t+1})' = 9(\frac{t-2}{2t+1})^8 \cdot \frac{(2t+1) - 2(t-2)}{(2t+1)^2} = 45 \frac{(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}.$$

若不想用 quotient rule 我們也可把 $g(t)$ 寫成 $(t-2)^9 \cdot (2t+1)^{-9}$ 再用 product rule 處理。因此得 $\frac{d}{dt}((t-2)^9 \cdot (2t+1)^{-9})$ 等於

$$(2t+1)^{-9} \cdot \frac{d}{dt}(t-2)^9 + (t-2)^9 \cdot \frac{d}{dt}(2t+1)^{-9} = 9(2t+1)^{-9}(t-2)^8 + (-9(2t+1)^{-10}2(t-2)^9).$$

再整理得 $g(t)$ 的導函數為 $9(2t+1)^{-10}(t-2)^8(2t+1-2(t-2)) = 45(2t+1)^{-10}(t-2)^8$ 。 #

2.1.5. 反函數的微分. Chain rule 還可以幫我們處理反函數的導函數。因為 $f(f^{-1}(x)) = x$ ，兩邊函數相同，所以兩邊微分可以得到同樣的導函數，亦即 $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$ 。因此移項後可得

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

當然了，若 x_0 會使得 $f(x)$ 在 $f^{-1}(x_0)$ 這一點的微分值為 0（亦即 $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$ ）由於分母為 0，表示此時 $f^{-1}(x)$ 在 x_0 的微分不存在。

反函數的微分這個式子不必去記它，遇到實際求反函數的導函數時利用 $f(f^{-1}(x)) = x$ 直接微分推導即可。例如 $g(x) = \sqrt{x}$ 是 $f(x) = x^2$ 的反函數，所以求 $\sqrt{x}$ 的導函數，利用 $(\sqrt{x})^2 = x$ 兩邊微分得 $2(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 1$ 。因此求得 $\sqrt{x}$ 的導函數為

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2},$$

並且知道 $\sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 不可微分且在正實數都可微分。

事實上對於任意的正整數 n ，我們知道 $x^{1/n}$ 是 x^n 的反函數，所以利用 $(x^{1/n})^n = x$ 兩邊微分得 $n(x^{1/n})^{n-1} \cdot (x^{1/n})' = 1$ 。因此推得

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} (x^{-\frac{n-1}{n}})' = \frac{1}{n} (x^{\frac{1}{n}-1})'. \quad (2.1)$$

對於非零整數 m 由於 $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ 利用 chain rule 和 power rule 可得

$$(x^{\frac{m}{n}})' = ((x^{\frac{1}{n}})^m)' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} (x^{\frac{1}{n}})'.$$

因此由式子 (2.1)，我們也可求出 $x^{m/n}$ 的導函數

$$(x^{\frac{m}{n}})' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} (x^{\frac{1}{n}-1})' = \frac{m}{n} (x^{\frac{m}{n}-1})' \quad (2.2)$$

式子 (2.2) 將 power rule 又推廣到一般的有理數，也就是說當 $r \neq 0$ 是有理數時

$$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}.$$

例子 2.1.6. [BioCalc.] Example 3.5.1 求 $\sqrt{x^2+1}$ 的導函數，我們先將之寫成 $(x^2+1)^{1/2}$ ，再利用 chain rule 和 power rule 求得導函數為 $\frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 。

同理 [BioCalc.] Example 3.5.4 函數 $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ 可以寫成 $(x^2+x+1)^{-1/3}$ ，因此得導函數為 $\frac{-1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3}(2x+1)$ 。 #

習題 2.1. 試利用微分定義求以下函數在 $x=1$ 的微分值： $f(x) = 5x - 9x^2$, $g(x) = x + \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 。(取自 [BioCalc.] Exercise 3.2(25, 26, 30))

習題 2.2. 考慮拋物線 $y = x^2 + x$ 。試找到所有通過點 $(2, -3)$ 且與此拋物線相切的直線。並說明通過點 $(2, 7)$ 的直線都不會與此拋物線相切。(取自 [BioCalc.] Exercise 3.3.68)

習題 2.3. 用 product、quotient 和 chain rules 求以下函數的導函數：

$$y = \frac{t^2+2}{t^4-3t^2+1}; \quad h(t) = (t^4-1)^3(t^3+1)^4; \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.4.19, 3.5.20, 3.5.34)

習題 2.4. 試利用 chain rule 處理以下問題。

- (1) 令 $F(x) = f(g(x))$ 。已知 $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ 以及 $g'(5) = 6$ 。試求 $F'(5)$ 。
- (2) 令 $h(x) = \sqrt{4+3f(x)}$ 。已知 $f(1) = 7$ 以及 $f'(1) = 4$ 。試求 $h'(1)$ 。
- (3) 令 $h(x) = f(g(x))$, $H(x) = g(f(x))$, $F(x) = f(f(x))$ 以及 $G(x) = g(g(x))$ 。利用下表求 $h'(1)$, $H'(1)$, $F'(2)$ 以及 $G'(3)$ 。

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.5(45, 46, 47, 48))

2.2. 特殊函數的微分

利用微分的性質，我們很容易推得多項式函數、有理函數、甚至包含根式的函數的導函數。這一節中，我們將介紹指數、對數函數以及三角、反三角函數的微分。進而談論它們之間四則運算以及合成所得的更複雜的函數的微分。

2.2.1. 指數與對數函數. 前面的微分性質無法幫助我們求指數函數的導函數，所以我們必需回歸到定義求最基本的指數函數的導函數。對數函數由於是指數函數的反函數，所以可以用反函數微分的性質求其導函數。

給定正實數 b ，令 $f(x) = b^x$ 為以 b 為底的指數函數。給定 x_0 ，依定義 $f(x)$ 在 x_0 的微分為

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x_0+h} - b^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x_0}(b^h - 1)}{h} = b^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(b^h - 1)}{h}.$$

由於 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ 恰為 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的微分 $f'(0)$ 。所以指數函數 $f(x) = b^x$ 很有趣，它在任一點 x_0 的微分值滿足 $f'(x_0) = f'(0) \cdot f(x_0)$ 。也就是說存在一個常數 c 使得 b^x 在任一點 x_0 的微分值為 $c \cdot b^{x_0}$ ，其中 c 是 b^x 在 0 的微分。例如 2^x 在 x_0 的微分為 $c_2 2^{x_0}$ ； 3^x 和 10^x 在 x_0 的微分分別為 $c_3 3^{x_0}$ 和 $c_{10} 10^{x_0}$ ，其中常數 c_2 約為 0.69315、 c_3 約為 1.09861 以及 c_{10} 約為 2.30259。特別的，如果有一個正實數 b 滿足 b^x 在 $x = 0$ 的微分是 1，則 $f(x) = b^x$ 在 x_0 的微分就是 $f(x_0) = b^{x_0}$ ，也就是說 $f(x)$ 滿足其導函數 $f'(x) = f(x)$ 。

事實上這個實數是存在的，我們用 e 來表示它。它的值約為 2.71828，因為它不是有理數，我們無法用小數正確表示其值。以 e 為底的指數函數 e^x 有時會被稱為“自然指數函數”（*natural exponential function*），也有人用 $\exp(x)$ 來表示它。我們總結有關 e 的重要性質：首先 e 滿足 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ ，由此可得 $(e^x)' = e^x$ 。另外取對數，也可推得以下重要極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

以 b 為底的指數函數 b^x 其反函數為以 b 為底的對數函數 $\log_b x$ ，所以 e^x 的反函數就是 $\log_e x$ 。由於此對數函數經常被使用，為了方便性，特別用 $\ln x$ 來表示且稱之為“自然對數函數”（*natural logarithmic function*）。利用 e^x 和 $\ln x$ 之間的反函數關係

$$e^{\ln x} = x. \quad (2.3)$$

再由 chain rule 以及 $(e^x)' = e^x$ ，將式子 (2.3) 左邊微分可得

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'.$$

而式子 (2.3) 右邊微分 $x' = 1$ ，故由 $x(\ln x)' = 1$ 移項得

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

知道 $\ln x$ 的導函數為 $\frac{1}{x}$ ，我們就可以利用對數的性質（對數律、換底公式）來處理和指數、對數有關的函數的微分。例如一般以 b 為底的指數函數 b^x 的導函數，就可利用

$\ln b^x = x \ln b$ 這個等式處理。左邊微分為 $(\ln b^x)' = \frac{(b^x)'}{b^x}$ ；右邊微分為 $(x \ln b)' = \ln b$ 。故由 $\frac{(b^x)'}{b^x} = \ln b$ 推導出

$$(b^x)' = (\ln b)b^x.$$

回顧前面提過，當 $f(x) = b^x$ ，則 $f'(x) = f'(0)f'(x)$ ，因此 $f'(0) = \ln b$ 。故由 b^x 在 $x = 0$ 的微分定義得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - b^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \ln b.$$

我們可用換底公式，處理以 b 為底的對數函數 $\log_b x$ 的導函數。也就是利用 $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ ，兩邊微分得

$$(\log_b x)' = \frac{1}{\ln b} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln b}.$$

例如常用（以 10 為底）對數函數 $\log x$ 的導函數為 $(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ （由於換底公式 $\frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\log_e 10} = \log_{10} e$ ，所以也常把 $\log x$ 的導函數寫成 $\frac{\log e}{x}$ ）。

同樣的我們也可利用 $\ln x$ 求一般 power function x^r 的導函數，其中 r 為固定實數。也就是利用等式 $\ln x^r = r \ln x$ 兩邊微分。左邊微分為 $(\ln x^r)' = \frac{(x^r)'}{x^r}$ ；右邊微分為 $(r \ln x)' = r(\ln x)' = \frac{r}{x}$ 。因此由 $\frac{(x^r)'}{x^r} = \frac{r}{x}$ 可得

$$(x^r)' = \frac{r}{x} \cdot x^r = rx^{r-1}.$$

所以 x^r 的微分，即 power rule 在 r 為一般實數的情況都成立。

對數律可以將乘除化為加減、次方化為乘法，善用對數往往能讓我們化繁為簡。以後我們會進一步談論如何利用取對數來幫我們簡化求導函數的問題。

習題 2.5. 請做以下有關指數函數的微分：

$$g(x) = \sqrt{x}e^x; \quad f(x) = \frac{1 - xe^x}{x + e^x}; \quad y = e^{\sqrt{x}}; \quad y = \sqrt{2 - e^x}; \quad y = 2^{3x^2}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 3.4(4, 32); 3.5(5, 6, 36)）

習題 2.6. 請做以下有關對數函數的微分：

$$f(x) = x \ln x - x; \quad F(t) = \ln \frac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4}; \quad h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1}); \quad y = [\ln(1 + e^x)]^2; \quad y = 2x \log_{10} \sqrt{x}.$$

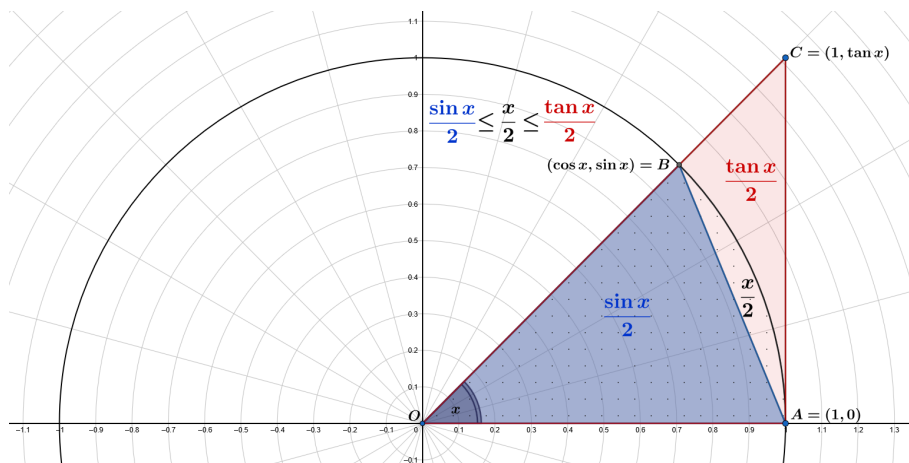
（取自 [BioCalc.] Exercise 3.7(2, 11, 12, 13, 18, 19)）

2.2.2. 三角與反三角函數. 我們先利用定義求最基本的正弦函數 $\sin x$ 的導函數，然後利用三角函數之間的關係求其他三角函數的導函數。再用反函數微分的性質求反三角函數的導函數。

給定 x_0 ，依定義 $\sin x$ 在 x_0 的微分為 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \theta) - \sin x_0}{\theta}$ (我們選這個定義因為可以用和角公式 $\sin(x_0 + \theta) = \sin x_0 \cos \theta + \cos x_0 \sin \theta$)，因此

$$\sin'(x_0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin x_0(\cos \theta - 1) + \cos x_0 \sin \theta}{\theta} = \sin x_0 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} + \cos x_0 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}. \quad (2.4)$$

我們必需處理 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ 這兩個 $\frac{0}{0}$ 的不定型極限。首先利用夾擠定理 (Theorem 1.2.8) 處理當 $x \rightarrow 0$ 時 $\frac{\sin x}{x}$ 的極限。下圖是在坐標平面上，以原點 O 為圓心的單位圓。 B 點為此圓與 x 軸夾 x 弧度的點。所以三角形 $\triangle BOA$ 面積為 $\frac{1}{2} \sin x$ ，扇形 $\triangle BOA$ 面積為 $\frac{1}{2}x$ ，而三角形 $\triangle COA$ 面積為 $\frac{1}{2} \tan x$ 。



利用它們的大小關係，我們得 $\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}x$ ，由於 $x > 0$ 所以 $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ 。另一方面 $\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ，由於 $\cos x > 0$ 故得 $\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$ 。也就是說當 $x > 0$ 時，我們有 $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ 。由於 $\cos x$ 在 0 連續， $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$ ，因此由夾擠定理知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。而當 $x < 0$ 時由於 $\sin(-x) = -\sin x$ ，所以 $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ ，因此依然有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，得證

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1. \quad (2.5)$$

至於 $\theta \rightarrow 0$ 時 $\frac{\cos \theta - 1}{\theta}$ 的極限，可用 $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ 幫我們處理。為了讓 $\cos \theta$ 轉換成 $\sin \theta$ ，我們考慮

$$\frac{\cos \theta - 1}{\theta} = \frac{(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{\theta(\cos \theta + 1)} = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta(\cos \theta + 1)} = \frac{-\sin^2 \theta}{\theta(\cos \theta + 1)} = -\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}.$$

注意當 $\theta \rightarrow 0$ 時 $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ 且 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \rightarrow \frac{0}{1+1} = 0$ 。故得證

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0. \quad (2.6)$$

將式子 (2.5), (2.6) 代入式子 (2.4), 可得 $\sin' x_0 = \cos x_0$ 。因為這是對任意實數 x_0 都成立, 故知 $\sin x$ 的導函數為 $\cos x$, 亦即

$$\sin' x = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

接下來我們便可利用三角函數之間的關係以及導函數性質得到其他三角函數的導函數。首先看 $\cos x$ 的導函數。由於 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 兩邊微分得

$$\cos' x = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

知道 $\sin x, \cos x$ 的導函數, 我們就可用 quotient rule 處理 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 的導函數。

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

這裡我們用到了 $\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 以及 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 。

同理, 我們可以用 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 處理 $\cot x$ 的導函數。這裡我們由 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ 直接利用倒數性質處理。

$$\cot' x = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{-\tan' x}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{-2} = -(\sin x)^{-2} = -\csc^2 x.$$

同樣的由 $\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$ 以及倒數性質可得

$$\begin{aligned} \sec' x &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x, \\ \csc' x &= \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} = -\cot x \csc x. \end{aligned}$$

我們看一下利用這些三角函數微分的例子。

例子 2.2.1 (BioCalc.). Example 3.4.7 探討 $f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ 在何處會有水平切線, 亦即找出 x_0 使得 $f'(x_0) = 0$ 。利用 quotient rule 以及 $\sec x, \tan x$ 的導函數, 經由化簡可得 $f'(x) = \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$ 。我們也可以將 $f(x)$ 用 $\sin x, \cos x$ 來表示, 再用 quotient rule 處理。亦即

$$f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x + \sin x}.$$

因此

$$f'(x) = \frac{-(\cos x + \sin x)'}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{1 + 2 \sin x \cos x}.$$

這兩個方法得到 $f(x)$ 的導函數其實是一樣的。無論如何 $f'(x) = 0$ 發生在 $\sin x - \cos x = 0$ (也等同於 $\tan x = 1$), 所以在 $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 時, 會有水平切線。 $\#$

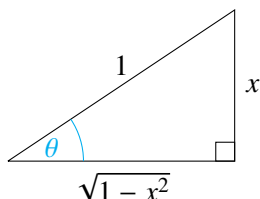
接下來, 我們探討三角函數的反函數, 即反三角函數的導函數。首先看 $\sin^{-1} x$ 的導函數。由 $\sin(\sin^{-1} x) = x$, 左邊微分得

$$\sin'(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1} x)' = \cos(\sin^{-1} x) \cdot (\sin^{-1} x)'$$

等於右邊微分 1，故知 $\sin^{-1} x$ 的導函數為 $\frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$ 。這個函數還可以化簡成我們熟悉的樣子。依定義 $\sin^{-1} x$ 表示的是一個（弧度量）的角度 θ ，且 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ （即 $\sin^{-1} x$ 的值域）滿足 $\sin \theta = x$ 。所以 $\cos(\sin^{-1} x) = \cos \theta$ ，由於需滿足 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x^2$ 且 $\cos \theta \geq 0$ ，故得 $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$ 。因此， $\sin^{-1} x$ 的導函數為

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

其實要化簡像 $\cos(\sin^{-1} x)$ 這樣的三角與反三角的合成函數，可以把反三角函數看成角度函數設為 θ ，再畫角度為 θ 相對應的直角三角形。例如 $\theta = \sin^{-1} x$ ，所以畫出如下 $\sin \theta = x$ 的直角三角形各邊長關係：



就可得 $\cos(\sin^{-1}(x)) = \cos \theta = \sqrt{1 - x^2}$ 以及 $\tan(\sin^{-1}(x)) = \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ 。

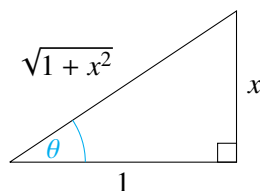
因為 $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ （由 $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 可得），所以兩邊微分就可得 $\cos^{-1}(x)$ 的導函數為

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

另一個很重要的反三角函數 $\tan^{-1} x$ 的導函數，依然可由 $\tan(\tan^{-1} x) = x$ 推導。將左邊微分且利用 $\tan' x = \sec^2 x$ 可得

$$(\tan(\tan^{-1} x))' = \tan'(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1} x)' = \sec^2(\tan^{-1} x) \cdot (\tan^{-1} x)'$$

