

極限以及連續性

本課程探討的是定義在實數且取值為實數的函數。函數的極限是學習微積分最重要的基本概念。在本章中，我們先介紹數列的極限進而介紹函數極限的基本概念，再利用極限的概念介紹何謂連續函數。接著，介紹一些求極值的方法以及連續函數的性質。

1.1. 數列的極限

所謂數列 (sequence) 的極限 (limit) 談的是有無限多項的數列 (infinite sequence) 其長期變化的趨勢。這裡，為了方便起見我們談的數列都有起始項，且項數是增加的。這裡我們不要求對極限性質的證明，而強調對這些性質的理解與運用，所以不會論及數列的極限在數學上嚴格的定義。

當不論及正式的定義，[BioCalc.] Definition 2.1.1 說一個數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 L ，指的是當 n 夠大時，都會使得 a_n 任意接近 L ，並用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (或 $a_n \rightarrow L$ as $n \rightarrow \infty$) 表示之。這裡要注意的是 L 必須是一個實數；而當 n 夠大時，都會使得 a_n 任意接近 L 說的是任選一個包含 L 的開區間 (例如 $(L - 0.001, L + 0.001)$) 都可以找到 N 使得當 $n \geq N$ 時， a_n (即第 N 項以後) 都會落在這區間內。

當一個數列極限存在且極限值為 L 時 (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$) 我們稱此數列收斂到 L (converges to L)，而若不強調其極限值僅強調其極限存在 (有時極限值不好求，我們僅關心其極限是否存在)，便稱此數列收斂 (converges)。反之，當一個數列極限不存在時，我們便稱此數列發散 (diverges)。

例子 1.1.1. [BioCalc.] Example 2.1.1 舉了 $a_n = \frac{1}{n}$ 和 $b_n = (-1)^n$ 這兩個例子。因為 n 越大， a_n 的分母越大，我們可推測 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ；而 b_n 在 $1, -1$ 間跳動沒有極限，所以 b_n diverges。由於計算機的取值有效位數有限制，僅代值看趨勢判斷極限值會有問題，所以正確的方式就是利用定義證明。例如對於數列 $\langle a_n \rangle$ 要證明其極限為 0 ，選取包含 0 的任意區間，對於夠大的 n ， a_n 都會落在這區間內。例如考慮區間 $(-0.01, 0.01)$ ，當 $n > 100$ 時，都會有

$0 < a_n < 0.01$ (即 $a_n \in (-0.01, 0.01)$)。數學上就是以此方法證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。論證一個數列收斂或發散有時相當困難，只要大家理解基本概念，在此課程不會要求。

注意：許多人會說 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 表示當 n 越來越大時 a_n 會越靠近 L ，不過這樣的說法容易

讓人誤解。例如考慮 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{當 } n \text{ 為奇數;} \\ \frac{2}{n}, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$ 這個數列是以忽遠忽近的方式接近 0。例如

$a_{100} = \frac{1}{50}, a_{101} = \frac{1}{101}, a_{102} = \frac{1}{51}$ ，並沒有越來越靠近 0。不過選取包含 0 的任意區間，對於夠大的 n ， a_n 都會落在這區間內。例如考慮區間 $(-0.01, 0.01)$ ，當 $n > 200$ 時，都會有 $-0.01 < a_n < 0.01$ (即 $a_n \in (-0.01, 0.01)$)。所以我們仍然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。 #

由於我們關心的是數列長期變化的趨勢，對於發散的數列我們又區分成幾種情況。一種情況是任選一個正實數 M ，當 n 夠大時 a_n 都會大於 M ，此時我們用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 表示，並稱 a_n 發散到無窮大 (diverges to infinity)。反過來，若任選一個負實數 K ，當 n 夠大時 a_n 都會小於 K ，此時我們用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 表示，並稱 a_n 發散到負無窮大。例如 [BioCalc.] Example 2.1.2 中 $a_n = \sqrt{n}$ 就發散到無窮大。這兩種情況外的其他的情況，我們就直接說數列發散，也不會用 $\lim$ 的符號表示。例如前面例子 1.1.1 中 $b_n = (-1)^n$ 因為不會收斂到任何的值，所以發散，但 b_n 是有界的 (因 $|b_n| = 1$) 所以不會發散到無窮大。

一般來說，要了解一個數列收斂或發散並不容易，而若收斂要知道其極限為何更是困難。以後學了微積分，我們可以利用一些技巧處理。以下介紹的一些有關數列極限的基本性質。有了這些性質基本，我們就可以利用一些已知數列的極限求得其他相關數列的極限。

Theorem 1.1.2. 假設 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 均為收斂的數列。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。
- (3) 假設 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ 。

這個定理可以用極限定義方式證明，我們只要了解其意義，證明就略過了。請注意要使用此定理的先決條件是兩個數列都是收斂的。當 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 均為收斂的數列且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 。性質 (1) 說考慮相加的數列 $\langle s_n \rangle$ 其中 $s_n = a_n + b_n$ ，則 $\langle s_n \rangle$ 會收斂且 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A + B$ 。而若考慮相乘的數列 $\langle p_n \rangle$ 其中 $p_n = a_n \cdot b_n$ ，性質 (2) 告訴我們 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = AB$ 。又若對所有 n 皆有 $b_n \neq 0$ 且 $B \neq 0$ ，考慮相除的數列 $\langle q_n \rangle$ 其中 $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{A}{B}$ 。要注意這裡要求 b_n 皆不為 0，否則 q_n 會無法定義。另外，即使 b_n 皆不為 0，仍有可能 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B = 0$ (例如 $b_n = \frac{1}{n}$ 的情況)，所以我們也要排除 $B = 0$ 的情況。

雖然我們列的性質比 [BioCalc.] P.91 所列的 Limit Laws for Sequence 少，可是 [BioCalc.] 所列的性質有些部分是可以利用這裡的 Theorem 1.1.2 來推導。例如當 c 是一個常

數，我們可以將之看成是一個常數數列 $\langle b_n \rangle$ ，也就是說每一項 b_n 都等於 c ，所以我們有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ 。也因此數列 $\langle ca_n \rangle$ 就可視為數列 $\langle b_n a_n \rangle$ ，此時就可套用 Theorem 1.1.2(2) 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (1.1)$$

同樣的道理，對於給定的實數 r, s 如果數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 均為收斂，我們也可利用式子 (1.1) 以及 Theorem 1.1.2(1) 推得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ra_n + sb_n) = r \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + s \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (1.2)$$

例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

例子 1.1.3. 考慮數列 $\langle a_n \rangle$ 其中 $a_n = 2 + \frac{3}{n^2}$ 。由於 $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ，所以利用極限乘法性質 (Theorem 1.1.2(2))，可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 又因為常數數列 2 是收斂的，所以由式子 (1.2) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 3 \times 0 = 2$ 。 #

另外當 $b_n = a_n$ 時，數列 $\langle a_n b_n \rangle$ 和 $\langle a_n^2 \rangle$ 是一樣的數列，所以同樣利用 Theorem 1.1.2(2) 我們也可推得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2$ 。同理，這也可推到更高次方，也就是說對任意的正整數 $k \in \mathbb{N}$ ，我們也會有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^k$ 。這對於負整數 $-k$ 也成立嗎？由於 $a_n^{-k} = \frac{1}{a_n^k}$ ，所以由 Theorem 1.1.2(3) 我們知當 $-k$ 為負整數時，只有當 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 時才能確保 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-k} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{-k}$ 。其實，這個性質不只對整數次方成立，對任意的實數次方也成立，所以我們有以下的定理。

Theorem 1.1.4. 給定實數 r ，假設 $\langle a_n \rangle$ 為收斂的數列且 a_n^r 皆有定義。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$ ，則我們有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^r = A^r.$$

又若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，則當 $r > 0$ 時 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = 0$ ；而當 $r < 0$ 時數列 $\langle a_n^r \rangle$ 發散。

這裡要提醒一下對於非整數次方 r ，必需 $a_n > 0$ 才能確保 a_n^r 有定義。

再次強調這裡所述的性質的先決條件是數列必需收斂，也就是說若有其中一個數列發散就不適用。不過，當其中有一個收斂，另一個發散，我們依然可以利用前面的性質以及反證法得到一些有趣的結論。比方說若已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂、 $\langle b_n \rangle$ 發散，我們就可用反證法證得 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散。所謂反證法就是假設 $c_n = a_n + b_n$ 是收斂的，然後利用這假設得到矛盾。這就表示 $\langle c_n \rangle$ 是收斂的這個假設是錯的，因此得證 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散。事實上由於 $b_n = c_n - a_n$ ，而我們又已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂，所以如果 $\langle c_n \rangle$ 是收斂的，故由前面所提性質會導致相減的數列 $b_n = c_n - a_n$ 也會收斂。這與已知 b_n 發散相矛盾，所以 c_n 發散。

