

積分

之前我們利用切線斜率、成長率等概念定義了一個函數在一點的微分。相對的，我們利用面積以及總量的觀念介紹一個函數在一區間的積分。利用面積的概念推導出積分的性質與規則。利用這些規則，可以讓我們以更有效的方法的求一個函數在一區間的積分。我們將先專注於積分的性質與技巧，接著再談積分的應用。

3.1. 定積分的定義與微積分基本定理

由於長方形的面積就是底乘以高，所以要計算一個區域的面積我們可以將該區域分割成許多長方形，再將這些長方形面積加總。分割的越細所求的面積越精準，這就是利用黎曼和求函數圖形在某一區間與 x 軸所圍面積的概念。

為了方便說明，我們首先考慮函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 取值都大於等於 0 的情況。我們先將區間 $[a, b]$ 分割成許多小段，每一小段長度設為 Δx_i （例如分成 n 段，則每段長分別為 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ）。再在每一小段中任取一點 x_i^* 且取 $f(x_i^*)$ 為該段長方形的高。當 Δx_i 越小（即分割的長方形越細），這些長方形的面積總和（稱為 *Riemann sum*）

$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \quad (3.1)$$

會越接近 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積。而當每個 Δx_i 都趨近於 0 時，若式子 (3.1) 極限存在，此極限值確實就會是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積。

在一般的狀況（不假設對所有 $a \leq x \leq b$ 皆符合 $f(x) \geq 0$ ）如果 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 只有有限個點不連續，則當每個 Δx_i 都趨近於 0 時，式子 (3.1) 極限都會存在。此時稱 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為可積（integrable），並稱式子 (3.1) 的極限值為 $f(x)$ 在 a, b 之間的定積分（definite integral of $f(x)$ from a to b ），並用以下符號表示

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i.$$

這裡所要積分的函數 $f(x)$ 稱為 *integrand*，而 b, a 分別稱為上下界 (upper limit, lower limit)。至於 dx 要注意，前面微分大致提過通常我們會用 Δ 表示差，而當 $\Delta \rightarrow 0$ ，我們就用 d 表示，所以這裡 dx 表示的就是 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 。因此千萬不要忽略 dx ，長方形沒有乘上寬度，就不是面積了（以後在談積分技巧時，若忽略 dx 會造成嚴重的錯誤）。最後取極限時再把表示和的 $\sum$ 符號改成大 S ，即 $\int$ 來表示。注意 $\int_a^b f(x) dx$ 不一定是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍的面積，因為 $f(x_i^*)$ 在取值時有可能是負的，所以計算長方形面積時會有正負抵消的問題。因此在一般情況需將 *integrand* 取絕對值，求 $\int_a^b |f(x)| dx$ 才會是 $y = g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這一段與 x 軸所圍區域的面積。

要如何求定積分呢？既然需要考慮 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 的情況，一般最常用的方法就是將區間 $[a, b]$ 等分成 n 等分再讓 $n \rightarrow \infty$ 即可。因為此時 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ ，所以當 $n \rightarrow \infty$ ，自然會有 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 。至於每一個分段中 x_i^* 要如何選呢？既然定理說任意選都會有一樣的極限值，一般都會用比較有系統的方式選 x_i^* 。例如在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 選右端點 x_i ，這樣算的黎曼和稱為 *right Riemann sum*；而若 x_i^* 選的分別是 $[x_{i-1}, x_i]$ 的左端點 x_{i-1} 、中點 $\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ ，則算出的黎曼和分別稱為 *left Riemann sum* 和 *midpoint Riemann sum*。其實在證明這些 Riemann sum 都會趨近於同一個值，使用的方法是選 x_i^* 會使得 $f(x_i^*)$ 是在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的最大值，這樣算出的黎曼和稱為 *upper Riemann sum*。而若選 x_i^* 會使得 $f(x_i^*)$ 是在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 的最小值，這樣算出的黎曼和稱為 *lower Riemann sum*。由於當 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 時 *upper Riemann sum* 和 *lower Riemann sum* 會趨近於同一個值，所以利用夾擠定理，就可以得到前面所提各種算法所得的 Riemann sum 都會趨近於同一個值。接下來我們看幾個用 Riemann sum 求定積分的例子。