等於右邊微分 1，故知 $\tan^{-1} x$ 的導函數為 $\frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)}$ 。其中 $\sec^2(\tan^{-1} x)$ 可以化簡成我們熟悉的樣子。首先令 $\tan^{-1} x = \theta$ ，由 $\tan \theta = x$ 畫出如下的直角三角形各邊長關係：



就可得 $\sec(\tan^{-1}(x)) = \sec \theta = \sqrt{1 + x^2}$ ，因此 $\tan^{-1} x$ 的導函數為

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

例子 2.2.2. [BioCalc.] 3.7.9(b) 求 $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$ 的導函數，由 product rule 和 chain rule 可得 $f'(x) = \arctan \sqrt{x} + x \cdot (\arctan \sqrt{x})' = \arctan \sqrt{x} + x \cdot (\arctan' \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})')$ ，其中 $\arctan' \sqrt{x} = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{1 + x}$ 而 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 。所以 $f'(x) = \arctan \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)}$ 。 #

至於 $\cot^{-1} x$ 的導函數，由於 $\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ ，所以

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = -\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

另外兩個反三角函數 $\sec^{-1} x, \csc^{-1} x$ 的導函數以後可能比較少用到。不過為了完整性，我們還是探討一下。由 $\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x}$ (因 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$)，兩邊微分得

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \arccos' \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

注意 $\sqrt{x^4-x^2}$ 中若要將 x^2 提出根號，由於 x 有可能是負的，所以應寫成 $|x|\sqrt{x^2-1}$ 。

最後 $\csc^{-1} x$ 的導函數，由於 $\csc^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$ ，所以

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = -\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

習題 2.7. 請做以下有關三角函數的微分：

$$f(\theta) = \frac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}; \quad y = \frac{1 + \sin x}{x + \cos x}; \quad y = e^{x \cos x}; \quad y = \sec^x + \tan^2 x$$

$$y = \cot^2(\sin \theta); \quad f(x) = \sin(\ln x); \quad f(x) = \ln(\sin^2 x); \quad f(x) = \sin x \ln(5x).$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.4.(23, 24); 3.5(21, 25, 33); 3.7(3, 4, 9))

習題 2.8. 請做以下有關 $\tan^{-1}$ 的微分：

$$y = (\tan^{-1} x)^2; \quad y = \tan^{-1}(x^2); \quad y = \arctan(\cos \theta).$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.7.43, 3.7.44, 3.7.45)

2.2.3. 隱函數的微分. 給定函數 $f(x)$ ，在坐標平面上 x 坐標為 x_0 且 y 坐標為 $f(x_0)$ 的點 $(x_0, f(x_0))$ 就是此函數圖形上的一點。也就是說此函數圖形上的任一點 (x, y) 都會符合 x, y 的方程式 $y = f(x)$ 。反過來說任何符合一個 x, y 方程式的點 (x, y) 都可形成坐標平面上的圖形，一般稱為曲線。此曲線未必會是一個函數的圖形，不過在曲線上任一點 (x_0, y_0) 附近的圖形，都可以看成是一個函數在此範圍的圖形，這個函數就成為此曲線在 (x_0, y_0) 附近的“隱函數” (*implicit function*)。

考慮單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ ，它不是一個函數的圖形，但在圓上點 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 附近的圖形就和函數圖形 $y = \sqrt{1-x^2}$ 一致，所以我們可以說 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 就是圓 $x^2 + y^2 = 1$ 在點 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 附近的隱函數。因此若要求圓 $x^2 + y^2 = 1$ 在點 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 的切線斜率，我們就可將 $f(x)$ 微分，得 $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ，再代入 $x = \frac{1}{2}$ ，得到斜率為 $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ 。

不過並不是所有坐標平面上的曲線上的點都可以很容易寫下它附近的隱函數。[BioCalc.] Example 3.5.12 的曲線 $x^3 + y^3 = 6xy$ 就是一例。隱函數的微分就是把方程式的 y 視為 x 的隱函數，然後對方程式兩邊對 x 微分，其中 y 對 x 的微分以 y' 表示。由於微分後兩邊仍維持相等，所以就可以得到有關 y' 的等式。這裡要注意的是：隱函數的微

分是想像 y 以 x 的函數 $f(x)$ 代入，所以依合成函數 chain rule，對 y 微分後還要乘上 y' (即 $f'(x)$) 才完成對 x 的微分。例如 y^2 對 x 微分，可看成 $(f(x))^2$ 對 x 微分，所以應為 $2(f(x)) \cdot f'(x)$ 。換回 y 的寫法就是 $(y^2)' = 2y \cdot y'$ 。千萬別寫成 $(y^2)' = 2y$ 忘了乘上 y' 。

例如前面單位圓的方程式為 $x^2 + y^2 = 1$ ，左邊對 x 微分為 $(x^2 + y^2)' = (x^2)' + (y^2)' = 2x + 2y \cdot y'$ ；右邊對 x 微分為 $1' = 0$ ，故得 $x + y \cdot y' = 0$ ，因此在 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 這一點，即 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的切線斜率 y' 滿足 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y' = 0$ ，解得 $y' = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ 。我們再看 [BioCalc.] 的 Example 3.5.12：

例子 2.2.3. 求曲線 $x^3 + y^3 = 6xy$ 在點 $(3, 3)$ 的切線方程式。首先注意點 $(3, 3)$ ，即 $x = 3, y = 3$ 確實滿足方程式，也就是 $3^3 + 3^3 = 6 \cdot 3 \cdot 3$ (否則點不在此曲線上，求隱函數微分無意義)。將曲線方程式兩邊對 x 微分，得 $3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 6y + 6xy'$ 。因此兩邊代入 $x = 3, y = 3$ 得 $27 + 27y' = 18 + 18y'$ 。解得 $y' = -1$ ，亦即在點 $(3, 3)$ 的切線斜率為 -1 。因此切線方程式為 $(y - 3) = -(x - 3)$ ，即 $x + y = 6$ 。 #

隱函數的微分也可以運用在解反函數的導函數。例如 $\ln x$ 是 e^x 的反函數，若以若令 $y = \ln x$ ，我們有 $e^y = e^{\ln x} = x$ 。將 $e^y = x$ 兩邊對 x 微分可得 $e^y \cdot y' = 1$ ，因此得 $(\ln x)' = y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ 。注意這裡我們是要寫出導函數，不是如前面求在某一微分值的，所以需要將 y' 寫成 x 的函數。

前面提過，取對數可以將複雜的乘法、除法以及指數問題化成簡單的加、減、乘的問題。所以若要求一個有複雜的乘法、除法以及指數相關的函數的導函數，我們可以先令該函數為 y ，再取自然對數 ($\ln$)，得到 $\ln y$ 的等式，再利用隱函數微分求出 y' 。例如 [BioCalc.] Example 3.7.7 求 $f(x) = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2 + 1}}{(x + 2)^5}$ 的導函數。可令 $y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$ ，取自然對數得 $\ln y = \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 5 \ln(3x + 2)$ 。利用隱函數兩邊對 x 微分得

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} - 5 \cdot \frac{3}{3x + 2}.$$

注意，因為是求導函數，所以需要將 y' 寫成 x 的函數。故得

$$f'(x) = y' = y \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2} \right) = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5} \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2} \right).$$

我們再看一個有趣的指數的例子。

例子 2.2.4. 考慮函數 $f(x) = x^x$ (定義在 $x > 0$)。注意 x^x 不能看成是底數為 x 的指數函數，因為指數函數 b^x 的底數必需是一個固定的正實數 b 。所以不能因 b^x 的導函數是 $(\ln b)b^x$ 就斷定 x^x 的導函數是 $(\ln x)x^x$ 。同理 x^x 不能看成是次數為 x 的 power function，因為 power function x^r 的次數必需是一個固定的實數 r 。所以不能因 x^r 的導函數是 rx^{r-1} 就斷定 x^x 的導函數是 $xx^{x-1} = x^x$ 。

我們可用隱函數的微分技巧找到 x^x 的導函數。令 $y = x^x$ ，取自然對數得 $\ln y = x \ln x$ 。兩邊對 x 微分得

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

所以 x^x 的導函數為

$$\frac{d}{dx}(x^x) = y \cdot (1 + \ln x) = x^x + (\ln x)x^x,$$

恰好是剛才錯誤的兩個導函數之和。

#

[BioCalc.] Example 3.7.8 求 $x^{\sqrt{x}}$ 的導函數，也是用相同的方法處理，可得

$$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} \right).$$

習題 2.9. 請利用隱函數的微分以 x, y 表示 y' ：

$$4 \cos x \sin y = 1; \quad e^{x/y} = x - y.$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.5.71, 3.5.73)

習題 2.10. 請求以下曲線在指定點的切線方程式：

(1) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ 在點 $(0, \frac{1}{2})$ 的切線方程式。

(2) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 在點 $(-3\sqrt{3}, 1)$ 的切線方程式。

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.5.79, 3.5.80)

習題 2.11. 請利用取 $\ln$ 的方式求導函數：

$$y = \sqrt{x}e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}; \quad y = x^{\cos x}; \quad y = (\cos x)^x.$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.7.34, 3.7.38, 3.7.39)

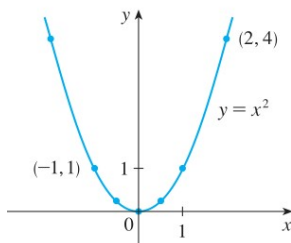
2.3. 微分的應用

知道一個函數的導函數，可以很容易讓我們求得該函數在任一可微分點的微分值。從微分值是函數圖形在該點切線斜率出發，可以發展許多的應用。包括以切線估計附近的值、了解瞬間增長消退的速度、遞增或遞減情況進而到掌握函數的圖形。由於對圖形的了解也能讓我們知道函數在一區域的最大、最小值和均衡點問題。也可利用微分來幫我們處理不定型極限問題。

2.3.1. 函數圖形. 知道函數 $f(x)$ 在 x_0 的微分值 $f'(x_0)$ ，我們便可得到函數圖形 $y = f(x)$ 在點 $(x_0, f(x_0))$ 的切線方程式。因為此切線斜率為 $f'(x_0)$ 且通過點 $(x_0, f(x_0))$ ，所以切線方程式為 $(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$ 。令 $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 則函數圖形 $y = g(x)$ 就是此切線，又因為此切線 $y = g(x)$ 在 $x = x_0$ 附近和 $y = f(x)$ 非常接近，所以當 x_1 和 x_0 很近但 $f(x_1)$ 的值不好求時，我們便可用 $g(x_1) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$ 大致估計 $f(x_1)$ 的值，這就是所謂的“線性估計”(linear approximation)。

例如 [BioCalc.] Example 3.8.1 討論函數 $f(x) = \sqrt{x+3}$ 在 $x = 1$ 的線性估計。由於 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ ，我們知 $f'(1) = \frac{1}{4}$ ，所以 $y = f(x)$ 在點 $(1, f(1)) = (1, 2)$ 的切線方程為 $y = \frac{1}{4}(x - 1) + 2$ ，也就是說 $g(x) = \frac{1}{4}(x + 7)$ 是 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 的線性估計函數。例如要估計 $f(0.98)$ 的值，因為 $f(0.98) = \sqrt{3.98}$ 不好求，且 0.98 在 1 附近，所以我們可以用 $g(0.98) = \frac{7.98}{4} = 1.995$ 來估計 $f(0.98)$ ，也就是說 $\sqrt{3.98} \approx 1.995$ （當然若單純考慮 $\sqrt{3.98}$ 的近似值，我們可以用函數 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x = 4$ 的線性估計）。

當我們把函數 $f(t)$ 的變數 t 看成時間，在時間 t 的值 $f(t)$ 看成數量（或距離）。給定一段時間例如 t_1 到 t_2 ，則 $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ 表示在這段期間平均成長（若是負的表示減少）的速度。所以當 $t_2 \rightarrow t_1$ ，我們就可把 $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ 的極限值 $f'(t_1)$ 視為在 t_1 這個時間點的瞬間成長（若是負的表示減少）速度。從這裡我們可以了解若 $f'(t_1) > 0$ ，表示在 t_1 附近，數量會漸漸增加，我們稱函數在 t_1 為遞增（increasing）；反之，若 $f'(t_1) < 0$ ，表示在 t_1 附近，數量會漸漸減少，我們稱函數在 t_1 為遞減（decreasing）。例如下圖為 $f(x) = x^2$ 的圖形。已知 $f'(x) = 2x$ 。



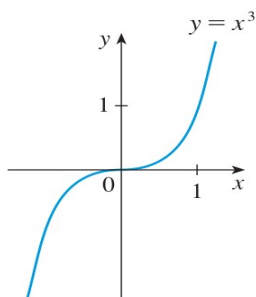
我們有 $f(-1) = 1$ 雖然大於 0，但 $f'(-1) = -2 < 0$ 。表示 $f(x)$ 在 $x = -1$ 附近的值是遞減的。從圖形可看出 $f(x)$ 在 $x = -1$ 圖形往下降（取值越來越小）。而 $f(2) = 4$ 且 $f'(2) = 4 > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的值是遞增，越來越大。

若 $f(x)$ 在 x_0 的微分值为 0，就有許多情況可能發生。例如上圖中 $f(x) = x^2$ ，我們有 $f'(0) = 0$ 。我們發現 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的左邊是遞減的（微分值小於 0），右邊是遞增的（微分值大於 0），所以 $f(x)$ 的圖形在 $x = 0$ 出現頂點，這個情況我們稱函數在此時有局部極值。同樣的，若考慮 $f(x) = -x^2$ ，雖然 $f'(x) = -2x$ ，我們仍有 $f'(0) = 0$ ，不過圖形是倒過來的， $f(x)$ 在 $x = 0$ 的左邊是遞增的，右邊是遞減的，所以在 $x = 0$ 仍然出現頂點，仍為局部極值。要注意，並不是所有微分等於 0 的情況都會出現局部極值，例如 $f(x) = x^3$ ，雖然 $f'(x) = 3x^2$ 仍有 $f'(0) = 0$ ，但在 0 左右兩邊微分值都大於 0，都是遞增的。也就是說此時 $f(x)$ 在 0 附近仍為遞增（可以想像車子行進中停下來再繼續前行，行進距離一直增加）。因此要注意若 $f'(x_0) = 0$ ，我們必需由 $f(x)$ 在 x_0 左右兩側的遞增遞減情況，來判斷 $f(x)$ 在 x_0 是遞增、遞減或有局部極值。

當 $f'(t_1) < f'(t_2)$ 從成長速度的角度來看就是在時間 t_2 成長的速度比在 t_1 的成長速度快，也就是切線的斜率較陡峭。例如 $f(x) = x^2$ 的情形， $f'(1) = 2$ ，在 $x = 1$ 附近圖形切線斜率改變情況是漸增到 2 後繼續增加，這樣的情形我們便稱函數圖形在該點附近為凹向上

(concave upward)，反之若在該點附近切線斜率是遞減，則稱凹向下 (concave down)。例如 $f(x) = -x^2$ 在 $x = 1$ 就是凹向下的。既然要用切線斜率來判斷函數的凹向，而函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 告訴我們在每一點的切線斜率，所以 $f'(x)$ 在 x_0 的微分值的正、負情形便是告訴我們在 x_0 附近其切線斜率變化是遞增或是遞減。因此我們需要探討的是 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 在 x_0 的微分值。

$f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 在 x_0 的微分值稱為 $f(x)$ 在 x_0 的二次微分，記為 $f''(x_0)$ 。而 $f'(x)$ 的導函數就稱為 $f(x)$ 的二階導函數 (second derivative) 記為 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ (這是 $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$ 的簡化)。一般來講我們是先推導出 $f(x)$ 的二階導函數 $f''(x)$ 再代 x_0 得到其二次微分的值 $f''(x_0)$ 。例如要求 $f(x) = x^3 - x^2$ 在 $x = 1$ 的二次微分，由 $f(x)$ 的 (一階) 導函數為 $f'(x) = 3x^2 - 2x$ ，得其二階導函數為 $f''(x) = 6x - 2$ 。所以知道 $f''(1) = 6 - 2 = 4$ 。利用二階導函數，我們便可以知道當 $f''(x_0) > 0$ 時表示 $f'(x)$ 在 x_0 附近遞增。所以 $f(x)$ 的圖形在 x_0 附近是凹向上；而若 $f''(x_0) < 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形在 x_0 附近是凹向下。要注意的還是 $f''(x_0) = 0$ 的情況，前面提過此時 $f'(x)$ 在 x_0 的情況很多，若是遞增、遞減就表示在 x_0 附近分別為凹向上、凹向下。例如 $f(x) = x^4$ 、 $g(x) = -x^4$ ，它們在 $x = 0$ 的二次微分皆為 0，且圖形分別為凹向上、凹向下；又若 $f'(x)$ 在 x_0 左右兩邊一邊是遞增、另一邊遞減 (即 $f'(x)$ 在 x_0 有局部極值)，則在 x_0 的左右兩側函數圖形凹向互反，我們便稱此時圖形在 x_0 發生凹向轉變 (inflection) 且稱點 $(x_0, f(x_0))$ 為 $f(x)$ 圖形上的“反曲點” (inflection point)。例如下圖為 $f(x) = x^3$ 的圖形，因 $f''(x) = 6x$ ，得 $f''(0) = 0$ ，而圖形在 $x = 0$ 的左邊為凹向下 (二次微分為負)、右邊為凹向上 (二次微分為正)，所以原點 $(0, 0)$ 就是 $y = x^3$ 圖形上的反曲點。



我們也要強調千萬不要被凹向上的“向上”兩字誤導，以為凹向上的點函數會遞增。凹向上指的是在該點函數圖形在切線上方，例如 $f(x) = x^2$ 在 $x = -1$ 時遞減的，但 $f''(-1) = 2$ ，圖形在 $x = -1$ 為凹向上。同樣的，凹向下指的是在該點函數圖形在切線下方，所以未必是遞減的，例如 $f(x) = x^3$ 在 $x = -1$ 遞增，但圖形為凹向下。

目前我們探討的都是函數在一個點附近遞增、遞減以及凹向的問題。我們只知道在這一點“附近”的狀況，但未明確探討該點“附近”所指的範圍。接下來，我們要明確的瞭解函數遞增、遞減以及凹向所在的範圍。為了簡單起見，我們考慮函數 $f(x)$ 在討論的區間 I 都是可微的。現假設在 I 中有兩點 a, b 其中 $a < b$ 且 $f(a) = f(b)$ 。如果 $f(x)$ 在 a, b 之間為常數函數 (即 $f(x)$ 是定值 $f(a)$)，當然 $f(x)$ 在 a, b 之間的導函數為 0。另一方面，如果

$f(x)$ 在 a, b 之間不為常數函數，表示函數值一開始會從 $f(a)$ 往上或往下，然而不管如何最後要回到 $f(b) = f(a)$ ，所以圖形一定會有頂點出現。在頂點處不可能是遞增，也不可能是遞減，所以其微分必為 0，也就是說存在一點 c 介於 a, b 之間滿足 $f'(c) = 0$ 。這就是 *Rolle's Theorem*。