同樣的想法，如果已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂、 $\langle b_n \rangle$ 發散能否推導出 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散呢？我們依樣畫葫蘆，考慮 $c_n = a_n b_n$ ，並假設 $\langle c_n \rangle$ 收斂，此時由於 $b_n = \frac{c_n}{a_n}$ ，如果 $\langle a_n \rangle$ 不是收斂到 0，前面 Theorem 1.1.2(3) 告訴我們 $\langle b_n \rangle$ 會收斂，這就造成矛盾了。所以在 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 的情況下，我們可以保證 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散。我們把這些結果寫成以下引理 (Corollary)。

Corollary 1.1.5. 假設數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂且數列 $\langle b_n \rangle$ 發散。我們有以下結果：

- (1) 數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ 發散。
- (2) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 則數列 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散。

當兩個數列都是發散，它們之間加減乘除後所得的數列收斂或發散的情況都有可能發生，一般就說這類的極限問題是不定型 (indeterminate form)。我們先看 [BioCalc.] Example 2.1.3 所考慮的數列極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n^2}{5+3n+4n^2}$ 。由於分子、分母都發散（趨近於無限大），所以是不定型，無法用前面極限性質決定其收斂或發散。不過若上下同除以 n^2 ，原數列並未改變，亦即

$$\frac{1+2n^2}{5+3n+4n^2} = \frac{\frac{1+2n^2}{n^2}}{\frac{5+3n+4n^2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2} + 2}{\frac{5}{n^2} + \frac{3}{n} + 4}.$$

這個新的表示法，分子 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + 2) = 2$ 、分母 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{5}{n^2} + \frac{3}{n} + 4) = 4$ ，所以可以套用極限的性質 (Theorem 1.1.2(3))，得到原數列的極限值為 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

習題 1.1. 假設數列 $\langle a_n \rangle$ 發散且數列 $\langle b_n \rangle$ 收斂。考慮 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ 。試利用反證法證明數列 $\langle c_n \rangle$ 發散。

習題 1.2. 上面所提 [BioCalc.] Example 2.1.3 這種不定型的問題其實都可以將分子、分母除以分母的最高次來處理。試用此法說明以下數列是收斂還是發散。

- (1) $\langle \frac{1+2n^2}{5+3n+4n^3} \rangle$ (Hint：分子、分母同時除以 n^3)。
- (2) $\langle \frac{1+2n^3}{5+3n+4n^2} \rangle$ (Hint：分子、分母同時除以 n^2 並利用 **習題 1.1** 的結果)。

習題 1.3. 此題希望能找到例子說明不定型的情況，收斂或發散都有可能。

- (1) 試找到三個發散的數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ ，滿足 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂，但 $\langle a_n + c_n \rangle$ 發散。
- (2) 試找到三個發散的數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ ，滿足 $\langle a_n b_n \rangle$ 收斂，但 $\langle a_n c_n \rangle$ 發散。

習題 1.4. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(17,18,19,22))

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}} \quad b_n = \sin \frac{n\pi}{2} \quad c_n = \cos \frac{n\pi}{2} \quad d_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{n}}.$$

(Hint： $\sqrt{n^3+4n}$ 的最高次項可視為 $n^{3/2}$ ； $\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$ ， $\sqrt[4]{n} = n^{1/4}$)

1.1.1. 等比數列與級數. 等比數列 (geometric sequence) $a, ar, ar^2, \dots$ 是一種常見的數列，它的通式可寫成 $b_n = ar^n$ ，其中 a 成為首項， r 稱為公比。我們要求 a, r 皆為非零實數。

很容易看出等比數列的極限會因 r 而影響。最重要的是當 $r > 0$ 時我們有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < r < 1; \\ 1, & \text{if } r = 1; \\ \infty, & \text{if } r > 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

此時對於實數 a 就可用極限的乘法處理 ar^n 的極限。注意，當 $r > 1$ 時， ar^n 會依 $a > 0, a < 0$ 分別發散到 ∞ 與 $-\infty$ 。另外，當 $r < 0$ 時，我們也可推得當 $-1 < r < 0$ 時 $\lim_{n \rightarrow \infty} ar^n = 0$ ；而當 $r \leq -1$ 時， ar^n 都會發散。我們有以下結論：

Proposition 1.1.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ar^n = \begin{cases} 0, & \text{if } -1 < r < 1; \\ a, & \text{if } r = 1; \\ \pm\infty, & \text{if } r > 1. \\ \text{diverges,} & \text{if } r \leq -1. \end{cases}$$

例子 1.1.7 (BioCalc.). Example 2.1.4 要求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{6^n}$ 。由於 $2, 6 > 1$ 所以 $2^n \rightarrow \infty$, $6^n \rightarrow \infty$ ，原極限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型。不過 $\frac{2^n - 1}{6^n} = (\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{6})^n$ ，所以原數列可看成兩個收斂（因 $0 < r < 1$ ）的等比數列的差，故得極限為 0。 #

和等比數列有關的就是等比級數 (geometric series)。將等比數列 $a, ar, ar^2, \dots$ 的前 $n+1$ 項加起來就稱為前 $n+1$ 項所成的級數，通常我們用 $s_n = \sum_{k=0}^n ar^k$ 來表示。如何將所有的項加起來呢？由於基本上我們只能每次做有限多個加法，無法將無窮多個數加在一起。所以我們會將 s_n 看成新的數列，並以其極限視為將每一項都加起來的值，稱為無窮級數 *infinite series*，用 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ 來表示。由於 $rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1}$ ，可得 $(r-1)s_n = rs_n - s_n = ar^{n+1} - a$ ，故

$$s_n = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (1.4)$$

由式子 (1.4) 以及 Proposition 1.1.6 我們有以下的定理：

Proposition 1.1.8. 考慮首項為 a 公比為 r 的無窮等比級數。

(1) 當 $|r| < 1$ 時，此級數收斂且

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}.$$

(2) 當 $|r| > 1$ 時，此級數發散。

附註：當 $r = 1$ 時，若 $n \rightarrow \infty$ ， $s_n = a + a + \dots + a = (n+1)a$ 會趨近於 $\pm\infty$ ；而當 $r = -1$ 時， $s_n = a - a + \dots$ 會因 n 為奇數、偶數取值在 $a, 0$ 間跳動。所以 $r = \pm 1$ 時，等比級數依然發散。

例子 1.1.9. 循環小數 $0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots$ 可以視為首項為 0.9 公比為 0.1 的無窮等比級數，故由 Proposition 1.1.8 可知此數等於 $\frac{0.9}{1-0.1} = 1$ 。

[BioCalc.] Example 2.1.7 要了解循環小數 $2.3\overline{17}$ 的值。由於

$$2.3\overline{17} = 2.3 + 0.017 + 0.00017 + 0.0000017 + \cdots,$$

我們可以將之視為 2.3 加上首項為 0.017 公比為 0.01 的無窮等比級數，故由 Proposition 1.1.8 得其值為 $\frac{23}{10} + \frac{0.017}{0.99}$ 。 #

習題 1.5. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(10,15,20,24))

$$a_n = \frac{5}{3^n}; \quad b_n = 1 - 0.2^n; \quad c_n = \frac{\pi^{n-1}}{3^n}; \quad d_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}.$$

習題 1.6. 試判斷以下數列收斂或發散，若是收斂請說明其極限。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(21,25))

$$r_n = \frac{10^n}{1 + 9^n}; \quad s_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}.$$

Hint: 分子、分母同時除以分母的最大項。 $e \approx 2.718$ 。

習題 1.7. 試將 $1.534\overline{2} = 1.53424242\ldots$ 寫成分數。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1.45)

1.1.2. 遞迴數列. 生命科學上很多問題的模型會用到遞迴數列 (recurrence sequence 或 [BioCalc.] 所稱 difference equation)，基本上，遞迴數列表達的便是前後幾項的關係，例如 $b_{n+1} = rb_n + c$ ，其中 r, c 是給定的實數。如果給定 b_0 ，那麼

$$b_1 = rb_0 + c, \quad b_2 = rb_1 + c = r(rb_0 + c) + c = r^2b_0 + rc + c, \quad (1.5)$$

如此一直下去，便稱為遞迴數列。

[BioCalc.] (Example 2.1.5, 2.1.6) 舉了一個病患每天用藥，藥物在病患身上每天濃度變化情況的模型： $C_{n+1} = 0.3C_n + 0.2$ 。假設病患在用藥前一天（第 0 天）沒有用藥，藥物濃度 $C_0 = 0$ 利用遞迴關係式可得 $C_1 = 0.2$, $C_2 = 0.3 \times 0.2 + 0.2 = 0.26$ ，如此一直下去，觀察此遞迴數列很可能會趨近一定值。我們假設極限存在，遞迴數列有一個很好的方法讓我們決定其極限為何。首先假設極限為 C ，由於 C_{n+1}, C_n 都會趨近於 C 故兩邊取極限得 $C = 0.3C + 0.2$ ，求得 $C = \frac{2}{7}$ 。這個方法求極限很簡單，但要注意它必需是知道數列有極限才使用。若數列極限不存在，用這方法還是可以求出值來，不過這個值絕不是極限，因為極限根本不存在。要怎樣確定這個極限是否存在呢？有時僅由數字可能會干擾我們看出其規律性，我們可以回到原來抽象的遞迴關係式 $b_{n+1} = rb_n + c$ 看出端倪。由式子 (1.5) 繼續下去可得

$$b_3 = rb_2 + c = r(r^2b_0 + rc + c) + c = r^3b_0 + (1 + r + r^2)c.$$

這樣大概可以看出（可用數學歸納法證明）對於一般的 $n \in \mathbb{N}$ ，

$$b_n = r^n b_0 + (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1})c = r^n b_0 + \frac{r^n - 1}{r - 1}c.$$