例子 3.1.1. 令 $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ 。我們分別利用 *right Riemann sum*, *left Riemann sum* 以及 *midpoint Riemann sum* 求 $\int_0^2 f(x) dx$, $\int_0^2 g(x) dx$ 以及 $\int_0^2 h(x) dx$ 。先將區間 $[0, 2]$ 等分成 n 等分，即每一等分長 $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ 。依序分成的 n 個區間為

$$[0, \frac{2}{n}], [\frac{2}{n}, \frac{4}{n}], \dots, [\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}], \dots, [\frac{2(n-1)}{n}, 2].$$

每一段若選右端點則依序所選的點為 $\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \dots, \frac{2i}{n}, \dots, 2$ ；若選左端點則依序所選的點為 $0, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2(i-1)}{n}, \dots, \frac{2(n-1)}{n}$ ；而若選中點則依序所選的點為 $\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{2i-1}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}$ 。

- (1) 由於 $f(x) = 1$ 是常數，無論選哪一點其值皆為 1，故三種 Riemann sum 皆為
- $$\sum_{i=1}^n (1 \cdot \frac{2}{n}) = n \cdot \frac{2}{n} = 2, \text{ 與 } n \text{ 無關，故當 } n \rightarrow \infty \text{ 極限仍為 } 2。即$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 dx = 2.$$

此與 $y = 1$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域為長為 2 寬為 1 的長方形面積 2 相符。

(2) 由 $g(x) = x$ ，利用前述三種點的選法，我們得 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 依序為

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} + \cdots + \frac{2i}{n} + \cdots + 2 \right) &= \frac{2}{n} \left(\frac{n(\frac{2}{n} + 2)}{2} \right) = \frac{2+2n}{n}, \\ \frac{2}{n} \left(0 + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{2(i-1)}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)}{n} \right) &= \frac{2}{n} \left(\frac{n(0 + \frac{2(n-1)}{n})}{2} \right) = \frac{2(n-1)}{n}, \\ \frac{2}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{2i-1}{n} + \cdots + \frac{2n-1}{n} \right) &= \frac{2}{n} \left(\frac{n(\frac{1}{n} + \frac{2n-1}{n})}{2} \right) = 2.\end{aligned}$$

注意，這裡我們用到了等差級數的公式。不管是哪一種 Riemann sum，當 $n \rightarrow \infty$ 其極限皆為 2，故得

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 x dx = 2.$$

此與 $y = x$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域為底為 2 高為 2 的直角三角形面積相符。

(3) 由 $h(x) = x^2$ ，利用前述三種點的選法，我們得 right Riemann sum, left Riemann sum 以及 midpoint Riemann sum 依序為

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} \left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \cdots + 2^2 \right) &= \frac{8}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \frac{2}{n} \left(0 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2(n-1)}{n}\right)^2 \right) &= \frac{8}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n (i-1)^2 \right) = \frac{8}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \\ \frac{2}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2i-1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 \right) &= \frac{2}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \right) = \frac{2}{n^3} \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},\end{aligned}$$