Rolle's Theorem 談的是 $f(a) = f(b)$ 的情況，事實上，它可以推廣到 $f(a) \neq f(b)$ 的情況。一樣假設 $a < b$ ，考慮連結 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ 兩點的直線 $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ 以及函數 $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$ 。我們有 $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ 以及 $g(b) = f(b) - f(b) = 0$ 。由於 $g(x)$ 符合 *Rolle's Theorem* 的假設（即 $g(a) = g(b)$ ）故存在 c 介於 a, b 之間滿足 $g'(c) = 0$ 。然而 $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 故此 c 滿足 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 。這就是有關微分重要的定理，稱為“均值定理”（*Mean Value Theorem*）。

Theorem 2.3.1 (*Mean Value Theorem*). 假設函數 $f(x)$ 在區間 I 可微且 $a, b \in I$ 。則存在 c 介於 a, b 之間使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

注意 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 是連接函數圖形上 $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$ 兩點的割線斜率，所以均值定理告訴我們函數圖形上任兩點所形成的割線，一定可在圖形中這兩點之間找到一點其切線與此割線平行。另一方面 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 是函數從 a 到 b 的平均變化率，所以稱之為均值定理。

有均值定理，我們就可以處理以下有關遞增、遞減的性質。

Theorem 2.3.2. 假設函數 $f(x)$ 在區間 I 可微。

- (1) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f'(c) > 0$ ，則 $f(x)$ 在區間 I 為遞增。
- (2) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f'(c) < 0$ ，則 $f(x)$ 在區間 I 為遞減。
- (3) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f'(c) = 0$ ，則 $f(x)$ 在區間 I 為常數。

Proof. 我們先處理 (1) 的情況，即所有 I 中的點 c 皆滿足 $f'(c) > 0$ 。要證明 $f(x)$ 在 I 為遞增，就是要證明對任意 $a, b \in I$ 且 $a < b$ 都會滿足 $f(a) < f(b)$ 。由均值定理（*Theorem 2.3.1*），我們知道存在 c 介於 a, b 之間滿足 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 。然而 c 在 a, b 之間且 $a, b \in I$ ，故 $c \in I$ 。所以由 $f'(c) > 0$ 以及 $b > a$ ，得證 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) > 0$ 。同樣利用均值定理，在 (2) 的情況，我們有 $f'(c) < 0$ ，所以得證對 I 中任意兩點 $a < b$ 皆有 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) < 0$ ，得證 $f(x)$ 在區間 I 為遞減。至於 (3) 的情況由於 $f'(c)$ 都等於 0，所以對 I 中任意兩點 a, b 皆有 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0$ ，所以 $f(x)$ 在區間 I 為常數。□

注意 (3) 的情形。過去我們用微分定義推得常數函數的導函數是零函數。現在我們用均值定理，證明了反向也是對的，也就是說一個函數的導函數若是零函數（即在實數微分皆為 0）則此函數必為常數函數。

我們可用 $f''(x)$ 為 $f'(x)$ 的導函數將 *Theorem 2.3.2* 的 $f(x)$ 以 $f'(x)$ 取代，推得以下有關函數圖形凹向的性質。

Theorem 2.3.3. 假設函數 $f(x), f'(x)$ 在區間 I 皆可微。

- (1) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f''(c) > 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向上。
- (2) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f''(c) < 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向下。
- (3) 若對任意 $c \in I$ 皆滿足 $f''(c) = 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為一直線。

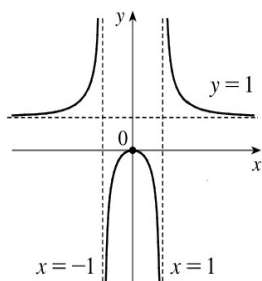
Proof. 令 $g(x) = f'(x)$ 。由 (1) 的假設知對任意 $c \in I$ 皆滿足 $g'(c) = f''(c) > 0$ 所以由 Theorem 2.3.2 (1) 知 $g(x)$ 在 I 為遞增，這等同於 $y = f(x)$ 上各點切線斜率會隨著 x 增加而增加，所以 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向上。而 (2) 的假設表示 $g(x)$ 在 I 為遞減，這等同於 $y = f(x)$ 上各點切線斜率會隨著 x 增加而減少，所以 $f(x)$ 的圖形在區間 I 為凹向下。(3) 的假設由 Theorem 2.3.2 (3) 知 $g(x)$ 在 I 為常數 m ，因此在區間 I ， $f'(x) = m$ 。現今 $h(x) = f(x) - mx$ ，則對任意 $c \in I$ 皆滿足 $h'(c) = f'(c) - m = 0$ 。因此再次利用 Theorem 2.3.2 (3) 知 $h(x) = f(x) - mx$ 在 I 為常數 r ，亦即 $f(x) = mx + r$ ，得證 $y = f(x)$ 在區間 I 的圖形為直線 $y = mx + r$ 。□

了解如何判定一個函數 $f(x)$ 在一個區間、遞減和凹向，我們便可以畫出 $f(x)$ 的圖形。首先利用 $x \rightarrow \pm\infty$ 是否 $f(x)$ 極限存在，得知是否有水平漸近線並依其極限值畫出水平漸近線。接著考慮是否存在點 a 使得當 $x \rightarrow a^+$ 或 $x \rightarrow a^-$ ， $f(x)$ 會趨近 $\pm\infty$ （通常會是 $\frac{1}{0}$ 型的極限）。然後分別找出 $f'(x) > 0$ 、 $f'(x) < 0$ 的區間範圍，以決定 $f(x)$ 遞增、遞減的區間，之後再找出 $f''(x) > 0$ 、 $f''(x) < 0$ 的區間範圍，以決定 $f(x)$ 凹向上、凹向下的區間。最後描出重要的點（ y 截距、 x 截距，以及 $f'(x) = 0, f''(x) = 0$ 的點等），分別從同一個凹向的區間依其、遞減的狀況描繪出圖形。我們看以下的例子。

例子 2.3.4. [BioCalc.] Exercise 4.2.37 要求畫出 $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ 的圖形。由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 以及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ，知道圖形有一水平漸近線 $y = 1$ 。而當分母 $x^2 - 1 = 0$ 時，即 $x = \pm 1$ ，分子為 1，也就是說當 $x \rightarrow -1$ 和 $x \rightarrow 1$ 的情況皆為 $\frac{1}{0}$ 型的極限，因此 $x = -1$ 和 $x = 1$ 為 $y = f(x)$ 圖形的兩個鉛直漸近線。接下來藉由 $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$ 以及 $(x^2 - 1)^2$ 恆正，我們知當 $x < 0$ 時 $f'(x) > 0$ ；而當 $x > 0$ 時 $f'(x) < 0$ 。換言之 $f(x)$ 在區間 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, 0)$ 遞增；而在區間 $(0, 1)$ 以及 $(1, \infty)$ 遞減。又由於 $f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$ 以及 $6x^2 + 2, (x^2 - 1)^2$ 都恆大於等於 0，我們知當 $x^2 - 1 > 0$ （即 $x < -1$ ； $x > 1$ ）時 $f''(x) > 0$ ；而當 $x^2 - 1 < 0$ （即 $-1 < x < 1$ ）時 $f''(x) < 0$ 。換言之 $f(x)$ 在區間 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, \infty)$ 凹向上；而在區間 $(-1, 1)$ 為凹向下。又代 $x = 0$ 得 y 截距為 $f(0) = 0$ ，故圖形通過原點，注意同時因 $f'(0) = 0$ ，所以在原點有水平切線。

現在我們有足夠的資訊畫出 $y = f(x)$ 的圖形。我們從 x 軸左側開始，照著凹向的區間分割順序依序將各區間的圖形畫出。首先考慮 x 在區間 $(-\infty, -1)$ ，為了確保畫在正確位置（漸近線上方或下方）可以先標出一點，例如 $(-2, f(-2)) = (-2, \frac{4}{3})$ 。知道此區域圖形在漸近線 $y = 1$ 的上方（因 $f(-2) = \frac{4}{3} > 1$ ），由於在此區間圖形是凹向上且遞增，所以在負

無窮遠處沿著 $y = 1$ 的上方畫一個凹向上且遞增的曲線。在通過點 $(-2, \frac{4}{3})$ 後繼續往上在接近 $x = -1$ 處漸漸逼近鉛直漸近線 $x = -1$ 。接下來畫 x 在區間 $(-1, 1)$ 之間的圖形，在此區間為凹向下。因為在 $(-1, 0)$ 之間為遞增，所以在 $x = -1$ 右側下方貼近漸近線 $x = -1$ 以凹向下遞增方式畫出曲線通過原點。接著因在 $(0, 1)$ 之間為遞減，所以在通過原點之後以凹向下遞減方式畫出曲線漸漸往下貼近鉛直漸近線 $x = 1$ 。注意在這部分原點是一頂點。最後 x 在區間 $(1, \infty)$ 的圖形，在此區間為凹向上且遞減。我們依然可先描出一點，例如 $(2, f(2)) = (2, \frac{4}{3})$ 。確認圖形在漸近線 $y = 1$ 上方後就可在貼近鉛直漸近線 $x = 1$ 的右上方往下畫出一凹向上且遞減的曲線通過點 $(2, \frac{4}{3})$ ，之後再繼續畫凹向上且遞減的曲線漸漸貼近水平漸近線 $y = 1$ 。下圖便是 $y = f(x)$ 的圖形。



注意此圖形對稱於 y 軸（因 $f(-x) = f(x)$ 為偶函數），所以我們也可以先畫出 $x \leq 0$ 這部分的圖形再利用對稱性畫出 $x > 0$ 的部分。 #

函數 $f(x)$ 在 x_0 的線性估計 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 可以視為：我們想在 x_0 附近用一次多項式逼近 $f(x)$ 。當然也可考慮用二次多項式逼近。由於在 x_0 的二次微分更進一步描繪函數在 x_0 凹向（彎曲程度），所以可以預期若在 x_0 二次微分取值相同，兩函數就能在 x_0 附近更貼近。所以我們可以考慮二次多項式函數 $g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ ，希望找到 a_0, a_1, a_2 使得 $g(x)$ 和 $f(x)$ 滿足 $g(x_0) = f(x_0)$, $g'(x_0) = f'(x_0)$ 以及 $g''(x_0) = f''(x_0)$ 。由此可得 $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$ 以及 $2a_2 = f''(x_0)$ 。也就是 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的二次逼近。我們稱之為 $f(x)$ 在 x_0 二次的 Taylor polynomial。

當然我們可以探討更高次的多項式逼近。二階導函數 $f''(x)$ 的導函數，就稱為 $f(x)$ 的三階導函數。用 $f'''(x)$ 或 $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ 表示。三階導函數在 x_0 的取值，就稱為在 x_0 的三次微分，記為 $f'''(x_0)$ 。當然還有更高階的導函數，當 $n \geq 4$ 後，函數 $f(x)$ 的 n 階導函數就用 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ 表示。例如當 $f(x) = e^x$ ，我們有 $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ 。而當 $f(x) = \ln x$ ，則 $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}, \dots$ 。

利用剛才探討的方式可得 $f(x)$ 在 x_0 三次的 Taylor polynomial 為

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

而到一般 n 次的 Taylor polynomial 就是

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

這裡 $n!$ 指的是 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ，稱為 n 階乘 (n factorial)。例如 [BioCalc.] Example 3.8.8 談到 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 的三次 Taylor polynomial，因為 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ 以及 $f'''(1) = 2$ ，所以可得此三次多項式為

$$(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

我們可以依此規律性得到更高次的 Taylor polynomials。事實上對於 $n \geq 3$ ， $f(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 的 n 次 Taylor polynomial 為

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

同樣的，當 $f(x) = e^x$ ，由於對任意正整數 k 皆有 $f^{(k)}(x) = e^x$ ，所以 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的 n 次 Taylor polynomial 為

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

習題 2.12. 利用線性估計，估計以下的值： $(2.001)^5$; $e^{-0.015}$; $\ln 1.05$.

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.8.11, 3.8.12, 3.8.13)

習題 2.13. 請畫以下函數圖形：

$$g(x) = 200 + 8x^3 + x^4; \quad B(x) = 3^{2/3} - x; \quad f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi; \quad f(x) = \ln(1 - \ln x).$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 4.2.28, 4.2.32, 4.2.36, 4.2.41)

習題 2.14. 請求以下函數在 $x = a$ 的 n 次 Taylor polynomial：

$$(1) f(x) = \sin \pi x, \quad n = 3, \quad a = 0.$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 2, \quad a = 4.$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 3.8.36, 3.8.38)

2.3.2. 最大值與最小值. 利用前一小節函數圖形的概念，可以幫助我們了解如何用微分來判定一個函數何時會有局部最大值與局部的最小值。知道這些局部極值發生處後，就可以找到函數在所討論區域的最大值與最小值了。這種找最大值、最小值的方法，在各領域都有重要的應用，稱為最佳化問題 (optimization problem)。不過在此不談論這些最佳化的應用問題。我們希望大家理解用微分處理最大值、最小值方法後，對於實際應用問題只要會將問題轉化成數學模型，就可迎刃而解。對於應用問題的例子請參考 [BioCalc.] Section 4.4.4。

首先介紹局部極值 (local extreme value) 的概念。當函數 $f(x)$ 在 x_0 附近 (亦即包含 x_0 的一個開區間上) 的取值都小於等於 $f(x_0)$ ，便稱 $f(x)$ 在 x_0 有局部極大值 (local maximum) $f(x_0)$ ；而若在 x_0 附近的取值都大於等於 $f(x_0)$ ，便稱 $f(x)$ 在 x_0 有局部極小值 (local minimum) $f(x_0)$ 。這兩種情況便稱 $f(x)$ 在 x_0 有局部極值。

我們知道當 $f'(x_0) > 0$ 時， $f(x)$ 在 x_0 附近為遞增；而當 $f'(x_0) < 0$ 時， $f(x)$ 在 x_0 附近為遞減。所以只有在 $f'(x_0) = 0$ (例如 $f(x) = x^2$ 在 $x_0 = 0$) 或 $f(x)$ 在 x_0 的微分不存在 (例

如 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 時，才有可能有局部極值發生，這是所謂 Fermat's Theorem。因此我們有以下的定義。

Definition 2.3.5. 對於函數 $f(x)$ ，若 $f(x)$ 在 x_0 的微分值為 0 或不存在，則稱 x_0 為 $f(x)$ 的 *critical number*。

要注意 critical number 只定義在函數有定義的地方。例如 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，雖然 $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ 在 $x = 0$ 無定義，但因 $f(x)$ 本身在 $x = 0$ 也無定義，所以 $x = 0$ 不能算是 $f(x)$ 的 critical number。

Fermat's Theorem 告訴我們只有當 x_0 是 $f(x)$ 的 critical numbers 時，才有可能在 x_0 有局部極值。所以，要找一個函數的局部極值發生處，我們只要先找到它的 critical numbers。不過並不是 critical number 都是局部極值發生處，例如前面提過 $f(x) = x^3$ 的情況，因為 $f'(0) = 0$ 所以 0 是 critical number，但是對於 $f(x) = x^3$ ，在 $x = 0$ 附近是遞增的（ $f'(x) = 3x^2$ 恆正），所以 $f(0) = 0$ 既不是局部最大也不是局部最小。針對 critical number，我們有以下判斷是否為局部極值發生處的方法。

Theorem 2.3.6 (First Derivative Test). 假設 x_0 是函數 $f(x)$ 的 *critical number*。

- (1) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 左側附近微分值都大於 0，而在 x_0 右側附近微分值都小於 0，則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最大值。
- (2) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 左側附近微分值都小於 0，而在 x_0 右側附近微分值都大於 0，則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最小值。
- (3) 如果 $f'(x)$ 在 x_0 左右側附近微分值都同號，則 $f(x)$ 在 x_0 取值不會是局部極值。

這個定理很容易理解，因為我們知道微分大於 0 表示遞增，小於 0 表示遞減。所以如果 $f(x)$ 在 x_0 左側微分大於 0 表示它在 x_0 左側漸漸遞增到 $x = x_0$ 時不增加了（微分等於 0）。而若過了 x_0 後（即在 x_0 右側）微分小於 0，表示 $f(x)$ 接著便遞減，因此在 x_0 有局部最大。同理可得其他情況。我們看以下的例子。

例子 2.3.7. 以下分別探討 [BioCalc.] Example 4.2.4, 4.2.8 以及 4.2.9 的局部極值問題。

- (1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 。微分得 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$ 。因此 $x = -1, 0, 2$ 為 $f(x)$ 的 critical numbers。而 $f'(x)$ 在 $x = -1$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 有局部最小值 $f(-1) = 0$ 。而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 左、右側取值分別為正、負。所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 有局部最大值 $f(0) = 5$ 。最後， $f'(x)$ 在 $x = 2$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 有局部最小值 $f(2) = -27$ 。
- (2) $g(x) = x^4 - 4x^3$ 。微分得 $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ 。因此 $x = 0, 3$ 為 $f(x)$ 的 critical numbers。而 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 左、右側取值皆為負。所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 遞減，不會有局部極值。而 $g'(x)$ 在 $x = 3$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $g(x)$ 在 $x = 3$ 有局部最小值 $g(3) = -27$ 。

(3) $h(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 。微分得

$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(6-x)^{1/3} - \frac{1}{3}x^{2/3}(6-x)^{-2/3} = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}.$$

因此 $x = 0, 6$ (微分不存在) 以及 $x = 4$ (微分等於 0) 為 $h(x)$ 的 critical numbers。而 $h'(x)$ 在 $x = 0$ 左、右側取值分別為負、正。所以 $h(x)$ 在 $x = 0$ 有局部最小值 $h(0) = 0$ 。而 $h'(x)$ 在 $x = 4$ 左、右側取值分別為正、負。所以 $h(x)$ 在 $x = 4$ 有局部最大值 $h(4) = 2^{5/3}$ 。最後, $h'(x)$ 在 $x = 6$ 左、右側取值皆為負。所以 $h(x)$ 在 $x = 6$ 遞減, 不會有局部極值。 #

我們也可以用函數在 critical number 的凹向, 來判斷其是否為局部最大或局部最小的發生處。如果是凹向下自然是局部最大, 而凹向上就是局部最小。又由於凹向可由二次微分的正負來判斷 (負為凹向下、正為凹向上), 所以我們有以下的定理。

Theorem 2.3.8 (Second Derivative Test). 假設函數 $f(x)$ 在 x_0 的微分值 $f'(x_0) = 0$ 。

- (1) 如果 $f''(x_0) < 0$, 則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最大值。
- (2) 如果 $f''(x_0) > 0$, 則 $f(x)$ 在 x_0 有局部最小值。