又由 Proposition 1.1.6, 1.1.8 我們知道 b_n 只有在 $|r| < 1$ 時會收斂，此時可得極限為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{c}{1 - r}.$$

前面所提 [BioCalc.] 的例子中 $r = 0.3, c = 0.2$ ，故得極限為 $\frac{2}{7}$ 與前面吻合。

遞迴數列有時是很複雜的，[BioCalc.] Example 1.6.5, 2.1.8 探討了所謂的 *logistic difference equation*: $x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$ ，其中 c 是常數。這是一個常用來探討細胞分裂和昆蟲繁殖的模型。[BioCalc.] Example 2.1.8 舉了 $x_0 = 0.8, c = 2.8$ 以及 $x_0 = 0.4, c = 3.4$ 兩種情況探討。假設這兩種情況都收斂，我們就可用前面的方法，假設收斂到 x 。第一種情況由 $c = 2.8$ ，取極限可得 $x = 2.8x(1 - x)$ ，可解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{1.8}{2.8} = \frac{9}{14}$ 。事實上此情況當 $0 \leq x_0 \leq 1$ 時 x_n 確實收斂：當 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = 1$ 時會收斂到 0；而當 $0 < x_0 < 1$ 時會收斂到 $\frac{9}{14}$ 。至於當 $x_0 < 0$ 或 $x_0 > 1$ 時， x_n 是發散的，我們有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 。第二種情況由 $c = 3.4$ ，取極限可得 $x = 3.4x(1 - x)$ ，故 $x = 0$ 或 $x = \frac{12}{17}$ 。不過這次完全不同，除了 $x_0 = 0, 1$ 會收斂到 0 外，其他情況都是發散的。即使在 $0 < x_0 < 1$ 的情況， x_n 會在接近 0.84 和 0.45 兩處附近跳動。事實上從 $c = 3$ 開始 logistic sequence 就開始會有分歧的情況發生，而且當 c 越大分歧的現象就更多更複雜。有興趣的同學可上網查詢了解。

關於數列極限的性質，最後補充一下 [BioCalc.] 未提到的夾擠定理 (squeeze theorem)。考慮兩個數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 假設對每一項皆有 $a_n \leq b_n$ ，很自然的當 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 的極限分別為 A, B 時，我們可得 $A \leq B$ 。同理若另一數列 $\langle c_n \rangle$ 滿足 $c_n \leq a_n$ 且極限為 C ，我們也會有 $C \leq A$ 。而夾擠定理告訴我們的是如果不知數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限是否存在，但知道數列 $\langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ 有相同的極限 L 且滿足 $c_n \leq a_n \leq b_n$ 則 $\langle a_n \rangle$ 的極限必存在且也等於 L 。

例如前面談過 $a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{當 } n \text{ 為奇數;} \\ 2/n, & \text{當 } n \text{ 為偶數.} \end{cases}$ 這個數列，我們可以考慮 $b_n = \frac{2}{n}$ 以及 $c_n = \frac{1}{n}$ 這兩個數列。很明顯的我們有 $c_n \leq a_n \leq b_n$ ，再加上 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ，故知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

習題 1.8. 已知下列初始為 a_0 的遞迴數列收斂，試求其極限。若有多種可能請說明極限應該是哪一個。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(28,31,47))

$$(1) a_0 = 2, a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{3}.$$

$$(2) a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{6}{1 + a_n}.$$

$$(3) a_0 = 0.1, a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n).$$

習題 1.9. 對於下列初始為 a_0 的遞迴數列，先計算若收斂其極限為何。再利用前幾項的特性說明其為收斂或發散。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.1(29,32))

$$(1) a_0 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1.$$

$$(2) a_0 = 3, a_{n+1} = 8 - a_n.$$

1.2. 函數的極限

我們將數列極限的概念延伸到函數 (function) 的極限。兩者不同的地方在於，數列極限考慮的是代整數點的趨勢；而函數極限考慮的是代一個區間內所有的點的趨勢。基本上，若要談函數 $f(x)$ 在某一點 a 的極限，我們可以考慮極限為 a 的數列 $\langle a_n \rangle$ (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$) 然

後考慮新的數列 $\langle f(a_n) \rangle$ 。如果對所有這樣的數列， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 都有同樣的極限值，此極限值就是 $f(x)$ 在點 a 的極限。

1.2.1. 基本定義. 函數的極限包括當 x 趨近於無限大時的極限以及 x 趨近於某一點 a 的極限。而趨近於一點的極限，又可分成左極限以及右極限。我們將一一介紹這幾種極限。

1.2.1.1. x 趨近於無限大的極限. 給定一個函數 $f(x)$ 我們經常會需要了解當 x 越來越大時 $f(x)$ 會不會趨近於一個定值。我們的做法是考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ，然後將 x_n 代入 $f(x)$ ，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ 是否趨近於一個定值。不過由於整個實數上的點無法僅由一組數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 表示，所以必需考慮的是所有可能的數列。也就是說：如果對所有這種趨近於無窮大的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於無限大時有極限值 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 。注意這個極限通常也有人會說成 $f(x)$ 在無限大的極限為 L ，這樣的說法有其方便性但不是很正確（因為無限大不是一個點），所以我們盡量避免這種說法。

和數列極限很像， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 表示任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 x 大於某一個數值 M 後，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。例如 [BioCalc.] Example 2.2.1 所討論的 Monod growth function $f(x) = \frac{2x}{5+x}$ （養分濃度 x 與細菌成長率 $f(x)$ 的模型）。當 x 越來越大可得 $f(x)$ 會越來越接近 2。事實上我們可得 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ 。例如，當我們在 2 選取誤差為 0.01，會發現當 $x > 995$ 時 $f(x)$ 都會落在誤差範圍內，即 $1.99 < f(x) < 2.01$ 。

同樣的，我們也可以探討當 x 趨近於負無限大時，函數 $f(x)$ 的極限。也就是說考慮數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ，然後將 x_n 代入 $f(x)$ ，看新的數列 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ 是否趨近於一個定值。如果對所有這種趨近於負無窮大的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於負無限大時有極限值 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 。此時，任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 x 小於某一個數值 M 後，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。

例子 1.2.1. [BioCalc.] Example 2.2.3。很容易看出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 以及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ 。如果我們在 0 考慮 0.001 的誤差範圍，會發現當 $x > 1000$ 時 $0 < \frac{1}{x} < 0.001$ ；而當 $x < -1000$ 時 $-0.001 < \frac{1}{x} < 0$ 。 #

當函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 時，函數圖形 $y = f(x)$ 有一個特點，也就是當 x 沿著 x 軸往外（即正無限大或負無限大的方向）移動時，圖形會越來越接近於水平直線 $y = L$ 。也因此，此時我們稱圖形 $y = f(x)$ 有“水平漸近線”（horizontal asymptote）。例如由例子 1.2.1 我們知 $y = 0$ （即 x 軸）為 $y = \frac{1}{x}$ 的水平漸近線。注意若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K$ 其中 $K \neq L$ ，則 $y = f(x)$ 會有 $y = L$ 以及 $y = K$ 這兩條水平漸近線。

當函數 $f(x)$ 在 x 趨近於無限大時沒有極限，我們便說 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ “不存在”或“發散”。同樣的，若 $f(x)$ 在 x 趨近於負無限大時沒有極限，我們便說 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ “不存在”或“發散”。怎樣判斷 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ “不存在”呢？如果找到數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 不存在，當然 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 就不存在。例如 $f(x) = x$ 的情形，我們選 $x_n = n$ ，就知當 $n \rightarrow \infty$ 時 $f(x_n) = x_n = n$ 極限不存在，所以此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 就不存在。另一種情況是找到兩

組趨近於無窮大的數列代入 $f(x)$ ，卻得到不同的極限。例如 [BioCalc.] Example 2.2.7 舉了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 這個極限不存在的例子。雖然我們將 $x_n = n\pi$ 這個數列代入 $\sin x$ 會得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0.$$

但若代 $x_n = \frac{n\pi}{2}$ 同樣有 $x_n \rightarrow \infty$ ，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 極限就不存在了。同樣的看法，我們也可知道 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ 不存在。

有一種極限不存在的情況和數列極限的一樣，我們會表示出來，也就是會趨近於正負無限大的情形。換句話說當 x 趨近於無限大時，若 $f(x)$ 的值也趨近於無窮大或負無窮大，我們就會分別用 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 表示。同理，當 x 趨近於負無限大時，如果 $f(x)$ 的值也趨近於無窮大或負無窮大，我們就會分別用 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 表示。例如 [BioCalc.] Example 2.2.9 我們有 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ 。我們也很容易看出 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty$ 。發散到正負無限大的狀況，有時在處理極限的問題時很有幫助，千萬不要因為極限不存在而忽視它。