注意，這裡我們用到了平方和的公式 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 以及 $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ 。不管是哪一種 Riemann sum，當 $n \rightarrow \infty$ 其極限皆為 $\frac{8}{3}$ ，故得

$$\int_0^2 h(x) dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

也就是說拋物線 $y = x^2$ 和 x 軸在 $[0, 2]$ 所圍區域面積為 $\frac{8}{3}$ 。 #

從這些例子來看，若要求更高次的定積分，將會越來越複雜。所以一般來說不可能都用黎曼和的定義求定積分。微積分基本定理可以讓我們簡化求定積分的工作。

Theorem 3.1.2 (The Fundamental Theorem of Calculus). 假設函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續，且存在 $F(x)$ 滿足對所有 $x \in [a, b]$ 皆有 $F'(x) = f(x)$ 。則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Proof. 首先將區間 $[a, b]$ 依序分割成 $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ 共 n 段，令每一段長 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 。利用 mean value theorem (Theorem 2.3.1)，在區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 之間存在一點 x_i^* 滿足 $F'(x_i^*) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ ，亦即 $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x_i$ 。也因此在此分割之下，若每個分割都選 x_i^* 則所得的 Riemann sum 為

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i &= f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

由於這樣的選取法都會是定值 $F(b) - F(a)$ ，故當 $\Delta x_i \rightarrow 0$ 時其黎曼和極限為 $F(b) - F(a)$ 。因此得證

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

□

微積分基本定理有許多形式，Theorem 3.1.2 一般稱為第二型 (Part 2) 或 *evaluation theorem*。我們先介紹它主要就是它能幫助我們求定積分。也就是說如果知道什麼函數的導函數是 $f(x)$ ，就可求 $\int_a^b f(x) dx$ 。例如 Example 3.1.1 中我們知道 $F(x) = x$ 的導函數是 $f(x) = 1$ ，所以 $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 2 - 0 = 2$ 。同理由於 $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ 和 $H(x) = \frac{1}{3}x^3$ 的導函數分別為 $g(x) = x$ 以及 $h(x) = x^2$ ，所以

$$\int_0^2 x dx = \int_0^2 g(x) dx = G(2) - G(0) = \frac{4}{2} = 2, \quad \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 h(x) dx = H(2) - H(0) = \frac{8}{3}.$$

因此求定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值，我們只要找到 $F(x)$ 滿足 $F'(x) = f(x)$ 即可。這個 $F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的“反導函數” (antiderivative)，由於反導函數與積分相關且為了方便起見，我們用“不定積分” (indefinite integral) $\int f(x) dx$ 來表示 $f(x)$ 的反導函數。下一節我們將談論求不定積分的技巧，在此之前我們順便談談微積分基本定理其他的形式。

由於 $F(x)$ 本身是 $F'(x)$ 的反導函數所以由 Theorem 3.1.2 我們得

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.2)$$

式子 (3.2) 常被稱為 *net change theorem*。[BioCalc.] Example 5.3.7 提到：若 $N(t)$ 表示在時間 t 的人口數，則 $N'(t) = \frac{d}{dt}N(t)$ 表示人口成長率。所以我們可以由人口成長率的定積分 $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}N(t) dt = N(t_2) - N(t_1)$ 得到從 t_1 到 t_2 這段時間人口的“淨變化” (net change)。

當 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數且 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。對任意 $x \in [a, b]$ 考慮新的函數 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ 。依 Theorem 3.1.2，我們有 $g(x) = F(x) - F(a)$ ，所以 $g'(x) = F'(x) = f(x)$ 對任意 $x \in [a, b]$ 皆成立。這就是所謂第一型 (part 1) 的微積分基本定

理。通常寫成

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (3.3)$$

注意積分式改為以 t 為變數，以免和上界的 x 混淆。

[BioCalc.] Example 5.3.11 要求 $\frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t dt$ 。我們可以先令 $g(x) = \int_1^x \sec t dt$ 。也因此利用 chain rule 以及 $g'(x) = \sec x$ 可得

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t dt = (g(x^4))' = g'(x^4) \cdot (x^4)' = 4x^3 \cdot \sec x^4.$$

習題 3.1. 將以下指定區間的 Riemann Sum 寫成定積分形式（不必求值）：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \ln(1 + x_i^2) \Delta x, \quad [2, 6]$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\cos x_i}{x_i} \Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2} \Delta x, \quad [1, 8]$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5] \Delta x, \quad [0, 2]$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.2(15, 16, 17, 18)）