二次微分檢驗法 (Theorem 2.3.8) 比起一次微分檢驗法 (Theorem 2.3.6) 方便多了, 只要再做一次微分, 檢查在 critical number 的二次微分值正負即可。不過比起一次微分檢驗法, 二次微分檢驗法有其限制。首先它僅能檢驗微分值為 0 的 critical number, 因為微分值不存在的 critical number, 當然就不會有二次微分。另外它也不適用於二次微分為 0 或是不存在的情況。若遇到這些情況, 就只能用一次微分檢驗法了。

例子 2.3.9. 我們用二次微分檢驗法再次分別探討 [BioCalc.] Example 4.2.4, 4.2.8 以及 4.2.9 的局部極值問題。

- (1) 由 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 得二階導函數 $f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$ (注意推得一階導函數 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ 後不要先分解, 先求二階導函數後, 再回去分解一階導函數找 critical numbers)。因此分別代入 $f(x)$ 的 critical numbers $x = -1, 0, 2$, 得 $f''(-1) = 36 > 0$ 、 $f''(0) = -24 < 0$ 以及 $f''(2) = 72 > 0$ 。所以 $f(x)$ 在 $x = -1, 2$ 有局部最小值, 分別為 $f(-1) = 0$, $f(2) = -27$ 。而在 $x = 0$ 有局部最大值 $f(0) = 5$ 。
- (2) 由 $g(x) = x^4 - 4x^3$ 得二階導函數 $g''(x) = 12x^2 - 24x$ 。因此分別代入 $g(x)$ 的 critical numbers $x = 0, 3$ 得 $g''(0) = 0$ 以及 $g''(3) = 36 > 0$ 。所以我們可以確認 $g(x)$ 在 $x = 3$ 有局部最小值 $g(3) = -27$ 。不過在 $x = 0$ 就無法用二次微分檢驗法, 只能回到一次微分檢驗法 (參見例子 2.3.7) 知 $g(x)$ 在 $x = 0$ 遞減, 不會有局部極值。
- (3) 由 $h(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 得二階導函數 $h''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$ 。由於 $x = 0, 6$ 這兩個 critical number 是讓 $h(x)$ 微分不存在的點, 無法用二次微分檢驗法, 因此我們只能代入 critical number $x = 4$ 得 $h''(4) = -2^{-4/3} < 0$ 。所以我們只能確認 $h(x)$ 在 $x = 4$ 有局部最大值 $h(4) = 2^{5/3}$ 。其餘兩點 $x = 0, 6$ 只能回到一次微分檢驗法 (參

見例子 2.3.7) 知 $h(x)$ 在 $x = 0$ 有局部最小值 $h(0) = 0$; 但在 $x = 6$ 遞減, 不會有局部極值。 #

了解了局部極值, 我們接下來談絕對極值。所謂函數 $f(x)$ 在一個區域的絕對極值, 就是指在這區域中的最大值與最小值, 分別稱為絕對最大值 (absolute maximum) 以及絕對最小值 (absolute minimum)。如何找到絕對極值呢? 我們不可能將整個區域的點代入比較, 最好的方法就是找到可能為極值的點再代入比較。由於一般要探討的區域都是一些區間的聯集, 而可能為極值的點就是函數在各區間的局部的極值以及各區間的端點。所以我們只要將可能發生局部極值的點, 即 critical numbers 以及各個端點一一代入函數比較大小即可。注意這裡我們只是要找到最大最小值, 所以可以不必管這些 critical numbers 是否會是局部最大或局部最小。另外由於這些區間可能不包含端點 (例如開區間), 仍然要將這些端點代入比較。不過最後的最大值若僅發生在這些未被包含的端點上, 就知最大值不存在。同理最小值若僅發生在未被包含的端點上, 就知最小值不存在。我們看以下的例子。

例子 2.3.10 (BioCalc.). Example 4.1.6 討論函數 $f(x) = x(x-3)(8-x)$ 在 $0 \leq x \leq 9$ 的絕對最大值與絕對最小值。由於 $f(x) = -x^3 + 11x^2 - 24x$, 我們有 $f'(x) = -3x^2 + 22x - 24 = -(3x-4)(x-6)$, 因此 $x = \frac{4}{3}, 6$ 為 critical numbers。又由於討論的區域端點為 $x = 0, 9$, 代入這四點得 $f(0) = 0, f(\frac{4}{3}) = -\frac{400}{27}, f(6) = 36$ 以及 $f(9) = -54$ 。所以 $f(x)$ 在閉區間 $[0, 9]$ 有絕對最大值 36 (發生於 $x = 6$), 以及絕對最小值 -54 (發生於 $x = 9$)。

若問題改為 $0 < x < 9$ 這個開區間的絕對最大值與最小值。仍然要代端點 $x = 0, 9$ 進去比較。不過此時最小值發生處 9 不在範圍內, 所以只能說 $f(x)$ 在閉區間 $(0, 9)$ 有絕對最大值 36 (發生於 $x = 6$), 但無絕對最小值 (因為每一點代值都大於 -54 , 但在開區間 $(0, 9)$ 沒有任一點的取值會是 -54)。當初若沒有將 $x = 9$ 代入比較就會誤以為最小值為 $-\frac{400}{27}$ 。又若討論的區域為 $0 < x \leq 3$, 此時 critical number $x = 6$ 不在範圍內所以不必帶入, 但端點改為 $x = 0, 3$ 所以只要比較 $f(0) = 0, f(\frac{4}{3}) = -\frac{400}{27}$ 以及 $f(3) = 0$ 。 $f(x)$ 在區間 $(0, 3]$ 有絕對最小值 $-\frac{400}{27}$ (發生於 $x = \frac{4}{3}$)。至於絕對最大值, 由於 $x = 3$ 仍在此區間所以 0 是絕對最大值但只發生於 $x = 3$ 。 #

最後我們說明一下, 求絕對最大值與最小值的區域沒有邊界的情況。此時我們可以利用 $x \rightarrow \infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 來取代其邊界值。若忘了看此極限會造成誤判的情形。當然了, 若最大值或最小值發生在此極限, 則此極值依然不存在。例如所要考慮的函數是 $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$, 區域是 $(-\infty, 2]$, 此時除了代此區間內的 critical numbers 以及 2 比較大小外, 還要考慮 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 與它們的大小關係。由 $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(x+1)(x-1)$ 知 critical numbers 為 $-1, 0, 1$ 。分別代入 $f(x)$ 得 $f(-1) = f(1) = 3, f(0) = 2$ 。再代端點 $f(2) = -6$ 。若忘了加入 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 比較, 會誤以為絕對最小值為 -6 。事實上 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 的絕對最大值為 3, 但沒有絕對最小值。

習題 2.15. 試找到以下函數的 critical numbers:

$$h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}; \quad g(\theta) = 4\theta - \tan \theta; \quad h(t) = 3t - \arcsin t; \quad f(x) = x^2 e^{-3x}; \quad f(x) = x^{-2} \ln x.$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 4.1(33, 36, 38, 39, 40))

習題 2.16. 試找到以下函數的局部極值發生處，並求其極值：

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3; \quad f(x) = x^2 \ln x; \quad f(x) = x + \sqrt{1-x}; \quad f(x) = x^4(x-1)^3.$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 4.2.13, 4.2.18, 4.2.21, 4.2.24)

習題 2.17. 試求以下函數在給定區間的絕對極值：

$$(1) f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$(2) f(t) = t\sqrt{4-t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$(3) f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

$$(4) f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 4.1.46, 4.1.47, 4.1.51, 4.1.53)

2.3.3. 不定型的極限. 我們曾經探討過不定型的極限問題。利用微分可以將 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 這兩種不定型化成非不定型的形式，因而可依此得到極限。這種方法就是所謂的 L'Hospital's Rule。了解如何利用 L'Hospital's Rule 處理這兩種不定型後，其他的不定型極限問題，只要將之轉化成這兩種不定型的形式，就可以處理了。這一節中處理的極限皆適用於 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow a$ 、 $x \rightarrow a^+$ 以及 $x \rightarrow a^-$ ，所以我們在敘述定理時極限依然簡單用 $\lim$ 來表示，而不再區分是 x 趨近於哪一種情況。

假設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 就是所謂的 $\frac{0}{0}$ 不定型極限。我們利用 $x \rightarrow a$ 的情況簡單說明 L'Hospital's Rule 的概念。當 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 可微時，依可微則連續的性質知 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 是連續的，亦即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 。此時 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 表示 $f(a) = g(a) = 0$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

同理當處理 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型時，即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 時，由於 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ 以及 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ ，我們依然可將之視為 $\frac{0}{0}$ 處理，而推得極限也和 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 一致。這就是 L'Hospital's Rule 大致的概念。我們將之詳述如下。

Theorem 2.3.11 (L'Hospital's Rule). 假設 $f(x), g(x)$ 在所求極限附近可微且滿足 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注意，從前面的解釋中應可理解只有當 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 這兩種不定型時，才可以用 L'Hospital's Rule。當不是不定型時，已知極限為何，當然就不需用到 L'Hospital's Rule，

甚至不能用（可能會得到錯誤的結論）。例如 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1}$ 為 $\frac{1}{0}$ 型，不是不定型且知極限不存在。但 $x^2, x-1$ 的微分分別為 $2x, 1$ 。若誤用 L'Hospital's Rule，會得到其極限為 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$ 這個錯誤結論。另外 L'Hospital's Rule 是將 $f(x), g(x)$ 分別微分再相除求極限，而不是將整個 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 微分。

例子 2.3.12. [BioCalc.] Example 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 考慮以下三個極限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}, \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

首先確認它們分別為不定型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 以及 $\frac{\infty}{\infty}$ ，所以可以套用 L'Hospital's Rule。

(1) 因 $\ln x, x-1$ 的導函數分別為 $\frac{1}{x}, 1$ ，故得 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1}$ 。此時已非不定型，故可求得極限為 1。

(2) 因 e^x, x^2 的導函數分別為 $e^x, 2x$ ，故得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$ 。此時仍為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，故再套用一次 L'Hospital's Rule，即再將 $e^x, 2x$ 微分，分別得 $e^x, 2$ （此時非不定型），可求得極限為

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

(3) 因 $\ln x, \sqrt{x}$ 的導函數分別為 $\frac{1}{x}, \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，故得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

注意因此時 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ 以及 $\frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow 0$ ，故仍為不定型 $(\frac{0}{0})$ ，但不需再用 L'Hospital's Rule（否則 $\frac{1}{x}, \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 的導函數會越來越複雜）。可先將之化簡再求得極限為

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

#

從例子 2.3.12(2) 我們知道，有時要套用好幾次 L'Hospital's Rule 才能得到極限值，但又由 (3) 我們知道 L'Hospital's Rule 並非永遠是最好用的，有時利用簡單的代數化簡搭配使用才能有效解決問題。

當 $x \rightarrow \infty$ 時 $f(x), g(x)$ 都趨近於 ∞ ，我們會想知道哪一個函數增長的速度比較快。很自然的便會去考慮 $f(x), g(x)$ 的比值 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 。如果當 $x \rightarrow \infty$ 這個比值趨近的值大於 1（包含 ∞ ），則知 $f(x)$ 成長得比 $g(x)$ 快；反之若比值趨近的值小於 1 便知 $f(x)$ 成長得比 $g(x)$ 慢。當然比值趨近於 1 表示他們成長速率一樣快。由於函數的微分定義就是考慮其成長速率，

所以 L'Hospital's Rule 就是這樣的概念。例如在例子 2.3.12 (2), (3) 我們知道 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$ 以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以當 x 越來越大時, e^x 的成長比 x^2 快, 而 $\sqrt{x}$ 成長比 $\ln x$ 快。

接下來我們探討其他的不定型極限問題。首先看 $0 \cdot \infty$ 這種不定型, 即 $\lim f(x) \cdot g(x)$, 其中 $\lim f(x) = 0$ 且 $\lim |g(x)| = \infty$ 。由於此時 $\lim \frac{1}{g(x)} = 0$, 所以若將 $f(x) \cdot g(x)$ 寫成 $\frac{f(x)}{1/g(x)}$, 就可視為 $\frac{0}{0}$ 的不定型, 用 L'Hospital's Rule 處理。同理, 我們也可將 $f(x) \cdot g(x)$ 寫成 $\frac{g(x)}{1/f(x)}$, 由於此時 $\lim \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \infty$, 也可將之視為 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型, 用 L'Hospital's Rule 處理。要注意, 由於兩種看法分別牽涉到 $\frac{1}{g(x)}$ 和 $\frac{1}{f(x)}$ 的微分, 所以要用哪一種看法處理取決於哪一個微分會讓問題簡化, 我們看以下的例子。

例子 2.3.13. [BioCalc.] Example 4.3.8 探討 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ 這個 $0 \cdot \infty$ 不定型極限。首先觀察 $\frac{1}{x}$ 的導函數為 $-\frac{1}{x^2}$; 而 $\frac{1}{\ln x}$ 的導函數為 $\frac{-1}{x(\ln x)^2}$ 。顯然 $\frac{1}{x}$ 較好處理, 所以我們有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

注意這裡我們用到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型, 所以可用 L'Hospital's Rule 處理。

另外 [BioCalc.] Exercise 4.3.24 探討 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ 。注意當 $x \rightarrow -\infty$ 時, $x^2 \rightarrow \infty$ 而 $e^x \rightarrow 0$, 所以這是 $0 \cdot \infty$ 的不定型極限。然而 $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ 的導函數 $-2x^{-3}$ 和 $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ 的導函數 $-e^{-x}$ 看起來都不複雜, 到底要將哪一個放在分母呢? 我們看一下兩種方法都套用 L'Hospital's Rule 結果如何: 先將 x^2 置於分母 (變成 $\frac{1}{x^2}$), 套用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-2x^{-3}} = \frac{1}{-2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x;$$

而若將 e^x 置於分母 (變成 $\frac{1}{e^x}$), 套用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1/e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x.$$

兩者雖然仍為 $0 \cdot \infty$ 的不定型, 不過第一種方法讓原來 $x^2 e^x$ 變成 $x^3 e^x$, 顯然未讓問題簡化; 而第二種方法變成 $x e^x$, 如果再套用一次就可將 x 消去。所以我們繼續下去, 將 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$ 這個 $\frac{0}{0}$ 不定型, 再套用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

#

前面我們也談到 $\infty - \infty$ 這種不定型極限。亦即 $\lim(f(x) - g(x))$ 其中 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = \infty$ 。這種情況如果剛好 $f(x), g(x)$ 都可寫成分式, 我們就可以將 $f(x) - g(x)$ 通分化簡, 寫成分式的樣子再判斷其極限。例如探討 $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$ ([BioCalc.] Example

4.3.10) 我們可以將 $\sec x - \tan x$ 寫成 $\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ 。由於當 $x \rightarrow (\pi/2)^-$ 時 $(1 - \sin x) \rightarrow 0$ 且 $\cos x \rightarrow 0$ ，故利用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

若無法將 $f(x) - g(x)$ 寫成分式，通常會將 $f(x)$ 或 $g(x)$ 提出，例如寫成 $f(x)(1 - \frac{g(x)}{f(x)})$ 看成乘法，再研判其極限。我們看以下的例子。

例子 2.3.14. [BioCalc.] Example 4.3.11 考慮 $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x)$ 這個 $\infty - \infty$ 的不定型極限。提出 e^x 可得 $e^x - x = e^x(1 - \frac{x}{e^x})$ 。當 $x \rightarrow \infty$ 時 $\frac{x}{e^x}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型，故用 L'Hospital's Rule 知 $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ 因此 $x \rightarrow \infty$ 時 $e^x(1 - \frac{x}{e^x}) \rightarrow \infty$ ，亦即 $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty$ 。注意，若是提出 x ，即 $e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1)$ ，依然可得趨近於 $\infty \cdot \infty$ 。

[BioCalc.] Exercise 4.3.31 探討 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ 這個 $\infty - \infty$ 的不定型極限。提出 x 可得 $\sqrt{x^2 + x} - x = x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1)$ 。當 $x \rightarrow \infty$ ，這變成 $\infty \cdot 0$ 的不定型極限。故將 x 置於分母再利用 L'Hospital's Rule 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x})^{-1/2}(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

其實這個極限也可利用根式運算處理（參考 [BioCalc.] Example 2.2.6 或上一章講義式子 (1.9)）。

由於指數函數的運用，還有 1^∞ , ∞^0 以及 0^0 三種不定型的極限。也就是說 $\lim f(x)^{g(x)}$ 這種形式的極限，其中若 $\lim f(x) = 1$ 且 $\lim g(x) = \infty$ ，就是 1^∞ 的不定型。例如 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ ，就屬 1^∞ 不定型。而若 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = 0$ ，就是 ∞^0 的不定型。例如 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$ ，就屬 ∞^0 不定型。最後若 $\lim f(x) = 0$ 且 $\lim g(x) = 0$ ，就是 0^0 的不定型。例如 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ，就屬 0^0 不定型。

為何它們是不定型呢？就拿 1^∞ 來舉例，我們知道當 $x \rightarrow \infty$ ，若 $0 < r < 1$ 則 $r^x \rightarrow 0$ ；而若 $r > 1$ 則 $r^x \rightarrow \infty$ 。所以若 $f(x) \rightarrow 1$ ，則 $f(x)$ 在趨近於 1 的過程是大於 1 或是小於 1 就會影響到 $f(x)^{g(x)}$ 的極限值。事實上，如果對 $f(x)^{g(x)}$ 取 $\ln$ ，即 $\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$ ，我們會發現以上三種不定型的假設都會讓 $\lim(g(x) \cdot \ln f(x))$ 變成 $0 \cdot \infty$ 的不定型。而處理這類型的不定型極限的方法，就是利用前述處理 $0 \cdot \infty$ 的方法求出 $g(x) \cdot \ln f(x)$ 的極限，再還原成 $f(x)^{g(x)}$ 的極限。接下來我們用這個方法，處理前面所提的三個例子。

例子 2.3.15. 首先處理 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ 。假設其極限為 L ，利用 $\ln x$ 是連續函數，我們有 $\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x}))$ 。這是 $0 \cdot \infty$ 的不定型，將 x 置於分母再利用 L'Hospital's Rule 可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x})^{-1}(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

再由 $\ln L = 1$ ，得知極限值 $L = e^1 = e$ 。

同樣的處理 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x}$ 。假設其極限為 L ，我們有 $\ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x))$ 。這是 $0 \cdot \infty$ 的不定型，利用 L'Hospital's Rule 可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^{-1}(1+x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = 0.$$

再由 $\ln L = 0$ ，得知極限值 $L = e^0 = 1$ 。

最後處理 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ 。假設其極限為 L ，我們有 $\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$ 。這是 $0 \cdot \infty$ 的不定型，在例子 2.3.13（或 [BioCalc.] Example 4.3.8）已知其極限為 0。故由 $\ln L = 0$ ，得知極限值 $L = e^0 = 1$ 。 #

其實若遇到指數型的極限問題，也不需去記哪些是不定型。直接取對數 $\ln$ 再求極限。若不是不定型就可知其極限為何，而若是不定型（即 $0 \cdot \infty$ ）就用 L'Hospital's Rule 處理。不過最後求得極限後別忘了要取指數還原。