1.2.1.2. 給定點的單邊極限。 我們先探討在某一點所謂“單邊極限” (*one-sided limit*)，再利用它來定義在該點的極限。一般來說，對一個函數 $f(x)$ ，我們會有興趣知道 x 在點 a 的右側逼近 a 時， $f(x)$ 變化的趨勢。所以我們考慮所有可能極限為 a 的數列 $\langle x_n \rangle$ ，其中 x_n 皆大於 a ，若所有這樣的數列皆滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 的極限都是 L ，我們便稱當 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 的“右極限” (*right-hand limit*) 為 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 。也可說當 x 從右邊趨近於 a 時， $f(x)$ 的極限為 L 。同樣的，我們也可考慮 x 從 a 的左邊逼近 a ，然後看 $f(x)$ 的極限是否存在。也就是說，考慮數列 $\langle x_n \rangle$ ，其中 x_n 皆小於 a 且 $x_n \rightarrow a$ 。若所有這樣的數列皆滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 的極限都是 L ，我們便稱當 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 的“左極限” (*left-hand limit*) 為 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 。也可說當 x 從左邊趨近於 a 時， $f(x)$ 的極限為 L 。

最常探討單邊極限的情況是所謂的分段函數（即函數在不同區域用不同的方法定義），以下例子是 [BioCalc.] 的 Example 2.3.7，這個函數是描述物種災難性滅絕的模型。

例子 1.2.2. 考慮某一物種的數量函數

$$N(K) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq K < a; \\ K, & \text{if } K \geq a. \end{cases}$$

這裡 a 是一個給定的正數。 K 代表的是棲息環境的素質， $N(K)$ 代表數量。此模型表示當環境夠好（即 $K \geq a$ ），數量便會隨著 K 增長；而環境變差（即 $K < a$ ），數量便會災難性滅絕歸於零。從 [BioCalc.] Example 2.3.7 所附 $N(K)$ 的圖形 (Figure 8)，我們可以看出當 K 從 a 的右邊漸漸靠近 a ，其極限會是 a （例如考慮數列 $K_n = a + \frac{1}{n}$ ，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = a$ ），這種情況我們就會用 $\lim_{K \rightarrow a^+} N(K) = a$ 來表示；然而當 K 從 a 的左邊漸漸靠近 a ，其極限會是 0（例如考慮數列 $K_n = a - \frac{1}{n}$ ，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} N(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ ），因此可得 $\lim_{K \rightarrow a^-} N(K) = 0$ 。 #

當 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的左右極限趨近於正、負無限大時，我們依然會把它標示出來。分別用

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad (1.6)$$

表示。只要這四種其中一個成立，表示 x 從某一邊越來越接近 a 時，圖形會越來越接近於鉛直直線 $x = a$ 。因此，此時圖形 $y = f(x)$ 會有“鉛直漸近線”(vertical asymptote)。簡言之，當我們要說明函數圖形 $y = f(x)$ 有鉛直漸近線 $x = a$ 只要檢查式子 (1.6) 其中一個成立即可。例如函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，我們有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ 。從圖形來看，確實 $x = 0$ 為 $y = \frac{1}{x}$ 的鉛直漸近線。常用對數函數 $f(x) = \log x$ ，由於在 $x \leq 0$ 沒有定義，所以我們不能探討 $\log x$ 在 $x = 0$ 的左極限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \log x$ ，但能探討 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$ 。由於 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ ，所以 $x = 0$ 也是 $y = \log x$ 的鉛直漸近線。

1.2.1.3. x 趨近於給定點的極限。 我們接著談當 x 趨近於某一定值 a ，函數 $f(x)$ 的極限。同樣的，我們可以考慮所有趨近於 a 的數列 $\langle x_n \rangle$ 然後代入 $f(x)$ 考慮 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 。注意因為 $f(x)$ 在 a 的極限關心的是 $f(x)$ 在 a 附近的趨勢，而不是 a 這一點的取值，所以考慮的數列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 其中 x_n 都避開 a 。如果對所有趨近於 a 的數列 $\langle x_n \rangle$ 都會使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 時有極限值 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。這個極限通常也有人會說成 $f(x)$ 在 a 的極限為 L ，這樣的說法有其方便性但容易造成誤解，因為如前所述，這個極限定義與 $f(x)$ 在 $x = a$ 的取值無關（即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 沒有定義也沒關係）。所以我們盡量避免這種說法。

從這種極限看法， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 表示任意在 L 附近選一個誤差範圍，當 $x \neq a$ 但與 a 夠靠近時，都會使得 $f(x)$ 落在這誤差範圍內。例如考慮 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 。此時 $f(x)$ 在 $x = 1$ 是沒有定義的（因為分母會等於 0）；不過只要 $x \neq 1$ ，則皆有定義且因為 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ ，此時會有 $f(x) = x + 1$ （例如 $f(1.01) = \frac{0.0201}{0.01} = 2.01$ ）。因此 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$ 。例如，當我們在 2 選取誤差為 0.01，會發現當 $x \neq 1$ 且與 1 在 0.01 的誤差範圍時（即 $0.99 < x < 1.01$ ）皆會滿足 $1.99 < f(x) = x + 1 < 2.01$ 。這個例子也告訴我們，對於函數在 x 趨近於 a 的極限，其在 a 的取值不重要，重點在於在 a 附近的取值。

當然了，有可能當 x 趨近於 a 時， $f(x)$ 的極限不存在。[BioCalc.] Example 2.3.5 舉了 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ 不存在這個例子。雖然 $x_n = \frac{1}{n}$ 這個數列滿足 $x_n \rightarrow 0$ ，我們將 x_n 代入 $\sin \frac{\pi}{x}$ 會得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0$ 。但若代 $x_n = \frac{2}{n}$ 同樣有 $x_n \rightarrow 0$ ，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 極限就不存在了。事實上從 [BioCalc.] Example 2.3.5 的附圖 Figure 7 顯示函數 $\sin \frac{\pi}{x}$ 的圖形，在 $x = 0$ 附近是震盪很厲害的。

前面討論單邊極限的好處是，它可以幫助我們確認極限的存在性。當然了只要函數在任一邊趨近 a 的極限不存在，則該函數趨近 a 的極限自然不存在。然而，即使函數在任一邊趨近 a 的極限存在，但極限不同，則依極限定義，該函數趨近 a 的極限仍不存在。不過若函數兩邊趨近 a 的極限都存在且都等於 L ，當然此函數趨近 a 的極限就是 L 。所以我們

有以下結論：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x). \quad (1.7)$$

這裡 $\Leftrightarrow$ 一般稱為“若且唯若”(if and only if)。這個符號表示如果一邊是對的那麼另一邊也會對。也就是說兩邊會同時成立或同時不成立。

例子 1.2.3. [BioCalc.] Example 2.4.8 探討絕對值函數 $|x|$ 當 x 趨近於 0 的極限 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ 。若從左右極限觀點來看，當 $x \rightarrow 0^+$ 表示 x 皆大於 0，故此時 $|x| = x$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

然當 $x \rightarrow 0^-$ 表示 x 皆小於 0，故此時 $|x| = -x$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0.$$

所以由式子 (1.7) 的若且唯若（或稱“等價關係”）可知 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 。

[BioCalc.] Example 2.4.9 探討極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 。若從左右極限觀點來看，當 $x \rightarrow 0^+$ 表示 x 皆大於 0，故此時 $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

然當 $x \rightarrow 0^-$ 表示 x 皆小於 0，故此時 $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ ，因此可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

所以式子 (1.7) 的右式不成立（即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ ），故由等價關係告訴我們左式也不成立，也就是說 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在。 $\#$

同前，當 x 趨近於 a ，但函數 $f(x)$ 趨近於正、負無限大的情形，雖然極限不存在我們仍會分別用 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 表示。例如 [BioCalc.] Example 2.3.9 我們有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ 。同理，我們也知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ 。

再次強調，當 x 趨近於 a 函數發散到正負無限大的狀況，有時在處理極限的問題時很有幫助，千萬不要因為極限不存在而忽視它。

習題 1.10. 令 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 。由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ 。

(1) 試寫下函數圖形 $y = f(x)$ 的水平漸近線以及鉛直漸近線。

(2) 考慮誤差範圍 0.01，試找到 L, S 使得當 $x > L$ 以及 $x < S$ 時都分別會滿足 $0.99 < f(x) < 1.01$ 。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.2.36.)

習題 1.11. 做 [BioCalc.] Exercise 2.3.6, 2.3.9.

習題 1.12. 試利用 $x < 0$ 時 $|x| = -x$ 說明 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) = -\infty$ 以及 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x} = 1$ 。

(取自 [BioCalc.] Exercise 2.4.35, 2.4.36.)

習題 1.13. 令 $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$ 。試利用 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ 求 $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ ，並說明 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 是否存在。(取自 [BioCalc.] Exercise 2.4.37.)