3.2. 積分的技巧

一般來說，要找到反導函數並不容易。我們首先介紹不定積分的基本性質，並依此得到一些基本函數相關的反導函數。不過再複雜一點的函數就必需藉由變換變數、分部積分以及部分分式等技巧處理。

首先要注意的是反導函數並不唯一。若 $F_1(x), F_2(x)$ 都滿足 $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ ，此時由於 $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ ，利用 Theorem 2.3.2 (3) 可知 $F_1(x) - F_2(x)$ 為常數 C 。也就是當我們找到 $f(x)$ 的一個反導函數 $F(x)$ ，自然就找到所有的反導函數，也因此通常我們會用 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 來表示。例如 $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ 。不過由於在求定積分時 $F(b) - F(a)$ 會把常數 C 扣掉，所以不管選哪個反導函數，所得定積分是一致的。為了方便起見本講義在寫不定積分等式時會省略常數 C 。不過以後處理微分方程時，由於會有初始值問題，求反導函數時需要用到常數 C ，那時這個 C 就不能忽略了。

對於可微函數 $f(x)$ ，由於 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導函數，所以 $f(x)$ 會是 $f'(x)$ 的反導函數。利用不定積分就是反導函數的符號定義，可得

$$\int f'(x) dx = f(x). \quad (3.4)$$

注意式子 (3.4) 是不定積分符號的定義，不能視為微積分基本定理。

不定積分也有線性性質。這是因為導函數有線性性質，自然可得反導函數也有線性性質，亦即

$$\int (r \cdot f(x) + s \cdot g(x)) dx = r \int f(x) dx + s \int g(x) dx. \quad (3.5)$$

這告訴我們，如果知道 $f(x), g(x)$ 的反導函數，就可以得到 $r \cdot f(x) + s \cdot g(x)$ 的反導函數。我們先推導 power function 的反導函數。對於任意實數 r ，考慮 power function $f(x) = x^{r+1}$ 。我們已知其導函數為 $f'(x) = (r+1)x^r$ 。因此由式子 (3.4), (3.5) 知 $x^{r+1} = f(x) = \int f'(x) dx = (r+1) \int x^r dx$ 。因此當 $r \neq -1$ 時，可得

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}. \quad (3.6)$$

特別的，對於任意自然數 k ，由於 $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ ，利用線性性質可得任意多項式的反導函數

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x. \quad (3.7)$$

例如 $3x^2 - 4x + 2$ 的反導函數為

$$\int (3x^2 - 4x + 2) dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 2 \int 1 dx = x^3 - 2x^2 + 2x.$$

式子 (3.6) 談的是當 $r \neq -1$ 時 x^r 的反導函數。當 $r = -1$ ，即 $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ，其反導函數為何？我們知道 $\ln x$ 的導函數是 $\frac{1}{x}$ 。不過這是在 $x > 0$ 的情況，因為當 $x \leq 0$ 時 $\ln x$ 是沒有定義的。不過 $\frac{1}{x}$ 在 $x < 0$ 是有定義的，所以我們自然想知道當 $x < 0$ 時 $\frac{1}{x}$ 的反導函數為何？當 $x < 0$ 時 $f(x) = \ln(-x)$ 是有定義的。此時利用 chain rule 可得 $f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$ 。也就是說當 $x < 0$ 時 $\ln(-x)$ 會是 $\frac{1}{x}$ 的反導函數。由於 $\ln|x|$ 在 $x > 0$ 時等於 $\ln x$ ；而當 $x < 0$ 時等於 $\ln(-x)$ ，所以通常我們會以 $\ln|x|$ 來表示 $\frac{1}{x}$ 的反導函數（對於所有 $x \neq 0$ 皆適用），亦即

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad (3.8)$$

注意微積分基本定理 (Theorem 3.1.2) 處理定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 需要求 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為連續。由於 $\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 不連續，所以當 $a < 0 < b$ 時我們不能用式子 (3.8) 處理 $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|b| - \ln|a|$ 。這牽涉所謂“瑕積分”的問題（以後會談）。不過若 a, b 同號，就可以了！