習題 2.18. 請檢查以下極限是否適用 l'Hospital's rule，並求其極限：

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin \theta}{\csc \theta}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 3^t}{t}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 4.3 (8, 9, 12, 13)）

習題 2.19. 利用多次套用 l'Hospital's rule 求以下極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 4.3 (16, 17, 20)）

習題 2.20. 有時運用 l'Hospital's rule 不要整個分母或分子微分，分開來處理極限會比較容易。例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan x}{x}$ 雖為 $\frac{0}{0}$ 不定型，但將 $\frac{\sin x \tan x}{x}$ 拆成 $\frac{\sin x}{x} \tan x$ 仍可用運用 l'Hospital's rule 處理。請求以下極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \tan x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 4.3.22）

習題 2.21. 請做以下有關 $0 \cdot \infty$ 以及 $\infty - \infty$ 的極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \sin 6x; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan(1/x); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \frac{1}{x}); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x).$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 4.3 (25, 26, 28, 32, 33)）

習題 2.22. 請做以下指數型的極限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{1/x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\frac{2}{x})^x$ 。

2.3.4. 函數的疊代. 許多遞迴數列都是利用函數的疊代所形成。利用線性估計的概念 Newton's Method 就是利用疊代的方式幫助我們估計 $f(x) = 0$ 的解。我們也介紹函數疊代所形成遞迴數列其穩定均衡點的問題。

2.3.4.1. 牛頓法. 當函數 $f(x)$ 是連續的，若能找到 a, b 滿足 $f(a)f(b) < 0$ (即 $f(a), f(b)$ 的取值異號)，則由中間值定理知道 $f(x) = 0$ 在 a, b 之間有解。此時我們可以考慮將 a, b 的中點 $\frac{a+b}{2}$ 代入 $f(x)$ 。若恰好 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ ，當然就找到 $\frac{a+b}{2}$ 為 $f(x) = 0$ 的一個解了；而若 $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ ，則它一定與 $f(a), f(b)$ 其中之一異號，我們就可以繼續下去慢慢逼近 $f(x) = 0$ 的一個解。例如 $f(\frac{a+b}{2})$ 與 $f(a)$ 異號，就找 $\frac{a+b}{2}, a$ 的中點 $\frac{3a+b}{4}$ 繼續下去。這個方法就是所謂的“二分逼近法”。

牛頓法也是找解，我們可以將 $f(x) = 0$ 的解看成是函數圖形 $y = f(x)$ 與 x 軸的交點。首先在解大概的位置找一點 x_1 ，對應到函數圖形 $y = f(x)$ 上一點 $(x_1, f(x_1))$ 。在線性估計中，我們已經提及 $y = f(x)$ 在點 $(x_1, f(x_1))$ 的切線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ ，在 $x = x_1$ 附近和 $y = f(x)$ 圖形相當接近。所以直線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ 與 x 軸的交點，應該非常接近 $y = f(x)$ 與 x 軸的交點。而直線 $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ 與 x 軸的交點是很好算的，即 $x = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1$ 。也就是說 $x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 應該很接近 $f(x) = 0$ 的一個解。這就是牛頓法的基本概念。

使用牛頓法有兩點要注意，首先從剛才的推導中我們知道所選的 x_1 其微分值 $f'(x_1)$ 不能為 0 (否則水平線無法和 x 軸相交)，其實 $f'(x_1)$ 很接近 0 也應避免 (表示與 x 軸交點會離較遠)。另外，所選的 x_1 應儘量靠近交點，否則有可能越來越遠離交點 (參考 [BioCalc.] 3.8 Figure 7 圖示)。若遇到這些情況，就應挑更好一點的 x_1 。

我們可以令利用 x_1 所得切線與 x 軸的交點為 x_2 ，即 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 。此時預期 x_2 更接近於 $y = f(x)$ 與 x 軸的交點，所以我們可以一直疊代下去，即令 $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$... 等。這些 x_n 所成的數列，最後極限就會是 $f(x) = 0$ 的一解。一般來講若要估計解的近似值，只要疊代後連續兩個數字 x_n, x_{n+1} 差距落在誤差範圍，就可以停下來了。

例如 [BioCalc.] Example 3.8.5 舉的是牛頓當初拿來解釋他的方法的例子 $f(x) = x^3 - 2x - 5$ 。觀察出 $f(1) = -6, f(2) = -1, f(3) = 16$ ，牛頓決定取 $x_1 = 2$ 。由於 $f'(x) = 3x^2 - 2$ ，數列 $\langle x_n \rangle$ 所符合的遞迴關係式為 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$ ，代 $x_1 = 2$ 依序可得 $x_2 = \frac{21}{10}$ ， $x_3 = \frac{11761}{5615}$ ， $x_4 = \frac{4138744325037}{1975957316495}$ ，其中 $x_3 \approx 2.09457$ 且 $x_4 \approx 2.09455$ 。所以 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 的解精準到小數點後第 4 位約為 2.0945。

2.3.4.2. 穩定均衡點. 我們常遇到的遞迴數列是利用函數的疊代而成，亦即形如 $x_{n+1} = g(x_n)$ 這樣的遞迴數列。前面所提牛頓法估計 $f(x) = 0$ 的解，就是令 $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 所疊

代形成的遞迴數列。前一章所介紹的 logistic difference equation: $x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$, 也是令 $g(x) = cx(1 - x)$ 所疊代形成的遞迴數列。

如果遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$ 代到某一點 x_n 後會有 $x_{n+1} = x_n$, 因此 $x_n = x_{n+1} = g(x_n)$ 之後的點都會等於 x_n 。此時我們稱 x_n 是此遞迴數列的一個“均衡點”(equilibrium)。由於 x_n 滿足 $g(x_n) = x_n$, 所以我們可以直接找 $g(x)$ 的固定點 (fixed point), 亦即滿足 $\hat{x} = g(\hat{x})$ 的點 $\hat{x}$ 。

要注意當 $\hat{x}$ 是 $g(x)$ 的一個固定點, 而 x_1 很靠近 $\hat{x}$, 遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$ 未必會越來越靠近 $\hat{x}$, 有時甚至會遠離 $\hat{x}$ 。所以我們有以下的定義。

Definition 2.3.16. 考慮遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$ 且 $\hat{x}$ 為其一個均衡點。如果當 x_1 很接近 $\hat{x}$ 時, x_n 會隨著 n 變大而越來越接近 $\hat{x}$, 則稱 $\hat{x}$ 為“穩定均衡點”(stable equilibrium); 反之, 當 x_1 很接近 $\hat{x}$ 時, x_n 會隨著 n 變大而越來越遠離 $\hat{x}$, 則稱 $\hat{x}$ 為“不穩定均衡點”(unstable equilibrium)

當函數 $g(x)$ 的導函數仍為連續函數, 以下的定理提供很好的方法判定遞迴數列 $x_{n+1} = g(x)$ 的均衡點是否穩定。

Theorem 2.3.17. 考慮遞迴數列 $x_{n+1} = g(x_n)$, 其中 $g(x)$ 的導函數 $g'(x)$ 為連續函數。設 $\hat{x}$ 是此數列的一個均衡點。

- (1) 若 $|g'(\hat{x})| < 1$, 則 $\hat{x}$ 為穩定均衡點。
- (2) 若 $|g'(\hat{x})| > 1$, 則 $\hat{x}$ 為不穩定均衡點。

我們大致說明一下此定理的原理。因為 $g'(x)$ 為連續函數, 所以若 $|g'(\hat{x})| < 1$, 則 $\hat{x}$ 附近的點的微分值取絕對值也都會小於 1, 因此當 x_1 夠靠近 $\hat{x}$ 時, 所有在 $x_1, \hat{x}$ 之間的點 c 也會滿足 $|g'(c)| < 1$ 。而均值定理 (Theorem 2.3.1) 告訴我們存在 $x_1, \hat{x}$ 之間的一點 c 滿足 $g'(c) = \frac{g(x_1) - g(\hat{x})}{x_1 - \hat{x}}$, 所以兩邊取絕對值並利用 $x_2 = g(x_1)$ 以及 $g(\hat{x}) = \hat{x}$, 可得 $|x_2 - \hat{x}| < |x_1 - \hat{x}|$ 。所以繼續下去可得 $|x_{n+1} - \hat{x}| < |x_n - \hat{x}|$, 甚至可得 $x_n \rightarrow \hat{x}$ 。同樣的原因, 當 $|g'(\hat{x})| > 1$ 也可得 $|x_{n+1} - \hat{x}| > |x_n - \hat{x}|$ 。要注意, 此定理並未提及 $|g'(\hat{x})| = 1$ 的情形, 事實上在此情形無法判斷是否為穩定。另外若去掉絕對值, 我們會發現當 $g'(\hat{x}) < 0$, 由於負數相乘變號的原因, x_n, x_{n+1} 會在 $\hat{x}$ 兩邊跳動。這種情況稱為 *oscillation*。

例子 2.3.18. [BioCalc.] Example 4.5.4 考慮 logistic difference equation: $x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$, 其中 c 為正實數。令 $g(x) = cx(1 - x)$, 首先我們找出所有的均衡點, 即解 $g(x) = x$ 。由方程式 $cx^2 + (1 - c)x = 0$ 解得 0 和 $1 - \frac{1}{c}$ 為其均衡點。

利用 $g(x)$ 的導函數 $g'(x) = c - 2cx$, 我們知道對於 0 這個均衡點, 由於 $g'(0) = c$, 故當 $0 < c < 1$ 時, 0 會是穩定均衡點, 也就是此時當 x_1 很靠近 0 時, x_n 會趨近於 0。而當 $c > 1$ 時 0 不是穩定均衡點, 也就是說即使 x_1 很靠近 0 (但不是 0), x_n 會漸漸遠離 0 (事實上當 $1 < c < 3$ 時會趨近於另一均衡點 $1 - \frac{1}{c}$)。

接下來我們看均衡點 $1 - \frac{1}{c}$ 的情形。由於 $g'(1 - \frac{1}{c}) = 2 - c$ ，馬上知道當 $1 < c < 3$ 時它會是穩定均衡點，也就是此時當 x_1 很靠近 $1 - \frac{1}{c}$ 時， x_n 會趨近於 $1 - \frac{1}{c}$ 。注意當 $2 < c < 3$ 時 $g'(1 - \frac{1}{c}) < 0$ 所以會有 oscillation 情況發生，也就是說 x_n 會以在 $1 - \frac{1}{c}$ 兩側跳動的方式趨近於 $1 - \frac{1}{c}$ 。

最後由於 $0 < c < 1$ 時 $1 - \frac{1}{c}$ 為不穩定均衡點，當 x_1 很靠近它時， x_n 會漸漸遠離它（事實上會趨近於穩定均衡點 0）。而當 $c > 3$ 時，由於兩個均衡點都不是穩定的，所以不管 x_1 為何， x_n 都變得很難掌握。 #

習題 2.23. 請利用牛頓法以起始點 $x_1 = 1$ 找 $x^3 + 2x - 4 = 0$ 的近似值。疊代到 x_3 （不必化簡）。（取自 [BioCalc.] Exercise 3.8.21）

習題 2.24. 求以下遞迴數列之均衡點並區分其穩定性：

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t^2; \quad x_{t+1} = \frac{3x_t}{1+x_t}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 4.5.5, 4.5.8）

積分

之前我們利用切線斜率、成長率等概念定義了一個函數在一點的微分。相對的，我們利用面積以及總量的觀念介紹一個函數在一區間的積分。利用面積的概念推導出積分的性質與規則。利用這些規則，可以讓我們以更有效的方法的求一個函數在一區間的積分。我們將先專注於積分的性質與技巧，接著再談積分的應用。

3.1. 定積分的定義與微積分基本定理

由於長方形的面積就是底乘以高，所以要計算一個區域的面積我們可以將該區域分割成許多長方形，再將這些長方形面積加總。分割的越細所求的面積越精準，這就是利用黎曼和求函數圖形在某一區間與 x 軸所圍面積的概念。

為了方便說明，我們首先考慮函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 取值都大於等於 0 的情況。我們先將區間 $[a, b]$ 分割成許多小段，每一小段長度設為 Δx_i （例如分成 n 段，則每段長分別為 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ）。再在每一小段中任取一點 x_i^* 且取 $f(x_i^*)$ 為該段長方形的高。當 Δx_i 越小（即分割的長方形越細），這些長方形的面積總和（稱為 *Riemann sum*）

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \quad (3.1)$$

會越接近 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積。而當每個 Δx_i 都趨近於 0 時，若式子 (3.1) 極限存在，此極限值確實就會是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積。

在一般的狀況（不假設對所有 $a \leq x \leq b$ 皆符合 $f(x) \geq 0$ ）如果 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 只有有限個點不連續，則當每個 Δx_i 都趨近於 0 時，式子 (3.1) 極限都會存在。此時稱 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為可積（integrable），並稱式子 (3.1) 的極限值為 $f(x)$ 在 a, b 之間的定積分（definite integral of $f(x)$ from a to b ），並用以下符號表示

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i.$$

這裡所要積分的函數 $f(x)$ 稱為 *integrand*，而 b, a 分別稱為上下界 (upper limit, lower limit)。至於 dx 要注意，前面微分大致提過通常我們會用 Δ 表示差，而當 $\Delta \rightarrow 0$ ，我們就用 d 表示，所以這裡 dx 表示的就是 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 。因此千萬不要忽略 dx ，長方形沒有乘上寬度，就不是面積了（以後在談積分技巧時，若忽略 dx 會造成嚴重的錯誤）。最後取極限時再把表示和的 $\sum$ 符號改成大 S ，即 $\int$ 來表示。注意 $\int_a^b f(x) dx$ 不一定是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積，因為 $f(x_i^*)$ 在取值時有可能是負的，所以計算長方形面積時會有正負抵消的問題。因此在一般情況需將 *integrand* 取絕對值，求 $\int_a^b |f(x)| dx$ 才會是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍區域的面積。

要如何求定積分呢？既然需要考慮 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 的情況，一般最常用的方法就是將區間 $[a, b]$ 等分成 n 等分再讓 $n \rightarrow \infty$ 即可。因為此時 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ，所以當 $n \rightarrow \infty$ ，自然會有 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 。至於每一個分段中 x_i^* 要如何選呢？既然定理說任意選都會有一樣的極限值，一般都會用比較有系統的方式選 x_i^* 。例如在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 選右端點 x_i ，這樣算的黎曼和稱為 *right Riemann sum*；而若 x_i^* 選的分別是 $[x_{i-1}, x_i]$ 的左端點 x_{i-1} 、中點 $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ，則算出的黎曼和分別稱為 *left Riemann sum* 和 *midpoint Riemann sum*。其實在證明這些 Riemann sum 都會趨近於同一個值，使用的方法是選 x_i^* 會使得 $f(x_i^*)$ 是在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的最大值，這樣算出的黎曼和稱為 *upper Riemann sum*。而若選 x_i^* 會使得 $f(x_i^*)$ 是在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的最小值，這樣算出的黎曼和稱為 *lower Riemann sum*。由於當 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 時 *upper Riemann sum* 和 *lower Riemann sum* 會趨近於同一個值，所以利用夾擠定理，就可以得到前面所提各種算法所得的 Riemann sum 都會趨近於同一個值。接下來我們看幾個用 Riemann sum 求定積分的例子。

例子 3.1.1. 令 $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ 。我們分別利用 *right Riemann sum*, *left Riemann sum* 以及 *midpoint Riemann sum* 求 $\int_0^2 f(x) dx$, $\int_0^2 g(x) dx$ 以及 $\int_0^2 h(x) dx$ 。先將區間 $[0, 2]$ 等分成 n 等分，即每一等分長 $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ 。依序分成的 n 個區間為

$$\left[0, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right], \dots, \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right], \dots, \left[\frac{2(n-1)}{n}, 2\right].$$

每一段若選右端點則依序所選的點為 $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2i}{n}, \dots, 2$ ；若選左端點則依序所選的點為 $0, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2(i-1)}{n}, \dots, \frac{2(n-1)}{n}$ ；而若選中點則依序所選的點為 $\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{2i-1}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}$ 。

- (1) 由於 $f(x) = 1$ 是常數，無論選哪一點其值皆為 1，故三種 Riemann sum 皆為
- $$\sum_{i=1}^n \left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) = n \cdot \frac{2}{n} = 2, \text{ 與 } n \text{ 無關, 故當 } n \rightarrow \infty \text{ 極限仍為 } 2。即$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx = 2.$$

此與 $y = 1$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域為長為 2 寬為 1 的長方形面積 2 相符。

(2) 由 $g(x) = x$ ，利用前述三種點的選法，我們得 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 依序為

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \cdots + \frac{2i}{n} + \cdots + 2 \right) &= \frac{2}{n} \left(\frac{n(\frac{2}{n} + 2)}{2} \right) = \frac{2+2n}{n}, \\ \frac{2}{n} \left(0 + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{2(i-1)}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)}{n} \right) &= \frac{2}{n} \left(\frac{n(0 + \frac{2(n-1)}{n})}{2} \right) = \frac{2(n-1)}{n}, \\ \frac{2}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{2i-1}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n} \right) &= \frac{2}{n} \left(\frac{n(\frac{1}{n} + \frac{2n-1}{n})}{2} \right) = 2.\end{aligned}$$

注意，這裡我們用到了等差級數的公式。不管是哪一種 Riemann sum，當 $n \rightarrow \infty$ 其極限皆為 2，故得

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 x dx = 2.$$

此與 $y = x$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域為底為 2 高為 2 的直角三角形面積相符。

(3) 由 $h(x) = x^2$ ，利用前述三種點的選法，我們得 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 依序為

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \cdots + 2^2 \right) &= \frac{8}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \frac{2}{n} \left(0 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2(n-1)}{n}\right)^2 \right) &= \frac{8}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n (i-1)^2 \right) = \frac{8}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \\ \frac{2}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2i-1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 \right) &= \frac{2}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \right) = \frac{2}{n^3} \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},\end{aligned}$$

注意，這裡我們用到了平方和的公式 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 以及 $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ 。不管是哪一種 Riemann sum，當 $n \rightarrow \infty$ 其極限皆為 $\frac{8}{3}$ ，故得

$$\int_0^2 h(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

也就是說拋物線 $y = x^2$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域面積為 $\frac{8}{3}$ 。 #

從這些例子來看，若要求更高次的定積分，將會越來越複雜。所以一般來說不可能都用黎曼和的定義求定積分。微積分基本定理可以讓我們簡化求定積分的工作。

Theorem 3.1.2 (The Fundamental Theorem of Calculus). 假設函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續，且存在 $F(x)$ 滿足對所有 $x \in [a, b]$ 皆有 $F'(x) = f(x)$ 。則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Proof. 首先將區間 $[a, b]$ 依序分割成 $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ 共 n 段，令每一段長 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 。利用 mean value theorem (Theorem 2.3.1)，在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 之間存在一點 x_i^* 滿足 $F'(x_i^*) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ ，亦即 $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x_i$ 。也因此在此分割之下，若每個分割都選 x_i^* 則所得的 Riemann sum 為