1.2.2. 極限的性質與技巧. 了解函數極限的定義後，我們就可以探討極限的性質。這些性質都可以很方便讓我們求出極限，我們會利用這些性質探討一些求函數極限的技巧。

前面我們知道函數的極限都可以用數列的極限來表示，所以數列極限的性質，當然都可以套用在函數的極限上。由於我們探討的函數極限有許多種，為了方便起見我們都用 $\lim$ 來表示。也就是說，我們介紹的性質都適用於前面介紹過的 x 趨近於 ∞ 、 $-\infty$ 、 a 、 a^+ 、 a^- 的函數極限。不過要注意，在同一等式中當然是同一個趨近的形式。利用數列極限的性質 Theorem 1.1.2，我們有以下的性質：

Theorem 1.2.4. 假設函數 $f(x), g(x)$ 其極限 $\lim f(x), \lim g(x)$ 皆存在，則

- (1) $\lim(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$.
- (2) $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.
- (3) 當 $\lim g(x) \neq 0$ 時， $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

此定理的 (1)、(2)、(3) 分別稱為極限的加法性質、乘法性質、除法性質。同之前數列極限 (式子 (1.2)) 利用加法與乘法性質，我們也有函數極限的線性性質

$$\lim(rf(x) + sg(x)) = r \lim f(x) + s \lim g(x), r, s \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

例如，因為 $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ ，利用乘法性質，我們有 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ 。所以由線性性質可得

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x) = 2 \times 9 - 3 = 15.$$

從這裡我們可以知道，當 $f(x)$ 是一個多項式，則對任意的實數 a ， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

Theorem 1.2.4(3) 除法性質中分母 $g(x)$ 極限為 0 的情況被排除在外，因為此時 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 有可能無法馬上確定。接下來我們來探討這種分母趨近於 0 情況。其中最令人困擾的就是分子也趨近於 0，即 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ 的情形。這就是前面數列極限談過的不定型。以後我們還會探討許多不定型，目前這一種不定型，我們用 $\frac{0}{0}$ 來表示。稱之為不定型就是因為其極限各種可能都會發生，其極限值取決於分子、分母趨近於 0 的“速度”，因此要進一步處理才能確定。例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$ 都是 $\frac{0}{0}$ 不定型。因為 x^2 趨近於 0 的速度比 x 快，前者 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$ 極限為 0；後者 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2}$ 極限不存在。

至於分子極限不是 0，即 $\lim f(x) \neq 0$, $\lim g(x) = 0$ 的情形，我們可以馬上確定 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的極限不存在。事實上此時可得 $\lim \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$ ，也就是說函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 取絕對值的話，其極限會無窮大。不過若去掉絕對值，我們就得依在求極限的附近其正負的情況，判斷會是 ∞ 、 $-\infty$ 或都不是。有時為了方便，我們會用 $\frac{1}{0}$ 來表示這種極限 (分子寫成 1，僅為了表示

其不為 0)。由於這種極限確定一定不存在，所以它「不是」不定型的極限。不過要記得 $\left|\frac{1}{0}\right| = \infty$ ，所以 $\frac{1}{0}$ 這種極限有可能是 ∞ 、 $-\infty$ 或都不是。

例子 1.2.5. 首先考慮 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2}$ 。由於當 x 趨近於 0 時， $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1 \neq 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ，所以我們馬上知道此為 $\frac{1}{0}$ 型的極限，故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x-1}{x^2} \right| = \infty$ 。接著便要討論其正負。由於當 x 趨近於 0（但不等於 0）時 $x-1$ 會是負的，而 x^2 會是正的，所以此時 $\frac{x-1}{x^2}$ 小於 0。因此推得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$ 。

同樣的，我們有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x-1}{x} \right| = \infty$ 。但當 x 趨近於 0 時 x 有正有負，故只能說 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}$ 不存在。事實上當 x 從 0 的右邊趨近於 0 時， x 是正的，但 $x-1$ 是負的，所以我們有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$ ，同理可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \infty$ 。

不論如何，函數圖形 $y = \frac{x-1}{x^2}$ 和 $y = \frac{x-1}{x}$ 都有一條鉛直漸近線 $x = 0$ 。 #

Theorem 1.2.4 只適用於兩個函數極限都存在的情形。之前談過兩個數列有任一各極限不存在的極限性質，對於函數依然適用。由於函數極限不存在的情形，我們依然對於是否趨近於 ∞ 或 $-\infty$ 有興趣，所以這裡我們特別把這些狀況的函數極限整理出來。不過因為情況很多，千萬不要用“背”的死記下來，應該盡量理解。重點放在判別是否為不定型的情況，若是不定型再額外處理。我們先看加（減）法的情形。

首先考慮 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ ，而函數 $g(x)$ 其極限不存在且 $\lim g(x) = \infty$ 的情況。此時對於 $\lim(f(x) + g(x))$ 以及 $\lim(f(x) - g(x))$ ，我們可以分別用一個固定的數 L 加、減很大很大的數的想法去理解，即 $L + \infty = \infty$ 和 $L - \infty = -\infty$ ，得到 $\lim(f(x) + g(x)) = \infty$ 以及 $\lim(f(x) - g(x)) = -\infty$ 。

同樣的，對於 $f(x)$ 和 $g(x)$ 極限都不存在且都趨近於 ∞ 的情形，它們相加就可以想成 $\infty + \infty = \infty$ ，所以此時 $\lim(f(x) + g(x)) = \infty$ 。不過對於 $f(x) - g(x)$ 就是所謂 $\infty - \infty$ 這種不定型的極限。例如 $f(x) = x + 5$ ， $g(x) = x$ 此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 5$ 。從這例子可看出 $\infty - \infty$ 這種不定型其極限可以是任何的實數；另一方面，考慮 $f(x) = 2x$ ， $g(x) = x$ ，此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ ，其極限不存在。所以 $\infty - \infty$ 確為不定型的極限。

接下來我們看乘法的情形。對於 $f(x)$ 和 $g(x)$ 極限都不存在且都趨近於 ∞ 的情形，它們相乘可以用 $\infty \cdot \infty = \infty$ 來簡化說明，所以很容易理解會有 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \infty$ 。同理當 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ ，而 $\lim g(x) = \infty$ 的情況。此時當 $L > 0$ 時 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \infty$ ；而若 $L < 0$ 則 $\lim(f(x) \cdot g(x)) = -\infty$ 。不過對於 $L = 0$ 的情況就要特別注意了。也就是當 $\lim f(x) = 0$ ， $\lim g(x) = \infty$ 時，極限 $\lim(f(x) \cdot g(x))$ 就無法馬上確定了。這種情況就是所謂 $0 \cdot \infty$ 的不定型。例如 $f(x) = x$ ， $g(x) = \frac{1}{x^2}$ 的情形，此時 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ ，而 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 極限不存在。另一方面當 $f(x) = 3x^2$ ，此時依然有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ ，但是 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3$ 。從這些例子，我們知道 $0 \cdot \infty$ 的極限有可能是任意的實數；也有可能不存在，所以它是不定型。

最後我們來談除法的情形。一般來說除法可以看成乘法來處理，也就是說將 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 看成 $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ 。例如若 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ ，而函數 $g(x)$ 其極限不存在且 $\lim g(x) = \infty$ 的情況。此時我們就可以將 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 視為 $L \cdot \frac{1}{\infty} = 0$ 。同理在 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = L$ 的情況，我們可以將 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 視為 $\infty \cdot \frac{1}{L}$ ，所以極限不存在。注意這裡即使 $L = 0$ 依舊成立，也就是說 $\frac{0}{\infty}$ 和 $\frac{\infty}{0}$ 都「不是」不定型。 $\frac{0}{\infty}$ 會趨近於 0，而 $\frac{\infty}{0}$ 會發散。唯有 $\lim f(x) = \infty$ 且 $\lim g(x) = \infty$ 的情形會有問題，此時可以將 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 視為 $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ ，故可視為 $\infty \cdot 0$ 的不定型。所以 $\frac{\infty}{\infty}$ 也是不定型。例如當 $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ ，我們有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ，此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ ；然而當 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ ，雖然依然 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ ，但此時 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x = \infty$ ，極限不存在。從這些例子，我們知道 $\frac{\infty}{\infty}$ 的極限有可能是任意的實數；也有可能不存在，所以它是不定型。

我們這裡談論的是函數之間加、減、乘、除，四則運算的極限問題。在求極限過程中，若極限不是不定型的情形，很快的便能求得其極限或是知道極限不存在。所以能分辨是否為不定型的極限很重要。目前函數四則運算的極限不定型的形式有 $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $0 \cdot \infty$ 以及 $\infty - \infty$ 四種（將來談指數型函數時，還會有 1^∞ 、 ∞^0 以及 0^0 三種不定型的極限）。前面我們都是用簡單的例子說明不定型的極限，其實不定型極限問題有些可能很棘手。目前我們可以處理的方式是利用代數的方法將其化為非不定型的極限來處理。將來學了微分可用更有效率的方法（即 L'Hospital's Rule）處理。所以目前不必太過擔心不定型的極限問題。以下我們舉一些 [BioCalc.] 的例子供大家參考：