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i &= f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

由於這樣的選取法都會是定值 $F(b) - F(a)$ ，故當 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 時其黎曼和極限為 $F(b) - F(a)$ 。因此得證

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

□

微積分基本定理有許多形式，Theorem 3.1.2 一般稱為第二型 (Part 2) 或 *evaluation theorem*。我們先介紹它主要就是它能幫助我們求定積分。也就是說如果知道什麼函數的導函數是 $f(x)$ ，就可求 $\int_a^b f(x) dx$ 。例如 Example 3.1.1 中我們知道 $F(x) = x$ 的導函數是 $f(x) = 1$ ，所以 $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 2 - 0 = 2$ 。同理由於 $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ 和 $H(x) = \frac{1}{3}x^3$ 的導函數分別為 $g(x) = x$ 以及 $h(x) = x^2$ ，所以

$$\int_0^2 x dx = \int_0^2 g(x) dx = G(2) - G(0) = \frac{4}{2} = 2, \quad \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 h(x) dx = H(2) - H(0) = \frac{8}{3}.$$

因此求定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值，我們只要找到 $F(x)$ 滿足 $F'(x) = f(x)$ 即可。這個 $F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的“反導函數” (antiderivative)，由於反導函數與積分相關且為了方便起見，我們用“不定積分” (indefinite integral) $\int f(x) dx$ 來表示 $f(x)$ 的反導函數。下一節我們將談論求不定積分的技巧，在此之前我們順便談談微積分基本定理其他的形式。

由於 $F(x)$ 本身是 $F'(x)$ 的反導函數所以由 Theorem 3.1.2 我們得

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.2)$$

式子 (3.2) 常被稱為 *net change theorem*。[BioCalc.] Example 5.3.7 提到：若 $N(t)$ 表示在時間 t 的人口數，則 $N'(t) = \frac{d}{dt}N(t)$ 表示人口成長率。所以我們可以由人口成長率的定積分 $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}N(t) dt = N(t_2) - N(t_1)$ 得到從 t_1 到 t_2 這段時間人口的“淨變化” (net change)。

當 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數且 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。對任意 $x \in [a, b]$ 考慮新的函數 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ 。依 Theorem 3.1.2，我們有 $g(x) = F(x) - F(a)$ ，所以 $g'(x) = F'(x) = f(x)$ 對任意 $x \in [a, b]$ 皆成立。這就是所謂第一型 (part 1) 的微積分基本定

理。通常寫成

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (3.3)$$

注意積分式改為以 t 為變數，以免和上界的 x 混淆。

[BioCalc.] Example 5.3.11 要求 $\frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t dt$ 。我們可以先令 $g(x) = \int_1^x \sec t dt$ 。也因此利用 chain rule 以及 $g'(x) = \sec x$ 可得

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t dt = (g(x^4))' = g'(x^4) \cdot (x^4)' = 4x^3 \cdot \sec x^4.$$

習題 3.1. 將以下指定區間的 Riemann Sum 寫成定積分形式（不必求值）：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \ln(1 + x_i^2) \Delta x, \quad [2, 6]$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\cos x_i}{x_i} \Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2} \Delta x, \quad [1, 8]$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5] \Delta x, \quad [0, 2]$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.2(15, 16, 17, 18)）

3.2. 積分的技巧

一般來說，要找到反導函數並不容易。我們首先介紹不定積分的基本性質，並依此得到一些基本函數相關的反導函數。不過再複雜一點的函數就必需藉由變換變數、分部積分以及部分分式等技巧處理。

首先要注意的是反導函數並不唯一。若 $F_1(x), F_2(x)$ 都滿足 $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ ，此時由於 $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ ，利用 Theorem 2.3.2 (3) 可知 $F_1(x) - F_2(x)$ 為常數 C 。也就是當我們找到 $f(x)$ 的一個反導函數 $F(x)$ ，自然就找到所有的反導函數，也因此通常我們會用 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 來表示。例如 $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ 。不過由於在求定積分時 $F(b) - F(a)$ 會把常數 C 扣掉，所以不管選哪個反導函數，所得定積分是一致的。為了方便起見本講義在寫不定積分等式時會省略常數 C 。不過以後處理微分方程時，由於會有初始值問題，求反導函數時需要用到常數 C ，那時這個 C 就不能忽略了。

對於可微函數 $f(x)$ ，由於 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導函數，所以 $f(x)$ 會是 $f'(x)$ 的反導函數。利用不定積分就是反導函數的符號定義，可得

$$\int f'(x) dx = f(x). \quad (3.4)$$

注意式子 (3.4) 是不定積分符號的定義，不能視為微積分基本定理。

不定積分也有線性性質。這是因為導函數有線性性質，自然可得反導函數也有線性性質，亦即

$$\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x)) dx = r \int f(x) dx + s \int g(x) dx. \quad (3.5)$$

這告訴我們，如果知道 $f(x), g(x)$ 的反導函數，就可以得到 $r \cdot f(x) + s \cdot g(x)$ 的反導函數。我們先推導 power function 的反導函數。對於任意實數 r ，考慮 power function $f(x) = x^{r+1}$ 。我們已知其導函數為 $f'(x) = (r+1)x^r$ 。因此由式子 (3.4), (3.5) 知 $x^{r+1} = f(x) = \int f'(x) dx = (r+1) \int x^r dx$ 。因此當 $r \neq -1$ 時，可得

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}. \quad (3.6)$$

特別的，對於任意自然數 k ，由於 $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ ，利用線性性質可得任意多項式的反導函數

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x. \quad (3.7)$$

例如 $3x^2 - 4x + 2$ 的反導函數為

$$\int (3x^2 - 4x + 2) dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 2 \int 1 dx = x^3 - 2x^2 + 2x.$$

式子 (3.6) 談的是當 $r \neq -1$ 時 x^r 的反導函數。當 $r = -1$ ，即 $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ，其反導函數為何？我們知道 $\ln x$ 的導函數是 $\frac{1}{x}$ 。不過這是在 $x > 0$ 的情況，因為當 $x \leq 0$ 時 $\ln x$ 是沒有定義的。不過 $\frac{1}{x}$ 在 $x < 0$ 是有定義的，所以我們自然想知道當 $x < 0$ 時 $\frac{1}{x}$ 的反導函數為何？當 $x < 0$ 時 $f(x) = \ln(-x)$ 是有定義的。此時利用 chain rule 可得 $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$ 。也就是說當 $x < 0$ 時 $\ln(-x)$ 會是 $\frac{1}{x}$ 的反導函數。由於 $\ln|x|$ 在 $x > 0$ 時等於 $\ln x$ ；而當 $x < 0$ 時等於 $\ln(-x)$ ，所以通常我們會以 $\ln|x|$ 來表示 $\frac{1}{x}$ 的反導函數（對於所有 $x \neq 0$ 皆適用），亦即

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad (3.8)$$

注意微積分基本定理 (Theorem 3.1.2) 處理定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 需要求 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為連續。由於 $\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 不連續，所以當 $a < 0 < b$ 時我們不能用式子 (3.8) 處理 $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|b| - \ln|a|$ 。這牽涉所謂“瑕積分”的問題（以後會談）。不過若 a, b 同號，就可以了！

我們可以利用一些基本函數的導函數反推得到一些基本函數的反導函數，再利用線性的性質得到它們之間線性組合的反導函數。以下我們列出一些利用導函數推得的常見函數的反導函數。

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x. \quad (3.9)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x, \quad \int \sec^2 x \, dx = \tan x, \quad \int \sec x \tan x \, dx = \sec x \quad (3.10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x. \quad (3.11)$$

注意，這裡沒有 $\ln x$, $\tan x$, $\sec x$ 的反導函數（因為它們沒有辦法直接由簡單的函數微分得到），等到以後學會積分的技巧後，才容易求得。

習題 3.2. 求以下定積分：

$$\int_{-2}^3 (x^2 - 3) \, dx; \quad \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx; \quad \int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) \, dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.3(1, 11, 13)）

習題 3.3. 請利用 net change theorem 回答以下問題：有一水槽在第 t 分鐘，其中 $0 \leq t \leq 50$ 這段時間以每分鐘 $r(t) = 200 - 4t$ 公升的速率放水。請求此水槽在前 10 分鐘總共放水量。（取自 [BioCalc.] Exercise 5.3.55）

3.2.1. 變換變數. 合成函數的導函數有 chain rule 幫我們推導，反之和合成函數相關的求反導函數的方法就是變換變數（substitution rule），它是與 chain rule 相關的。

當我們看到一個積分式裡面積分的函數有“一部分”像是合成函數時，可以嘗試看看它是否是合成函數的導函數。明確來說，若看到積分的函數（integrand）是 $f(g(x)) \cdot h(x)$ 的形式，若又知 $f(x)$ 的反導函數為 $F(x)$ ，則考慮函數 $F(g(x))$ 的導函數，即利用 chain rule 我們有 $F'(g(x))g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 。也就是說 $F(g(x))$ 會是 $f(g(x)) \cdot g'(x)$ 的反導函數，所以若 $h(x)$ 恰為 $g'(x)$ ，依積分定義得

$$\int f(g(x))h(x) \, dx = \int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)).$$

例如看到積分式 $\int \cos x \sqrt{\sin x} \, dx$ 中 $\sqrt{\sin x}$ 可視為合成函數 $f(g(x))$ ，其中 $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ 且 $g(x) = \sin x$ 。而我們知 $f(x) = x^{1/2}$ 的反導函數為 $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 又 $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$ ，所以知 $\int \cos x \sqrt{\sin x} \, dx = F(g(x)) = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2}$ 。

從這個概念，我們介紹所謂變換變數的積分技巧。當我們看到積分的函數中有合成函數的“成分” $f(g(x))$ （例如 [BioCalc.] Example 5.4.1 $\int x^3 \cos(x^4 + 2) \, dx$ 中的 $\cos(x^4 + 2)$ ）。可變換變數令 $u = g(x)$ （上例中令 $u = x^4 + 2$ ）。接著將 $u = g(x)$ 對 x 微分，即 $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ，寫成 $du = g'(x) \, dx$ （上例中 $du = 4x^3 \, dx$ ）。然後利用這個 du 和 dx 的關係式將整個積分寫成僅與 u 有關的形式 $\int f(u) \, du$ ，不能有 x （上例中 $x^3 \, dx = \frac{1}{4} du$ 故 $\int x^3 \cos(x^4 + 2) \, dx = \frac{1}{4} \int \cos u \, du$ ）。若知道 $f(u)$ 的反導函數為 $F(u)$ （上例中 $\cos u$ 的反導函數是 $\sin u$ ），最後利用 $\int f(u) \, du = F(u) = F(g(x))$ 求出整個反導函數（上例中得 $x^3 \cos(x^4 + 2)$ 的反導函數為 $\frac{1}{4} \sin u = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2)$ ）。

這個變換變數的技巧有幾件事要注意。首先就是所設新的變數 $u = g(x)$ 不必知道其反導函數為何，但必需正確求其導函數並寫成 $du = g'(x) \, dx$ 的形式才能正確完成變換變數。

過去我們一再強調微分和積分千萬不要漏掉 dx 就是這個原因。接著切記一定要將原積分寫成 $\int f(u) du$ (可能差個倍數) 而且必需知道 $f(x)$ 反導函數才算完成。最後別忘了把 u 換回 $g(x)$ 。我們看以下的例子。

例子 3.2.1. [BioCalc.] Example 5.4.3 求 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ 。這個例子，看到 $\sqrt{1-4x^2}$ ，很多人會誤以為 $f(x) = \sqrt{x}$ ，然後設 $u = 1-4x^2$ ，得 $du = -8x dx$ 。故由 $x dx = -\frac{1}{8} du$ 得原積分為 $-\frac{1}{8} \int \frac{1}{f(u)} du$ ，而誤以為求出反導函數為 $-\frac{1}{8} \ln|f(u)| = -\frac{1}{8} \ln \sqrt{1-4x^2}$ 。這裡最大的問題是 $\int \frac{1}{f(u)} du$ 不是 $\ln|f(u)|$ (應該是 $\int \frac{f'(u)}{f(u)} du$ 才會是 $\ln|f(u)|$)。

我們建議不必先急著決定 $f(x)$ 為何，先決定 $u = 1-4x^2$ 後，如前面說明所述，先利用 $du = -8x dx$ 將 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ 完全用新變數 u 來表示，即 $-\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$ 。再決定是否會求此不定積分。事實上 $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2}$ ，故求得反導函數為 $-\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ #

不要誤以為積分函數是兩個函數相乘才能用變換變數。事實上若變數是一次多項式 $u = ax + b$ ，則 $du = a dx$ 就不會出現兩個函數相乘的形式。例如 [BioCalc.] Example 5.4.2 $\int \sqrt{2x+1} dx$ 就需設 $u = 2x+1$ ，得 $du = 2dx$ 而變換變數成 $\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$ 。因此得反導函數為 $\frac{1}{3}u^{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$ 。同樣的，[BioCalc.] Example 5.4.4 $\int e^{5x} dx$ 就需設 $u = 5x$ ，得 $du = 5dx$ 而變換變數成 $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^u du$ 。因此得反導函數為 $\frac{1}{5}e^u = \frac{1}{5}e^{5x}$ 。

接下來看前面提過 $\tan x$, $\sec x$ 的反導函數。

例子 3.2.2. 首先我們看 $\int \tan x dx$ 。利用 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ，這等同於要求 $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ 。若設 $u = \cos x$ ，得 $du = -\sin x dx$ 。故原積分式變成 $-\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| = \ln \frac{1}{|u|} = \ln|\sec x|$ 。我們求得了 $\tan x$ 的反導函數是 $\ln|\sec x|$ ，亦即

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x|. \quad (3.12)$$

接下來我們看 $\int \sec x dx$ 。這雖然也用變換變數處理，不過技巧性更高。首先我們觀察 $d \sec x = \sec x \tan x dx$ 以及 $d \tan x = \sec^2 x dx$ 。也就是說若設 $u = \sec x + \tan x$ ，則 $du = \sec x(\tan x + \sec x) dx = \sec x \cdot u dx$ 。也就是說 $\sec x dx = \frac{1}{u} du$ ，因此

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln|\sec x + \tan x|. \quad (3.13)$$

#

當處理定積分時，我們會先求不定積分 (即反導函數) 再利用微積分基本定理，代上下界求得積分值。不過若在求不定積分時用到了變換變數，我們不必轉換回原來的變數，直接用新的變數寫成定積分求值即可。我們看以下例子。

例子 3.2.3. [BioCalc.] Example 5.4.7 求 $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ 。利用變換變數 $u = 3 - 5x$ ，則 $du = -5dx$ ，故 $\int \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5} \int u^{-2} du = \frac{1}{5} u^{-1}$ 。接下來我們有兩個做法。第一個是將 $u = 3 - 5x$ 代回得反導函數 $\frac{1}{5(3-5x)}$ ，再代上下界，即

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \frac{1}{5(3-5x)} \Big|_1^2 = \frac{1}{5(-7)} - \frac{1}{5(-2)} = \frac{-2+7}{70} = \frac{1}{14}.$$

或是直接寫成以 u 為變數的定分，將上、下界 $x = 2$ 、 $x = 1$ 利用 $u = 3 - 5x$ 分別改為 $u = -7$ 、 $u = -2$ ，即

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} u^{-2} du = \frac{1}{5} u^{-1} \Big|_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{-7} - \frac{1}{-2} \right) = \frac{1}{14}.$$

#

習題 3.4. 請用變數變換做以下積分：

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2} dx; & \int \sin \pi t dt; & \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx; & \int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4 dx; \\ & \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{1 + \tan t}}; & \int x(2x + 5)^8 dx; & \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx; & \int \frac{x}{1 + x^4} dx. \end{aligned}$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 5.4(6, 11, 13, 23, 28, 31, 33, 36))

習題 3.5. 請用新的變數寫出上下界的方式處理以下定積分：

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos(\pi t/2) dt; & \int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x) dx; & \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx \quad (\text{設 } u = x-1) \\ & \int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^2 + z} dz; & \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4} \quad (\text{設 } u = 1 + \sqrt{x}). \end{aligned}$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 5.4(37, 44, 47, 49, 51))

3.2.2. 分部積分. Integration by parts 來自於微分的乘法性質。基本上，若積分的函數是兩個函數相乘，且知道其中一個函數的反導函數，就可考慮使用分部積分求出乘在一起的反導函數。

我們直接看分部積分處理積分的方法。考慮不定積分 $\int f(x) \cdot g(x) dx$ 。若知道 $g(x)$ 的反導函數為 $G(x)$ ，此時我們可設 $u = f(x)$ ， $v = G(x)$ 。因為 $dv = G'(x) dx = g(x) dx$ ，所以原式可寫成 $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int u dv$ 。回顧微分的乘法性質 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$ 。若用微積分基本定理寫成積分形式為

$$u \cdot v = \int (u \cdot v)' dx = \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx + \int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = \int v du + \int u dv.$$

也因此

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du = f(x) \cdot G(x) - \int G(x) \cdot f'(x) dx.$$

也就是說，我們把求 $\int f(x) \cdot g(x) dx$ 的問題轉換成求 $\int G(x) \cdot f'(x) dx$ 。若能知道 $G(x) \cdot f'(x)$ 的反導函數就可求出 $f(x) \cdot g(x)$ 的反導函數。

求積分時，設好 u, v ，使得原積分為 $\int u dv$ ，利用 $\int v du$ 的積分得

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (3.14)$$

就是分部積分的技巧。

例子 3.2.4. [BioCalc.] Example 5.5.1 求 $\int x \sin x dx$ 。由於我們知道 $\sin x$ 的反導函數為 $-\cos x$ ，所以可設 $u = x, v = -\cos x$ 。因此由 $du = dx$ 以及式子 (3.14) 得

$$\int x \sin x dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x.$$

注意分部積分的重點就是要設定好 u, v 使得原本不知反導函數的積分 $\int u dv$ 轉換成已知反導函數的 $\int v du$ 。不是只要找到 u, v 就一定可用分部積分處理。例如本例題若因知道 x 的反導函數為 $\frac{1}{2}x^2$ 而設 $u = \sin x, v = \frac{1}{2}x^2$ ，此時 $\int x \sin x dx$ 仍等於 $\int u dv$ 也因此由 $du = \cos x dx$ 得

$$\int x \sin x dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int (x^2 \cos x) dx.$$

雖然這個積分式仍然正確，但由於我們不知 $\int v du$ （即 $\int (x^2 \cos x) dx$ ）為何，所以這個設定法，無法讓我們用分部積分處理原積分。#