例子 1.2.6. [BioCalc.] Example 2.4.3, 2.4.5, 2.4.6 分別舉了三個 $\frac{0}{0}$ 不定型的例子

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}.$$

處理 $\frac{0}{0}$ 不定型的極限，目前的方法就是利用代數的方法（例如上下同時除以分母為 0 的因式）將原式改寫成非不定型的形式再求極限。所以將 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ 除掉 $x-1$ 的因式可得 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$ 。同理 $(3+h)^2 - 9 = 6h + h^2$ 所以 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6$ 。而 $\sqrt{t^2 + 9} - 3 = \frac{t^2 + 9 - 9}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$ ，所以 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{6}$ 。

[BioCalc.] Example 2.2.4、2.2.5 以及 2.2.11 討論的極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{5+N}$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t}{1+4t^2}$ 以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$ 都是 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型的極限。上下分別除以分母中趨近於 ∞ 的最大項 N 、 $4t^2$ 以及

$-x$ ，可得非不定型的極限形式（分母極限都是 1）：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{5}{N} + 1}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{4t^2} + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-1}{\frac{-3}{x} + 1},$$

進而得到極限分別為 2、0 以及 $-\infty$ 。

#

$\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 是不定型的基本形式其餘的不定型一般來說都是化成這兩種形式再處理。例如 $0 \cdot \infty$ 的情形，我們可以將 ∞ 看成 $\frac{1}{0}$ ，所以可以將 $0 \cdot \infty$ 化成 $0 \cdot \frac{1}{0}$ 的形式，亦即看成 $\frac{0}{0}$ 的不定型來處理。同理也可以將 0 看成 $\frac{1}{\infty}$ ，所以可以將 $0 \cdot \infty$ 化成 $\frac{1}{\infty} \cdot \infty$ 的形式，亦即看成 $\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型來處理。至於處理不定型 $\infty - \infty$ 的極限問題，通常也是利用代數的方法將之化為非不定型的形式就可求出其極限了，我們看以下例子：

例子 1.2.7. [BioCalc.] Example 2.2.10, 2.2.6 分別舉了 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ 這兩個例子，都是 $\infty - \infty$ 這種不定型的極限。由於 $x^2 - x = x(x - 1)$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot (x - 1)]$ 可視為 $\infty \cdot \infty$ 這個非不定型的極限，得到其極限為 ∞ 。而 $\sqrt{x^2 + 1} - x$ 為了去掉根號，可以改寫成

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}. \quad (1.9)$$

由於 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ 是 $\infty + \infty$ 形式，其極限為 ∞ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

可視為 $\frac{1}{\infty}$ 這個非不定型的極限，得到其極限為 0。

#

另外還有一種求函數極限的方式，就是前面數列極限也談論過的夾擠定理（squeeze theorem）。首先大家應該不難理解，若兩函數 $f(x), g(x)$ 當 x 在要討論極限的附近，都滿足 $f(x) \leq g(x)$ ，且 $f(x), g(x)$ 的極限值存在，則會有 $\lim f(x) \leq \lim g(x)$ 。這裡所謂“附近”指的是：如果是 x 趨近於無窮大情形，“附近”表示的是當 x 大於某個數（例如大於 10000）時都滿足 $f(x) \leq g(x)$ ；而如果是 x 趨近於某個實數 a 的情形，“附近”表示的是當 $x \neq a$ 但在包含 a 的某個開區間內（例如 $a = 3$ 時 $x \in (2.99, 3) \cup (3, 3.01)$ ）都滿足 $f(x) \leq g(x)$ 。在 x 趨近於負無窮大和左、右極限的情況，也是同樣的看法。另外要注意即使在求極限的附近，都滿足 $f(x) < g(x)$ 也僅能推出 $\lim f(x) \leq \lim g(x)$ 未必會有 $\lim f(x) < \lim g(x)$ 。例如考慮 $f(x) = -\frac{x^3}{x}$, $g(x) = \frac{x^3}{x}$ ，我們知道 $f(x), g(x)$ 在 $x = 0$ 沒有定義，不過雖然在 $x = 0$ 附近皆有 $f(x) = -x^2 < g(x) = x^2$ ，但是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 。因為 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$ 而且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 。所以切記在取極限時，不等式一定要加上等號。同理，如果另一個函數 $h(x)$ 當 x 在要討論極限的附近，都滿足 $h(x) \leq f(x)$ ，且 $h(x)$ 的極限值存在，則會有 $\lim h(x) \leq \lim f(x)$ 。也就是說此時 $\lim h(x) \leq \lim f(x) \leq \lim g(x)$ 。夾

擠定理談的是 $\lim h(x) = \lim g(x)$ 這種特殊情況，此時不需假設 $\lim f(x)$ 存在，也能確保 $\lim h(x) = \lim f(x) = \lim g(x)$ 。夾擠定理正確的敘述如下：

Theorem 1.2.8 (Squeeze Theorem). 對於函數 $f(x)$ ，若存在兩函數 $g(x), h(x)$ 滿足當 x 在要討論極限的附近，都符合 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $\lim h(x) = \lim g(x) = L$ ，則 $f(x)$ 的極限存在且 $\lim f(x) = L$ 。

夾擠定理的意義在於，當我們不知函數 $f(x)$ 的極限是否存在，但認為它存在時。可以嘗試找兩個函數 $g(x), h(x)$ 滿足當 x 在要討論極限的附近，都符合 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $g(x), h(x)$ 有相同的極限 L 。此時便可確認 $f(x)$ 的極限存在。而且既然 $f(x)$ 的極限存在，就可以由前面所提的 $L = \lim h(x) \leq \lim f(x) \leq \lim g(x) = L$ ，確定 $\lim f(x) = L$ 。我們看一下 [BioCalc.] Example 2.4.10 有關夾擠定理的例子。

例子 1.2.9. 考慮 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ，我們要探討極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。首先注意，我們已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在，且極限不是 ∞ 也不是 $-\infty$ 。所以目前這個極限，無法用前面談論四則運算的極限性質處理。由於對於任意實數 θ 皆有 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ，因此對於 0 附近的點 x （注意 $x \neq 0$ ）皆滿足 $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ，又由於 $x^2 > 0$ 所以這個不等式乘上 x^2 可得 $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$ 。現若考慮 $g(x) = x^2, h(x) = -x^2$ 對於 0 附近的點 x ，皆會滿足 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。

#

習題 1.14. 先說明以下是哪一些類型的極限。若不是不定型直接說明其極限值或不存在；若是不定型，請化成非不定型說明其極限值或不存在。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{5}{10^r}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{3 + e^{-2x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 2.2(12, 19, 24, 26); 2.4(14, 19, 22)）

習題 1.15. 假設考慮兩函數 $f(x), g(x)$ 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 。試利用極限乘法性質說明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，並依此處理以下問題：

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 。

(2) 試求 a 使得 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + 2x - 2}$ 極限存在，並求此極限值。

（取自 [BioCalc.] Exercise 2.4.49, 2.4.51）

1.3. 連續函數

我們將介紹連續函數 (*continuous function*) 以及知道一個函數是連續的之後, 如何幫助我們處理函數的極限問題。雖然連續在意義上是接續不斷的, 但連續函數的定義是先定義在一個點的連續。若一個函數在一個區間中的每一個點都連續, 才會稱此函數為這個區間的一個連續函數。

給定一個點 a , 我們先定義何謂在點 a 連續的函數。首先觀察函數 $f(x)$ 若在 $x = a$ 沒有定義, 則 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 的位置沒有點對應在其圖形上, 所以圖形好像在 $x = a$ 之處斷掉似的, 我們當然不會認為 $f(x)$ 在此點連續。另一方面如果當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限不存在 (例如趨近於 ∞ 或左右極限不同), 表示在 a 的附近函數圖形無法靠攏, 我們當然也會認為 $f(x)$ 在此點不連續。最後即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 有定義, 且當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限存在且極限值為 L , 但 $L \neq f(a)$ 。這表示雖然函數圖形在 a 的附近都往 L 靠攏但在 $x = a$ 突然跳開了, 此時我們仍然認為函數 $f(x)$ 在點 a 不連續。綜合以上, 在排除了我們認為在點 a 不連續的看法後, 我們有以下函數在點 a 連續的定義。

Definition 1.3.1. 給定一實數 a , 考慮函數 $f(x)$, 若以下三個條件 $f(x)$ 皆滿足, 則稱 $f(x)$ 在 a 點連續。

- (1) $f(x)$ 在 $x = a$ 時有定義。
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

例如對於實數 a , 我們有 $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, 所以依極限乘法性質, 對於任意 $m \in \mathbb{N}$ 皆有 $\lim_{x \rightarrow a} x^m = a^m$ 。也因此對於一個多項式 $f(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$, 利用極限線性性質 (式子 (1.8)), 我們有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0] = c_n (\lim_{x \rightarrow a} x^n) + \cdots + c_1 (\lim_{x \rightarrow a} x) + c_0 = c_n a^n + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a).$$

所以多項式函數在任何實數點 a 都是連續的。

當 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的極限存在, 但 $f(x)$ 在 a 點不連續, 表示 $f(x)$ 在 $x = a$ 時無定義, 或是 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ 。此時這種不連續性稱為 *removable discontinuity* (可去除的), 因為若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 我們只要重新定義 $f(x)$ 在 $x = a$ 的值為 L 即可讓 $f(x)$ 在 a 點連續。也就是說談連續性, 極限的存在性還是最重要的。例如 [BioCalc.] Example 2.4.3 考慮的函數 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 是沒有定義的, 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不連續。但因為 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$, 如果我們定義 $f(1) = 2$, 就會使得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 是連續的。換言之, $f(x)$ 除了 $x = 1$ 以外, 其餘在 1 附近的點, 其取值與 $x + 1$ 是一樣的, 而只要更動 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的取值就能讓它和 $x + 1$ 一樣在 $x = 1$ 連續, 所以我們說函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的不連續性是 removable.