從**例子 3.2.4** 我們知道在利用分部積分處理積分時，應注意所設的 u, v 是否能幫助我們處理積分，若無助於處理問題就應換另一組 u, v 。一般來說，若積分的函數為 $x^n \cdot g(x)$ 的形式，且知 $g(x)$ 的反導函數為 $G(x)$ ，則令 $u = x^n, v = G(x)$ 是可行的選擇。因為此時 $du = nx^{n-1} dx$ ，所以若用此組設定可將 $\int x^n \cdot g(x) dx$ 轉換成處理 $\int v du = n \int x^{n-1} G(x) dx$ ，由於 x 的次數變小了，也因此簡化了積分的難度（通常可繼續下去直到 x 項消失）。我們看以下例子。

例子 3.2.5. [BioCalc.] Example 5.5.3 求 $\int x^2 e^x dx$ 。由於 e^x 的反導函數為 e^x ，所以依前述建議令 $u = x^2$ 以及 $v = e^x$ 。因 $du = 2x dx$ 故得

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx. \quad (3.15)$$

雖然我們依然不知 $\int x e^x dx$ ，不過可以再設一次 $u = x$ 以及 $v = e^x$ 。由於 $du = dx$ 故得

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x. \quad (3.16)$$

因此合併式子 (3.15), (3.16) 得 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$ 。#

從這個例子我們知道，有時分部積分需要處理好幾次才能完成。有時甚至，處理一次後看不出將積分簡化了，不過再做一次有可能因為積分的等式求出反導函數。我們看以下例子。

例子 3.2.6. [BioCalc.] Example 5.5.4 求 $\int e^x \sin x \, dx$ 。該 Example 中是以 $u = e^x$ 以及 $v = -\cos x$ 處理，不過這裡我們用 $u = \sin x$, $v = e^x$ 處理，讓大家了解兩種設法都可以。依我們的設法，由於 $du = \cos x \, dx$ 故得

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \quad (3.17)$$

雖然我們依然不知 $\int e^x \cos x \, dx$ ，而且看似新的積分與原積分複雜度相同。不過我們再設一次 $u = \cos x$ 以及 $v = e^x$ 。由於 $du = -\sin x \, dx$ 故得

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - (-\int e^x \sin x \, dx) = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx. \quad (3.18)$$

因此合併式子 (3.17), (3.18) 得

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx) = (e^x \sin x - e^x \cos x) - \int e^x \sin x \, dx,$$

再移項得 $2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$ ，因此得 $\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ 。有趣的是，我們也可利用式子 (3.18) 再用式子 (3.17) 得到 $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ 。#

雖然分部積分來自於微分的 product rule，不過有時積分函數未必是乘法形式，也能用分部積分處理。例如 $\ln x$ 的反導函數 $\int \ln x \, dx$ 。因為 1 的反導函數是 x ，我們可設 $u = \ln x$, $v = x$ 。此時 $du = \frac{1}{x} \, dx$ ，故利用分部積分得

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x.$$

這裡有趣的是反函數和合成有關，但它的積分並不是用和 chain rule 有關的變換變數處理。接下來我們看另兩個反函數 $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ 的反導函數，也是同樣用分部積分處理，不過還要搭配變換變數才能完成。也因此要記住，有時積分需要多個步驟且搭配不同的方法處理。

例子 3.2.7. 我們先處理 $\int \sin^{-1} x \, dx$ 。利用 $u = \sin^{-1} x$ 以及 $v = x$ ，因 $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ，我們有

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx. \quad (3.19)$$

接下來用變換變數處理 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ，即設 $u = 1 - x^2$ ，因 $du = -2x \, dx$ ，故

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} \, du = -u^{1/2} = -\sqrt{1-x^2}. \quad (3.20)$$

合併式子 (3.19), (3.20) 可得

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}.$$

對於 $\int \tan^{-1} x \, dx$ 。同樣設 $u = \tan^{-1} x$ 以及 $v = x$ ，因 $du = \frac{1}{1+x^2} \, dx$ ，我們有

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx. \quad (3.21)$$

接下來用變換變數處理 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ ，即設 $u = 1 + x^2$ ，因 $du = 2x dx$ ，故

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int u^{-1} du = \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad (3.22)$$

合併式子 (3.21), (3.22) 可得

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad \#$$

最後我們要說明，分部積分雖然設 u, v ，但它不是變換變數（沒有將整個積分式變成 u 的函數或 v 的函數的積分）。所以在處理定積分時若用到分部積分，不能如變換變數將上下界換成 u 或 v 來處理。只能求出反導函數（不定積分）再代原上下界來處理。例如 [BioCalc.] Example 5.5.6 求定積分 $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$ 。我們利用例子 3.2.7 所得 $\tan^{-1} x$ 的反導函數 $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ 代上下界得

$$\int_0^1 \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = (1 \tan^{-1}(1) - 0) - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

習題 3.6. 當積分的函數是 $f(x) \cdot g(x)$ 其中 $f(x)$ 是多項式， $g(x)$ 不是對數有關的函數，則可令 $u = f(x)$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\int x^2 \sin \pi x dx; \quad \int (x^2 + 1)e^{-x} dx; \quad \int \frac{y}{e^{2y}} dy.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.5(7, 14, 17)）

習題 3.7. 當積分的函數是 $f(x) \cdot g(x)$ 其中 $f(x)$ 是多項式（或有理根式）， $g(x)$ 是對數有關的函數，則可令 $u = g(x)$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\int p^5 \ln p dp; \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \int \frac{\ln y}{\sqrt{y}} dy.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.5(10, 15, 16)）

習題 3.8. 積分的函數不是兩個相異函數相乘時，可令 $v = x$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\int \ln \sqrt[3]{x} dx; \quad \int \arctan \frac{1}{x} dx; \quad \int (\ln x)^2 dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.5(9, 18, 19)）

3.2.3. 部分分式與查表. Partial Fractions 針對的是分式的積分，我們稱為部分分式意指將分式利用代數方法寫成一些簡單分式之和，而這些簡單分式很容易得到反導函數。最後我們簡單介紹使用查表求積分的方法。

當我們要處理有理多項式（簡稱分式）的積分 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，其中 $f(x), g(x)$ 為多項式。首先注意 $f(x)$ 的次數是否小於 $g(x)$ 的次數。若 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ ，則利用長除法將 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 寫成 $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ 其中 $h(x)$ 為商式、 $r(x)$ 為餘式，即 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。此時

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{h(x)g(x) + r(x)}{g(x)} dx = \int h(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx. \quad (3.23)$$

例如 [BioCalc.] Example 5.6.1 求 $\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx$ 。由於分子次數比較大，利用長除法 $x^3 + x = (x-1)(x^2 + x + 2) + 2$ 得

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 2) dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1|.$$

在式子 (3.23) 的積分中，因為 $h(x)$ 是多項式，它的反導函數容易求得。所以我們只要會處理 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 的反導函數即可。因此以下我們只專注於分式的積分其中分子的次數小於分母次數

的情況，也就是說我們討論的分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 皆假設 $\deg f(x) < \deg g(x)$ 。

我們先討論最簡單的一種情況，即分母可完全分解成一次式且無重根。此時若 $\deg f(x) < \deg g(x)$ 且 $g(x) = (a_1x + b_1) \cdots (a_nx + b_n)$ ，則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 可用部分分式寫成

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx + b_n}.$$

因為部分分式的每一項皆為 $\frac{c}{ax+b}$ 的形式，所以可以用變換變數 $u = ax + b$ ，得 $du = adx$ ，因此 $\int \frac{c}{ax+b} dx = \frac{c}{a} \int \frac{1}{u} = \frac{c}{a} \ln|u| = \frac{c}{a} \ln|ax+b|$ 。也因此利用積分線性性質就可求出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的反導函數了。

例子 3.2.8. [BioCalc.] Example 5.6.3 求 $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$ 。首先分子次數確實小於分母次數。接著將分母分解成 $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x-1)(x+2)$ ，沒有重根所以可寫成部分分式

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x-1} + \frac{c_3}{x+2}.$$

我們必需決定 c_1, c_2, c_3 的值。將右式通分，比較左右式的分子得

$$x^2 + 2x - 1 = c_1(2x-1)(x+2) + c_2x(x+2) + c_3x(2x-1).$$

我們可以將右式展開，比較係數解聯立方程得 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{5}, c_3 = -\frac{1}{10}$ 。另一簡單的方法是利用 $x, 2x-1, x+2$ 的根分別為 $0, \frac{1}{2}, -2$ ，將它們分別帶入上式，分別得 $-1 = -2c_1, \frac{1}{4} = \frac{5}{4}c_2$ 以及 $-1 = 10c_3$ ，故知 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{5}, c_3 = -\frac{1}{10}$ 。因此原積分為

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \ln|x+2|. \end{aligned}$$

注意，其中 $\int \frac{1}{2x-1} dx, \int \frac{1}{x+2} dx$ 我們分別用變換變數 $u = 2x-1, u = x+2$ ，得反導函數分別為 $\frac{1}{2} \ln|2x-1|$ 以及 $\ln|x+2|$ 。 #

第二種情況，即分母可完全分解成一次式但有重根。此時寫成部分分式時無重根部分和前面一樣；而重根部分例如為 $(ax+b)^k$ ，則可寫成 $\frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(ax+b)^k}$ 。我們看以下例子。

例子 3.2.9. [BioCalc.] Exercise 5.6.19 求 $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} dx$ 。 $x+2$ 是無重根部分，而 x^2 有重根，故原分式可寫成部分分式 $\frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ 。右式通分，比較分子可得 $5x^2+3x-2 = ax^2+bx(x+2)+c(x+2)$ 。代 $x=0, -2$ 分別得 $c=-1, a=3$ 。再任意代一個數例如 $x=1$ ，可得 $b=2$ ，故得

$$\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} dx = 3 \int \frac{1}{x+2} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x| + \frac{1}{x}.$$

#

比較複雜的情況是分母無法完全分解成一次式的情況。要注意，由代數基本定理以及虛根成對定理，這表示分母有虛根 $a+bi$ 和 $a-bi$ ，也因此可分解出 $(x-a)^2+b^2$ 這種形式的二次式。當分母有這樣的因式且 $a+bi$ 無重根，則這部分的部分分式可寫成 $\frac{cx+d}{(x-a)^2+b^2}$ 。我們直接看一個例子。

例子 3.2.10. [BioCalc.] Exercise 5.6.22 求 $\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx$ 。 x^2+1 無法再分解，故原分式可寫成部分分式 $\frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$ 。右式通分，比較分子可得 $3x^2-2x+3 = a(x^2+1) + (cx+d)(x-1)$ 。代 $x=1$ 得 $a=2$ 。再任意代兩個數例如 $x=0, x=-1$ （或直接展開比較係數），可得 $c=1, d=-1$ ，故得

$$\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = 2 \ln|x-1| + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx.$$

由於 $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x$ ，而 $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ 利用變換變數 $u = x^2+1$ ，由 $du = 2x dx$ 可得

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

故解得

$$\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx = 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \tan^{-1} x.$$

#

習題 3.9. 利用部分分式做以下積分：

$$\int \frac{x}{x-6} dx; \quad \int \frac{r^2}{r+4} dr; \quad \int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx; \quad \int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} dy$$

$$\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2} dx; \quad \int \frac{3x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.6(3, 4, 5, 13, 20, 21)）

習題 3.10. 做以下需要變換變數、分部積分以及部分分式的綜合問題。

- (1) $\int x \ln(1+x) dx$ （先利用 $u = \ln(1+x)$ 做分部積分，再用部分分式）。
- (2) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$ （先利用 $u = \sqrt{x+3}$ 做變數變換，再用部分分式）。

(取自 [BioCalc.] Exercise 5.5.25, 5.6.16)

最複雜情況為分母有虛根 $a + bi$ 且是 k 重根，即分母有因式 $((x - a)^2 + b^2)^k$ ，則這部分的部分分式可寫成

$$\frac{c_1x + d_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{c_2x + d_2}{((x - a)^2 + b^2)^2} + \cdots + \frac{c_kx + d_k}{((x - a)^2 + b^2)^k}.$$

因為這情況複雜度較高，我們大致舉例說明如何處理。例如求 $\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 3}{(x + 1)(x^2 + 4)^2}$ 的反導函數，我們先寫成部分分式（注意 $\pm 2i$ 有二重根），即 $\frac{a}{x + 1} + \frac{c_1x + d_1}{x^2 + 4} + \frac{c_2x + d_2}{(x^2 + 4)^2}$ 。通分後因為有 5 個未知數，我們可以代 5 個數解出 $a = 2, c_1 = 1, d_1 = 0$ 以及 $c_2 = 0, d_2 = -1$ 。因此

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 3}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} dx = 2 \int \frac{1}{x + 1} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

我們有 $\int \frac{1}{x + 1} dx = \ln|x + 1|$ ，並利用變換變數 $u = x^2 + 4$ 可得 $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)$ 。至於積分 $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$ 可利用所謂的三角變換處理。不過這裡我們不介紹此特殊技巧，取而代之，我們介紹使用積分表的方法。

積分表大部分都會分類，在比較詳細的積分表中可找到 $x^2 + a^2$ （或類似表法 $u^2 + c^2$ ）這類，其中有一項可以幫助我們處理 $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$ ，即

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2a^2(n - 1)} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3) \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx \right).$$

所以我們代 $a = 2, n = 2$ 可得

$$\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{8} \left(\frac{x}{(x^2 + 4)} + \int \frac{1}{(x^2 + 4)} dx \right) = \frac{1}{8} \frac{x}{(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2}.$$

其中 $\int \frac{1}{(x^2 + 4)} dx$ 可用變換變數 $x = 2u$ 處理或直接利用表中 $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ 代 $a = 2$ 。

積分表中有許多疊代公式可以運用。例如 [BioCalc.] Example 5.7.2 求 $\int x^3 \sin x dx$ 。我們可以在積分表的三角函數類中找到

$$\int u^n \sin u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du \quad (3.24)$$

利用 $u = x$ 以及 $n = 3$ 可得 $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx$ 。在三角函數類中也有

$$\int u^n \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du.$$

所以利用 $u = x$ 以及 $n = 2$ 可得 $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$ 。再利用一次式子 (3.24) 在 $n = 1$ 的情形得 $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$ 。結合這些結

果得

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3(x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x)) = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x.$$

積分表中函數的變數經常用 u 來表示（而不是 x ）主要就是告訴我們即使用查表法，經常需要用變換變數才能完成。我們看以下例子。

例子 3.2.11. [BioCalc.] Example 5.7.3 求 $\int x \sqrt{x^2 + 2x + 4} \, dx$ 。在積分表的分類中，我們僅看到 $\sqrt{u^2 + a^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$ 以及 $\sqrt{a^2 - u^2}$ ，並沒有看到如 $\sqrt{au^2 + bu + c}$ 這樣的分類。這意味著我們必需利用配方法 $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$ ，再利用變換變數 $u = x + 1$ 將函數寫成符合積分表中的某類。此時由於 $x = u - 1$ 以及 $du = dx$ ，所以變換變數成

$$\int x \sqrt{x^2 + 2x + 4} \, dx = \int (u - 1) \sqrt{u^2 + 3} \, du = \int u \sqrt{u^2 + 3} \, du - \int \sqrt{u^2 + 3} \, du.$$

其中 $\int u \sqrt{u^2 + 3} \, du$ 可用變換變數 $v = u^2 + 3$ （或查表）得 $\int u \sqrt{u^2 + 3} \, du = \frac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$ ，而 $\int \sqrt{u^2 + 3} \, du$ 也可用查表得積分為 $\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 3} + \frac{3}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + 3})$ 。故原積分等於

$$\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{3}{2} \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}).$$

#

要注意，並不是利用查表就可以幫我們處理所有函數的積分。事實上並不是用常見函數表示的函數它的反導函數也可用常見的函數來表示。例如

$$\int e^{x^2} \, dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx$$

等，都被證實無法用常見的函數來表示。

習題 3.11. 利用積分表處理以下積分：

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 + 9}}; \quad \int x \sin(x^2) \cos(3x^2) \, dx; \quad \int \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}; \quad \int \frac{\sec^2 \theta \tan^2 \theta}{\sqrt{9 - \tan^2 \theta}} \, d\theta.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.7(3, 10, 15, 16)）

3.3. 積分的應用

定積分的定義是由 Riemann sum 取極限而來，所以只要能用 Riemann sum 表示的求值問題都可以用定積分求得。例如前面提的面積，和之後談論的體積，都是定積分應用的範圍。

3.3.1. 函數所圍的區域面積. 在定義定積分時，我們知道當函數 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 取值皆大於等於 0 時，就可以用黎曼和取極限求得函數圖形 $y = f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這個區間與 x 軸之間所圍區域的面積。所以此時面積可以用定積分 $\int_a^b f(x) \, dx$ 求得。同理，當兩函數 $f(x), g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 都滿足 $f(x) \geq g(x)$ 時，我們一樣可以用黎曼和的極限來求函數圖形 $y = f(x), y = g(x)$ 在此區間所圍出的面積。此時當我們將區間 $[a, b]$ 分割成 n 段，利用 n 個長方形面積和來逼近 $y = f(x), y = g(x)$ 所圍區域的面積。每個長方形的寬度為 Δx_i 而高度

為 $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ (注意 $f(x_i^*) \geq g(x_i^*)$, 所以這確實為長度), 故其面積為 $(f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x_i$ 。因此黎曼和可寫成 $\sum_{i=1}^n (f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x_i$ 取極限便得面積為 $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ 。

例子 3.3.1. [BioCalc.] Example 6.1.1 探討函數圖形 $y = e^x$ 與直線 $y = x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 這個範圍所圍的面積。確認 e^x 在這範圍皆大於 x 後, 我們便可將此區域面積用定積分 $\int_0^1 (e^x - x) dx$ 表示, 並得面積為

$$\int_0^1 (e^x - x) dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} \right) - (1 - 0) = e - \frac{3}{2}.$$

[BioCalc.] Example 6.1.2 探討兩函數圖形 $y = x^2$ 與 $y = 2x - x^2$ 所圍的有界區域面積。這次沒有給 x 的範圍, 所以我們必需先找到 x 的範圍。由於兩個函數圖形一個是凹向上、另一個是凹向下, 所以它們相交處之間便會圍出一個有界區域。利用 $x^2 = 2x - x^2$ 求出它們交於 $x = 0$ 和 $x = 1$ 。接著我們必需確認 $y = x^2$ 與 $y = 2x - x^2$ 其中哪一個在此範圍 $0 \leq x \leq 1$ 是在上方。可由 $x^2 - (2x - x^2)$ 判斷或代 $x = \frac{1}{2}$, 知在 $x \in [0, 1]$ 時 $y = 2x - x^2$ 在 $y = x^2$ 上方。