至於函數 $f(x)$ 在 x 趨近於 a 的極限不存在的情形, 也有兩種特別的情況經常被探討。一種是 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, 這種在 a 點的不連續性稱為 *infinite discontinuity*;

另一種是 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ，這種在 a 點的不連續性稱為 *jump discontinuity*。在 jump discontinuity 的情形，如果恰有 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ 的情形發生，我們便稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的左端連續；而若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ，我們便稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 的右端連續。例如在例子 1.2.3 ([BioCalc.] Example 2.4.9) 我們討論過 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的情形。我們知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ 以及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的不連續性屬於 jump discontinuity。雖然此函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 無定義，不過當初若定義 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的值為 -1 (即 $f(0) = -1$)，則 $f(x)$ 就會在 $x = 0$ 的左端連續。當然了若定 $f(0) = 1$ ，則 $f(x)$ 就會在 $x = 0$ 的右端連續。不過，不管怎樣重新定義 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的值，都無法去除其在 $x = 0$ 的不連續性，所以 jump discontinuity 不會是 removable。

函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的連續性既然是用它在 x 趨近於 a 的極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 來定義，很自然的連續和極限有同樣的性質。利用 Theorem 1.2.4，我們有以下連續的性質。

Theorem 1.3.2. 假設函數 $f(x), g(x)$ 在 $x = a$ 都是連續的，則

- (1) $f(x) + g(x)$ 在 $x = a$ 連續。
- (2) $f(x) \cdot g(x)$ 在 $x = a$ 連續。
- (3) 當 $g(a) \neq 0$ 時， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = a$ 連續。

不難理解在除法時要排除 $g(a) = 0$ 的情況，不只因為分母極限為 0 極限除法性質不適用，事實上當 $g(a) = 0$ 時，函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = a$ 無定義，當然就不連續了。例如 [BioCalc.] Example 2.5.5 考慮有理函數 (即兩個多項式相除，英文稱為 rational function) $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ 。若令 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ， $g(x) = 5 - 3x$ ，由於 $f(x), g(x)$ 都是多項式，我們知道它們在任意的點都是連續的。然而 $g(\frac{5}{3}) = 0$ ，所以 $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ 在 $x = \frac{5}{3}$ 不連續。不過由於 $g(x) = 5 - 3x$ 在 $x \neq \frac{5}{3}$ 時都不等於 0，所以由 Theorem 1.3.2 (3) 知道 $\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ 在 $\frac{5}{3}$ 以外的點都是連續的。

當一個函數在一個區間 I 上的所有的點都連續時，我們便稱此函數為在 I 上的連續函數。不過要注意，如果這個區間是包含端點的情況，例如 $I = [a, b]$ ，則函數不止要在開區間 (a, b) 內所有的點連續，還要在 a 的右端連續，以及 b 的左端連續，才能說在區間 $[a, b]$ 連續。當函數 $f(x)$ 在區間 I 是連續且不是常數時，很容易理解 $f(x)$ 會把 I 上面的點連續沒有斷點送到另一個區間 J 。此時我們稱當 $f(x)$ 定義在 I 時其值域為 J 。因為沒有間斷，所以若 $a, b \in I$ ，則對任意介於 $f(a), f(b)$ 之間的點 d ，我們都可以找到 c 介於 a, b 之間滿足 $f(c) = d$ 。這稱為連續函數的中間值定理 (intermediate value theorem)。例如 [BioCalc.] Example 2.5.10 考慮函數 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ ，我們知道多項式函數在實數上處處連續。若定義在區間 $[1, 2]$ ，由於 $f(1) = -1$ ， $f(2) = 12$ ，因此 $f(x)$ 的值域會包含 $[-1, 12]$ 這個區間。又因 0 介於 $-1, 12$ 之間，所以我們可以在 $1, 2$ 之間找到一點 c 使得 $f(c) = 0$ 。

我們可以將 Theorem 1.3.2 關於在一點連續函數的四則運算，推廣到以下在區間連續函數的四則運算。

Theorem 1.3.3. 假設函數 $f(x), g(x)$ 在區間 I 都是連續的，則

- (1) $f(x) + g(x)$ 在 I 連續。
- (2) $f(x) \cdot g(x)$ 在 I 連續。
- (3) 當 $g(x)$ 滿足對所有 $a \in I$ 皆有 $g(a) \neq 0$ 時， $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 I 連續。否則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 僅在 I 中滿足 $g(a) = 0$ 的點 a 不連續。

有了 Theorem 1.3.3 我們就可利用一些已知的連續函數得到更多的連續函數。首先我們來看幾個基本的在整個實數上連續的函數。前面已經提過，若 $f(x)$ 為多項式函數，則對於任意實數 a 皆有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，也就是說多項式函數在任意的實數點都連續，所以它是在整個實數連續的函數。多項式相加與相乘當然還是多項式，所以 Theorem 1.3.3 的 (1), (2) 沒有問題。至於相除的情況，若 $f(x), g(x)$ 都是多項式且 $g(x)$ 不為零多項式，則 Theorem 1.3.3 (3) 告訴我們，有理函數 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 只有在有限多個點不連續，因為 $g(x) = 0$ 只有有限多個實數解。我們看以下的例子。

例子 1.3.4. 考慮有理函數 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 。由於 $x^2-1=0$ 只有兩個實數解 $x=-1$ 和 $x=1$ ，所以我們知 $f(x)$ 僅在 $-1, 1$ 兩點不連續。由於 $x \rightarrow -1$ 時，分子趨近於 -2 而分母趨近於 0 ，這是 $\frac{1}{0}$ 型的極限，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 的不連續性屬於 infinite discontinuity ($x=-1$ 會是 $y=f(x)$ 的鉛直漸近線)。而在 $x \rightarrow 1$ 時，分子、分母都趨近於 0 ，這是 $\frac{0}{0}$ 的不定型。分子分母同除 $x-1$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 的不連續性屬於 removable discontinuity。注意 $x=1$ 不會是 $y=f(x)$ 的鉛直漸近線。

另一種常見在整個實數連續的函數，就是三角的正弦函數 $\sin x$ 與餘弦函數 $\cos x$ 。回顧一下正餘弦函數的定義，在坐標平面的單位圓上從點 $(1, 0)$ 移動 x 弧長（逆時鐘為正、順時鐘為負），所在的點其 x -坐標為 $\cos x$ 、而 y -坐標就是 $\sin x$ 。從點在單位圓的移動，我們觀察其 x -坐標、 y -坐標的變化是連續不斷的，所以可以由此理解 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是實數上的連續函數。而 $\tan x$ 由於其定義為 $\frac{\sin x}{\cos x}$ ，所以由連續函數除法性質知， $\tan x$ 在 $\cos x \neq 0$ 的點（即 $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ ）都是連續的。以後我們也常會用到 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 、 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 以及 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ 這些三角函數。從除法性質，我們知道 $\sec x$ 連續的點和 $\tan x$ 一樣；而 $\csc x$ 與 $\cot x$ 都在 $\sin x \neq 0$ 的點（即 $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ ）都是連續的。

還有一種在實數上連續的函數，就是所謂的指數函數 (exponential function)。給定一正實數 b ，我們稱 $f(x) = b^x$ 為以 b 為底 (base) 的指數函數。我們簡單說明一下其定義。當 x 為正整數 n 時， $f(n) = b^n$ 就是把 n 個 b 乘在一起。我們也可定義 $f(\frac{1}{n}) = b^{1/n} = c$ 就是滿足 $c^n = b$ 的正實數。我們也繼續定義 $f(\frac{m}{n}) = (b^{1/n})^m$ ，也就是 $f(x)$ 在所有的正有理數都可定義。至於對任意的正實數 r ，會發現當考慮任意由有理數所形成的數列 $\langle x_n \rangle$ ，

若 $x_n \rightarrow r$, 則 b^{x_n} , 會趨近於一固定的實數。我們就定這個實數為 $f(r) = b^r$ 的值。這樣的定義不只讓 $f(x) = b^x$ 在整個正實數有定義且因為滿足當 $x \rightarrow r$ 時都會有 $b^x \rightarrow b^r$, 亦即 $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = f(r)$, 因此也讓 $f(x) = b^x$ 在整個正實數是連續的。若對於負實數 $-r$ 再定義 $f(-r) = \frac{1}{b^r}$, 我們就把指數函數 $f(x) = b^x$ 的定義域推廣到負實數且讓它在負實數也是連續的。最後由於 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1$, 若我們再定義 $f(0) = b^0 = 1$, 就把指數函數 $f(x) = b^x$ 的定義域推廣到整個實數且讓它在所有的實數都是連續的。

知道以上這些函數在哪裡連續, 利用 Theorem 1.3.3 我們便可利用它們的四則運算而了解更多的函數在哪裡是連續的。

例子 1.3.5. 我們探討函數 $\frac{2^x \sin x}{x^2 - 1}$ 和 $\frac{x^2 + \cos x}{2 + \sin x}$ 分別在哪裡是連續的。

首先 $2^x \sin x$ 和 $x^2 - 1$ 在整個實數連續, 但 $x^2 - 1$ 在 $x = -1, 1$ 等於 0, 故知 $\frac{2^x \sin x}{x^2 - 1}$ 在區間 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ 以及 $(1, \infty)$ 是連續的。

現考慮 $x^2 + \cos x$ 和 $2 + \sin x$ 也都在整個實數連續。而分母 $2 + \sin x$ 絕不為 0, 因為 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 。因此 $\frac{x^2 + \cos x}{2 + \sin x}$ 仍在整個實數連續。 #

合成函數可以讓我們得到更多、更複雜的函數。雖然感覺較複雜, 不過極限對於合成函數有很好的性質。給定兩個函數 $f(x), g(x)$, 我們用 $f \circ g(x)$ 表示它們的合成函數。意思是, 若 a 在 $g(x)$ 的定義域中, 我們可以將 a 代入函數 $g(x)$ 中。若所得的值 $g(a)$ 仍在 f 的定義域, 則可將 $g(a)$ 再代入 $f(x)$ 中, 得到 $f(g(a))$ 。因此我們定義將 a 代入 $f \circ g(x)$ 的值 $f \circ g(a)$ 為 $f(g(a))$ 。因為 $f \circ g(a) = f(g(a))$ 對可定義的任意實數 a 皆成立, 所以通常我們也將合成函數寫成 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 。例如我們通常將 $(\sin x)^2$ 寫成 $\sin^2 x$ 。它就是令 $f(x) = x^2, g(x) = \sin x$ 寫成的合成函數

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x.$$

若反過來合成 $g \circ f(x)$ 就會是 $g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$ 。當然了, 若定義域符合的話, 我們可以把好多個函數合成起來。例如 $\cos(2^{\sin(x+1)})$, 就是將 $x+1$ 代入 $\sin x$, 所得的函數 $\sin(x+1)$ 再代入 2^x , 最後再將所得的函數 $2^{\sin(x+1)}$ 代入 $\cos x$ 得到的。

接下來我們看合成函數 $f \circ g(x)$ 極限的性質。如果 $g(x)$ 在 a 附近不是常數且當 $x \rightarrow a$ 時 $g(x) \rightarrow b$, 此時若能確定當 $x \rightarrow b$ 時 $f(x) \rightarrow c$, 則

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{g(x) \rightarrow b} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = c. \quad (1.10)$$

特別的, 假設 $g(x)$ 在 $x = a$ 連續, 我們知當 $x \rightarrow a$ 時 $g(x) \rightarrow g(a)$, 若又假設 $f(x)$ 在 $x = g(a)$ 連續, 即 $x \rightarrow g(a)$ 時 $f(x) \rightarrow f(g(a))$ 則由式子 (1.10) 可得 $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = f \circ g(a)$, 也就是函數 $f \circ g(x)$ 在 $x = a$ 是連續的。因此我們有關合成函數的連續性。

Theorem 1.3.6. 假設可函數 $g(x)$ 定義在區間 I 其值域為 J 且 $g(x)$ 在 I 為連續。若函數 $f(x)$ 在 J 亦為連續, 則合成函數 $f \circ g(x)$ 在 I 為連續。

例如前面所提函數 $\cos(2^{\sin(x+1)})$, 由於牽涉的每個函數皆在整個實數連續, 所以此函數在整個實數亦連續。

當一個函數 $f(x)$ 定義在區間 I 且為一對一（即 I 中相異兩點 a, b 分別代入 $f(x)$ 所得 $f(a), f(b)$ 也會不同），此時若 $f(x)$ 的值域為 J ，則存在一個定義在 J 且值域為 I 的函數 $g(x)$ 滿足 $g \circ f(x) = x$ 且 $f \circ g(x) = x$ 。這個函數 $g(x)$ 稱為 $f(x)$ 的反函數 (inverse function)，記為 $f^{-1}(x)$ （注意： $f^{-1}(x)$ 的定義域是 $f(x)$ 的值域）。由於 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$ ，所以若一對一函數 $f(x)$ 為定義在 I 且值域為 J 的連續函數，其因圖形連續沒有斷點，故 $f^{-1}(x)$ 的圖形也會是連續沒有斷點，因此 $f^{-1}(x)$ 會是定義在 J 的連續函數。我們來看一些常見的函數及其反函數。

二次函數 $f(x) = x^2$ ，雖然定義在整個實數是連續的，但它不是一對一的（例如 $f(-1) = f(1)$ ）。不過若將之限制在 $[0, \infty)$ 這個區間，它便是一對一的，此時值域也是 $[0, \infty)$ 。所以它有反函數 $f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ ，也會是定義在 $[0, \infty)$ 的連續函數。至於 $g(x) = x^3$ 為在整個實數是一對一的連續函數，其值域也是整個實數，所以它的反函數 $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ 也是定義在整個實數的連續函數。對於一般的實數 r 我們都可定義出函數 $h(x) = x^r$ ，當 $r > 0$ 時 $h(x)$ 為定義在 $[0, \infty)$ 的連續函數；而當 $r < 0$ 時，因為 $h(x)$ 在 $x = 0$ 無定義，所以是定義在 $(0, \infty)$ 的連續函數。

對於底數為正實數 b 的指數函數 $f(x) = b^x$ ，前面已知它是定義在整個實數的連續函數。當 $a_1 \neq a_2$ 時 $f(a_1) = b^{a_1} \neq f(a_2) = b^{a_2}$ ，因為由指數律 $\frac{f(a_1)}{f(a_2)} = b^{a_1 - a_2} \neq 1$ ，所以 $f(x)$ 是一對一的。由於 $f(x)$ 的值域為 $(0, \infty)$ ，所以它有一個定義在 $(0, \infty)$ 的反函數 $f^{-1}(x) = \log_b(x)$ ，我們稱為底為 b 的對數函數 (logarithmic function)。 $\log_b(x)$ 是定義在正實數 $(0, \infty)$ 上的連續函數其值域為整個實數。當底數 $b = 10$ 時，通常就用 $\log x$ 來表示 $\log_{10} x$ 。微積分最常用的是在底數為 e 的情況，一般用 $\ln x$ 來表示 $\log_e x$ ，稱為自然對數 (nature logarithm)。

三角函數由於其週期性，我們知道它們在整個實數不會是一對一，不過通常會選取一個包含 0 的最大區間使其為一對一，然後考慮定義在這區間的反函數。例如 $\sin x$ 若限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 就會是一對一且值域仍為 $[-1, 1]$ 。所以它的反函數 $\sin^{-1} x$ 就是定義在 $[-1, 1]$ 且值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的連續函數。同樣的道理 $\cos x$ 若限制在 $[0, \pi]$ 就會是一對一且值域仍為 $[-1, 1]$ 。所以它的反函數 $\cos^{-1} x$ 就是定義在 $[-1, 1]$ 且值域為 $[0, \pi]$ 的連續函數。至於 $\tan x$ ，我們是限制在開區間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。因為其值域為整個實數，所以 $\tan x$ 的反函數 $\tan^{-1} x$ 就會是定義在整個實數且值域為 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的連續函數。要注意，通常當 n 是自然數時，我們用 $\sin^n x$ 來表示 $(\sin x)^n$ 。但這不適用於負整數，因為 $\sin^{-1} x$ 是用表示 $\sin x$ 的反函數，而不是表示 $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ （回顧一下 $(\sin x)^{-1}$ 是用 $\csc x$ 來表示）。為了避免混淆，有時反三角函數是用前面加 “arc”（代表是弧度）來表示。例如 $\sin^{-1} x = \arcsin x$ ， $\cos^{-1} x = \arccos x$ 以及 $\tan^{-1} x = \arctan x$ 。

習題 1.16. 說明以下函數的極限可以利用哪些連續函數的性質（加法、乘法、除法、合成）處理。請確認在所求極限的點連續，並求其極限。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^4 x}{5 + 2x^3}; \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \theta \sin \theta; \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x + \sin x); \quad \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x}.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 2.4(5, 6, 7); 2.5(30, 31)）