故可將此區域面積用定積分 $\int_0^1 ((2x - x^2) - x^2) dx$ 表示, 並得面積為

$$\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

這裡補充一下, 一般來說兩個函數 $f(x), g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 未必都滿足其中一個一直在另一個上方, 而可能時而在上, 時而在下。所以一般來說會以 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 來表示並計算它們在這個區間所圍面積。計算時必須把哪一個在上哪一個在下變化的區間區隔出來再分別計算。例如 $y = x^3$ 與 x 軸在 $-1 \leq x \leq 1$ 之間所圍區域不是 $\int_{-1}^1 x^3 dx$, 因為上下抵消, 積分會得到 $\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1}^1 = 0$ 。其面積應是 $\int_{-1}^1 |x^3| dx$, 因為 $y = x^3$ 在 $x \in [-1, 0]$ 時在 x 軸下方, 而 $x \in [0, 1]$ 時在 x 軸上方, 所以面積為

$$\int_{-1}^1 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (0 - x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

#

有時我們需要計算函數圖形到無窮遠點所圍的區域面積。由於我們不可能真的計算到無窮遠, 所以這時便需用到極限的概念。也就是說當 $f(x)$ 在 $x \geq a$ 時皆大於等於 0, 我們要計算 $y = f(x)$ 在 $x \geq a$ 和 x 軸所圍面積, 此時我們會用 $\int_a^\infty f(x) dx$ 來表示這個面積。這個積分一般不稱為定積分, 而稱之為“瑕積分”(improper integral)。瑕積分的計算方式便是先考慮積有限的範圍, 即考慮 $\int_a^b f(x) dx$, 然後再讓 b 趨近於無限大, 求其極限。瑕積分不只幫我們求面積, 也有其他應用, 所以不需 $f(x) \geq 0$, 在一般狀況定義瑕積分為

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.25)$$

注意這裡 a 是固定的數字, 而 b 是任意選取的, 所以對 b 取極限。當極限存在時稱此瑕積分收斂, 並以收斂值為其積分值; 而若極限不存在, 便稱此瑕積分發散。

例子 3.3.2. 我們分別求瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 以及 $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ([BioCalc.] Example 5.8.1)。依定義 (式子 (3.25))

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - 0 = \infty.$$

所以我們說瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 收斂且其值為 1；而瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ 發散。注意雖然 $y = \frac{1}{x^2}$ 和 x 軸所圍區域從 $x = 1$ 延伸到無窮遠面積一直增加，但不會增加到無限大，從前面計算知這面積會趨近於 1；但 $y = \frac{1}{x}$ 和 x 軸所圍面積就會趨近於無限大。 #

瑕積分的定義也可推廣到負無窮遠，當 b 為固定值，我們定義瑕積分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 為

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.26)$$

例如瑕積分 $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ ([BioCalc.] Example 5.8.3) 依定義為收斂且其值為 1，因為

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

我們也可談兩端都趨近於無限大的瑕積分，其定義為選取一固定實數 c (通常選 0)，然後分別計算上下界的瑕積分 $\int_{-\infty}^c f(x) dx, \int_c^\infty f(x) dx$ 再加起來，亦即

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx. \quad (3.27)$$

注意兩個瑕積分要分開算，再加起來，其中只要有一個瑕積分是發散，原瑕積分就發散。千萬不要用 $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx$ 這樣的方式計算，會有正負抵消造成錯誤的情況發生。

例子 3.3.3. 考慮瑕積分 $\int_{-\infty}^\infty x dx$ ，若用 $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x dx$ ，會得到

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-a}^a = \frac{1}{2} (a^2 - a^2) = 0,$$

這樣的錯誤發生。事實上，依定義應為

$$\int_{-\infty}^\infty x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^\infty x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx.$$

因為其中 $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} b^2 = \infty$ 為發散 (事實上 $\int_{-\infty}^0 x dx$ 也發散) 所以此瑕積分為發散。

[BioCalc.] Example 5.8.4 考慮瑕積分 $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ 。分開來計算，我們有

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$

同理可得 $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\tan^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ 。故 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ 。 #

前面談的瑕積分是在無限的區間積分，但在積分的範圍內函數都是有定義的。還有一種瑕積分是在有限區間積分，但函數在積分範圍某些點無定義（趨近於無限大）。例如 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 和 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ，由於 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=0$ 無定義，所以它們都是瑕積分。這種瑕積分和前面情況一樣的概念處理：先考慮不含無定義點的定積分，再慢慢逼近求極值。因此我們有瑕積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln a) = \infty$$

為發散；而

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2$$

為收斂且其值為 2。

前面在探討 $\frac{1}{x}$ 的不定積分為 $\ln|x|$ 有提及 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 為瑕積分，就是因為 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 時無定義（不連續），無法套用微積分基本定理。事實上，如同前面的定義，此瑕積分應為 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 。由於已知 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 為發散，所以 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 也是發散。

習題 3.12. 判斷以下瑕積分是否收斂，若收斂請求其值：

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}} dx; \quad \int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.8(3, 8, 18)）

習題 3.13. 求以下函數圖形在指定範圍內所圍有界區域之面積：

(1) $y = 5x - x^2, y = x, 0 \leq x \leq 4.$

(2) $y = \cos x, y = 2 - \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi.$

(3) $y = \cos x, y = 1 - \cos x, 0 \leq x \leq \pi.$

（取自 [BioCalc.] Exercise 6.1(1, 10, 14)）

3.3.2. 平均值. 當有有限個數字，其平均值就是將這些數字加起來，再除以這些數字的個數。當有無限多個數字，要求其平均，我們可以利用極限的概念，先算有限多個的平均值，再逐漸增加數量求其極限。利用這個概念，一個連續函數在一個區間的平均，便可以用黎曼和的極限表示成定積分的形式。

假設在時間為 t 時溫度為 $f(t)$ ，我們要如何算從時間 a 到 b 這段時間的平均溫度呢？我們可以將這段時間均分為 n 等分，亦即每一等分時間間距為 $\Delta t_i = \frac{b-a}{n}$ 。然後在每段時間中挑一個時間 t_i^* 測量得到溫度 $f(t_i^*)$ 。這 n 個溫度的平均值可寫成

$$\frac{1}{n}(f(t_1^*) + f(t_2^*) + \cdots + f(t_n^*)) = \frac{\Delta t_i}{b-a}(f(t_1^*) + f(t_2^*) + \cdots + f(t_n^*)) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t_i,$$

恰為黎曼和的形式。所以當分割的次數逐漸增加取極限可得這段時間的平均溫度為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

因此我們定義連續函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 的平均值為

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

例如 [BioCalc.] Example 6.2.2 提及西元 1900 年全世界人口約為 1.43653×10^9 。若從 1900 年開始 (設 $t = 0$)， t 年後世界人口數依模型為 $P(t) = 1.43653 \times 10^9 \cdot (1.01395)^t$ 。則我們可以算出整個 20 世紀 (即 $t = 0$ 到 $t = 100$) 全世界人口的平均值約為

$$\frac{1}{100} \int_0^{100} 1.43653 \times 10^9 \cdot (1.01395)^t dt = 1.43653 \times 10^7 \cdot \frac{(1.01395)^{100} - 1}{\ln(1.01395)} \approx 3.1 \times 10^9.$$

關於平均值有一個重要性質，稱為積分的均值定理。這個均值定理可以用 (微分) 均值定理處理。回顧當函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為連續，且令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ，則由第一型微積分基本定理知 $F'(x) = f(x)$ ，因此對任意 $c \in (a, b)$ ，皆有 $F'(c) = f(c)$ 。再由 (第二型) 微積分基本定理 (Theorem 3.1.2) 知 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ 。另一方面，均值定理 (Theorem 2.3.1) 告訴我們存在 $c \in (a, b)$ 滿足 $F'(c) = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$ ，因此得知 c 滿足

$$f(c) = F'(c) = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.28)$$

這個均值定理可以用剛才平均溫度的例子來理解，它告訴我們一天中會有一個特定時間的溫度和整天的平均溫度一樣。

例子 3.3.4. [BioCalc.] Example 6.2.3 考慮函數 $f(x) = x^2 + 1$ 在區間 $[-1, 2]$ 的情形。要求 $f(x)$ 在這之間的平均值，並找到 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c)$ 為此平均值，以驗證積分均值定理。依定義 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的平均值為 $\frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_{-1}^2 = 2$ 。我們必須找到 $c \in (-1, 2)$ 滿足 $f(c) = c^2 + 1 = 2$ 。解得 $c = \pm 1$ 確實其中一點 $1 \in (-1, 2)$ 。#

習題 3.14. 回答以下平均值問題：

- (1) 求函數 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 在區間 $[1, 8]$ 的平均值
- (2) 某城市在早上 9 點後 t 小時其溫度為 $T(t) = 50 + 14 \sin \frac{\pi t}{12}$ 。試求該城市從早上 9 點到晚上 9 點的平均溫度。

(取自 [BioCalc.] Exercise 6.2.3, 6.2.13)

3.3.3. 體積. 當一個物體的每一個切面面積可以用函數表示時，便可以用黎曼和表示此物體的體積。也因此在此情形，我們可以用定積分求此物體的體積。

我們可以把要算體積的物體放在空間坐標的 x 軸上，假設放在 $x = a$ 到 $x = b$ 之間。沿著與 x 軸垂直的方向將此物體細切成 n 片。每片依序算其體積，第 i 片的薄片厚度用 Δx_i 表示且設其切面面積為 $A(x_i)$ ，當切得夠細時，此薄片面積會很接近 $A(x_i) \Delta x_i$ 。因此當越切

越細時每片體積的加總 $\sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i$ 會越來越接近其體積，因此此黎曼和取極限便可得此物體的體積為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i = \int_a^b A(x) dx. \quad (3.29)$$

這就是利用積分算體積的方式。

[BioCalc.] Example 6.4.5 考慮的物體其底為半徑為 1 的圓，將粗體置於 xy 平面，且圓心在原點上。已知沿著與 x 軸垂直的方向切此物體，每個切面皆為正三角形。由於在 x 坐標為 x_i 的位置所切的切面其底為與圓心距離為 $|x_i|$ 的弦，故弦長為 $2\sqrt{1-x_i^2}$ 。也因此知此切面為底為 $2\sqrt{1-x_i^2}$ 的正三角形。由正三角形每個角為 $\frac{\pi}{3}$ 即三角形面積公式知此切面面積為 $\frac{1}{2} \left(2\sqrt{1-x_i^2} \right)^2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}(1-x_i^2)$ 。由於 x 的範圍為 $x = -1$ 到 $x = 1$ ，故得此物體體積為

$$\int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = \sqrt{3} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

一般的物體很多可用旋轉的概念形成。例如一個上半圓以底部直徑為軸旋轉一圈便可得到一個球、一個線段以通過端點的另一直線為軸，旋轉一圈便可得到一個圓錐，... 等。以這種方式形成的物體，稱為旋轉體。旋轉體的體積都能用積分的方式求其體積。假設我們要考慮的旋轉體是函數圖形 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 到 $x = b$ 這一段，以 x 軸為旋轉軸繞一圈所得。由於對此旋轉體在每個分割點 x_i 沿著與 x 軸垂直的方向所切的薄片切面是一個圓。這個圓的半徑就是 $|f(x_i)|$ 所以面積 $A(x_i)$ 為 $\pi(f(x_i))^2$ 。利用積分算體積的方式（式子 (3.29)），得到此旋轉體的體積為

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (3.30)$$

例子 3.3.5. [BioCalc.] Example 6.4.2 探討半徑為 r 的球之體積。由於球可用半徑為 r 的上半圓旋轉而得，我們可將之視為是以函數 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 在 $x = -r$ 和 $x = r$ 之間以 x 軸為旋轉軸旋轉一圈的旋轉體。故依式子 (3.30) 知其體積為

$$\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-r}^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

[BioCalc.] Example 6.4.4 探討兩函數 $y = x$ 和 $y = x^2$ 所圍區域以 x 軸為旋轉軸旋轉一圈的旋轉體體積。首先先求兩圖形的交點發生於 $x = x^2$ ，即 $x = 0, x = 1$ 之處，所以我們只要考慮 $x = 0$ 到 $x = 1$ 這一部分。由於此部分 $y = x$ 都在 $y = x^2$ 的上方，所以這個旋轉體可視為 $y = x$ 所繞得較大的旋轉體（圓錐）挖掉 $y = x^2$ 所繞得較小的旋轉體而得。因此可得此旋轉體體積為

$$\pi \int_0^1 (x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$

習題 3.15. 回答以下有關體積問題：

- (1) $y = \sqrt{x-1}$ 與 x 軸在 $1 \leq x \leq 5$ 所圍區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積。
- (2) $y = x^3$ 與 $y = x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 所圍區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積。

(3) 底部為半徑為 r 的圓，而與底部垂直的切面都是正方形的物體體積。

(取自 [BioCalc.] Exercise 6.4(3, 5, 14))

3.3.4. 生物學的應用. 最後我們藉由一些生物學上的應用，再次強調寫成黎曼和便能用定積分計算，這個重要的方法。

3.3.4.1. 心臟輸出率. 這裡指的是每單位時間心臟推入主動脈的血液量。一種測量心輸出量的方法 (dye dilution method) 是輸入固定劑量 A 的染劑。在確定染劑最後會被稀釋殆盡的時間 T 內將時間分割成 n 等分 (故每段時間為 $\Delta t_i = \frac{T}{n}$)，在每段時間開始 t_i ，測量血液中染劑濃度 $c(t_i)$ 。若心臟輸出率為 F ，且每段時間 Δt_i 很短時，這段時間所得染劑的量應為血液量 $F\Delta t_i$ 乘上染劑濃度 $c(t_i)$ 。所以總染劑量 A 會很接近 $\sum_{i=1}^n c(t_i)F\Delta t_i$ ，且會因 n 越來

越大越接近。這是一個黎曼和，故取 $n \rightarrow \infty$ 得極限 $\int_0^T c(t)F dt = A$ 。因此便可算得心臟輸出率為

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}.$$

[BioCalc.] Exercise 6.3.11 所舉的例子是劑量 $A = 6$ 、時程 $T = 10$ 而測得染劑濃度符合函數 $c(t) = 20te^{-0.6t}$ 。利用分部積分

$$\int te^{-0.6t} dt = -\frac{1}{0.6}te^{-0.6t} + \frac{1}{0.6} \int e^{-0.6t} dt = -\frac{1}{0.6}(te^{-0.6t} + \frac{1}{0.6}e^{-0.6t})$$

可得 $\int_0^{10} te^{-0.6t} dt = \frac{1}{0.36}(-7e^{-6} + 1)$ 因此在此情況 $F = \frac{6}{20} \times \frac{0.36}{-7e^{-6} + 1} \approx 0.1099$ 。

3.3.4.2. 血流量. 這裡指的是每單位時間流出的血液量。由於血液在血管的流動速度會和其與血管中心軸的距離 r 有關，所以我們必需將血管半徑 R 分段來計算流量。假設依與中心軸距離由小而大依序為 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 。這樣分割血管的剖面每一段都是環狀。當分割很細時，由於環的寬度 $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ 很小，我們可以假設在這環內的血液流速都是 $v(r_i)$ 。因此我們只要知道這個環的面積，乘上流速 $v(r_i)$ 就可知道在單位時間從這個環流出的血液量。

由於第 i 段的環，是半徑為 r_i 的圓扣掉半徑為 r_{i-1} 的圓。因為想寫成黎曼和，我們將 r_{i-1} 寫成 $r_i - \Delta r_i$ 所以這個環的面積為

$$\pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = \pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = \pi(2r_i - \Delta r_i)\Delta r_i = 2\pi r_i \Delta r_i - \pi(\Delta r_i)^2.$$

因為分割得很細 $(\Delta r_i)^2$ 比起 Δr_i 小得很多，可以忽略不計，所以這個環狀區域的面積很接近 $2\pi r_i \Delta r_i$ 。也因此單位時間流出這個環的血液量為 $2\pi r_i \Delta r_i \cdot v(r_i)$ 。將這些環單位時間流出量加總 $\sum_{i=1}^n 2\pi v(r_i) r_i \Delta r_i$ 就會很接近單位時間的血流量 F ，且會因 n 越來越大越接近。這是一個黎曼和，故取 $n \rightarrow \infty$ 得極限 $\int_0^R 2\pi r v(r) dr = F$ 。

事實上根據血液的層流定律 (Law of Laminar Flow)，當血管半徑為 R 長度為 ℓ ，而壓力為 P 黏度為 η 時，距離血管中心軸為 r 的流速為 $v(r) = \frac{P}{4\eta\ell}(R^2 - r^2)$ 。所以我們可以得

到血流量為

$$F = \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta\ell} (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta\ell} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi P}{2\eta\ell} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi P R^4}{8\eta\ell}.$$

這稱為 *Poiseuille's Law*。

3.3.4.3. 人口預估. 影響人口數量的有兩個函數。一個是所謂的新生函數 (renewal function) $R(t)$ ，它表示從現在起 t 年後新生人口增加速度；另一個是所謂存活函數 (survival function) $S(t)$ ，它指的是當時人口 t 年後仍存活的比率。

若現有人口為 P_0 ，要估計 T 年後的人口。首先注意依照存活函數定義，當前人口會有 $S(T) \cdot P_0$ 人在 T 年仍存活。不過之後出生的人口會因出生時間不同存活率不同，因此我們必需將時間 T 分割成 n 段， $t_1, t_2, \dots, t_n$ ，依序計算這些段出生人口到時存活的人數。當分割很細時我們可假設在 t_{i-1} 到 t_i 這段新增人口速度都是 $R(t_i)$ ，所以這段時間新增人數為 $R(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = R(t_i) \cdot \Delta t_i$ 。而這些人到 T 年還有 $T - t_i$ 年，所以他們到 T 年時有 $S(T - t_i) \cdot R(t_i) \cdot \Delta t_i$ 人存活。將這些各段時間算出的存活人數加總得 $S(T) \cdot P_0 + \sum_{i=1}^n S(T - t_i) \cdot R(t_i) \cdot \Delta t_i$ 會很接近 T 年後之人口 $P(T)$ ，且會因 n 越來越大越接近。

這是一個黎曼和，故取 $n \rightarrow \infty$ 得極限 $S(T) \cdot P_0 + \int_0^T S(T - t) \cdot R(t) dt = P(T)$ 。

[BioCalc.] Example 6.3.1 討論有一池塘現有 5600 隻鱒魚，而這些鱒魚在第 t 的新生率 (新生函數) 為 $R(t) = 720e^{0.1t}$ (fish/year)，而過 t 年的存活率 (存活函數) 為 $S(t) = e^{-0.2t}$ 。想預估 10 年後的鱒魚數量。依前面討論，我們有

$$P(10) = 5600e^{-2} + 720 \int_0^{10} e^{-0.2(10-t)} e^{0.1t} dt = 5600e^{-2} + 720e^{-2} \int_0^{10} e^{0.3t} dt.$$

因為 $\int_0^{10} e^{0.3t} dt = \frac{1}{0.3} e^{0.3t} \Big|_0^{10} = \frac{1}{0.3} (e^3 - 1)$ ，所以

$$P(10) = 5600e^{-2} + \frac{720}{0.3} e^{-2} (e^3 - 1) = 5600e^{-2} + 2400(e - e^{-2}) \approx 6956.95.$$