我們可以利用一些基本函數的導函數反推得到一些基本函數的反導函數，再利用線性的性質得到它們之間線性組合的反導函數。以下我們列出一些利用導函數推得的常見函數的反導函數。

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x. \quad (3.9)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x, \quad \int \sec^2 x \, dx = \tan x, \quad \int \sec x \tan x \, dx = \sec x \quad (3.10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x. \quad (3.11)$$

注意，這裡沒有 $\ln x$, $\tan x$, $\sec x$ 的反導函數（因為它們沒有辦法直接由簡單的函數微分得到），等到以後學會積分技巧後，才容易求得。

習題 3.2. 求以下定積分：

$$\int_{-2}^3 (x^2 - 3) \, dx; \quad \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx; \quad \int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) \, dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.3(1, 11, 13)）

習題 3.3. 請利用 net change theorem 回答以下問題：有一水槽在第 t 分鐘，其中 $0 \leq t \leq 50$ 這段時間以每分鐘 $r(t) = 200 - 4t$ 公升的速率放水。請求此水槽在前 10 分鐘總共放水量。（取自 [BioCalc.] Exercise 5.3.55）

3.2.1. 變換變數. 合成函數的導函數有 chain rule 幫我們推導，反之和合成函數相關的求反導函數的方法就是變換變數（substitution rule），它是與 chain rule 相關的。

當我們看到一個積分式裡面積分的函數有“一部分”像是合成函數時，可以嘗試看看它是否是合成函數的導函數。明確來說，若看到積分的函數（integrand）是 $f(g(x)) \cdot h(x)$ 的形式，若又知 $f(x)$ 的反導函數為 $F(x)$ ，則考慮函數 $F(g(x))$ 的導函數，即利用 chain rule 我們有 $F'(g(x))g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 。也就是說 $F(g(x))$ 會是 $f(g(x)) \cdot g'(x)$ 的反導函數，所以若 $h(x)$ 恰為 $g'(x)$ ，依積分定義得

$$\int f(g(x))h(x) \, dx = \int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)).$$

例如看到積分式 $\int \cos x \sqrt{\sin x} \, dx$ 中 $\sqrt{\sin x}$ 可視為合成函數 $f(g(x))$ ，其中 $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ 且 $g(x) = \sin x$ 。而我們知 $f(x) = x^{1/2}$ 的反導函數為 $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 又 $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$ ，所以知 $\int \cos x \sqrt{\sin x} \, dx = F(g(x)) = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2}$ 。

從這個概念，我們介紹所謂變換變數的積分技巧。當我們看到積分的函數中有合成函數的“成分” $f(g(x))$ （例如 [BioCalc.] Example 5.4.1 $\int x^3 \cos(x^4 + 2) \, dx$ 中的 $\cos(x^4 + 2)$ ）。可變換變數令 $u = g(x)$ （上例中令 $u = x^4 + 2$ ）。接著將 $u = g(x)$ 對 x 微分，即 $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ，寫成 $du = g'(x) \, dx$ （上例中 $du = 4x^3 \, dx$ ）。然後利用這個 du 和 dx 的關係式將整個積分寫成僅與 u 有關的形式 $\int f(u) \, du$ ，不能有 x （上例中 $x^3 \, dx = \frac{1}{4} du$ 故 $\int x^3 \cos(x^4 + 2) \, dx = \frac{1}{4} \int \cos u \, du$ ）。若知道 $f(u)$ 的反導函數為 $F(u)$ （上例中 $\cos u$ 的反導函數是 $\sin u$ ），最後利用 $\int f(u) \, du = F(u) = F(g(x))$ 求出整個反導函數（上例中得 $x^3 \cos(x^4 + 2)$ 的反導函數為 $\frac{1}{4} \sin u = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2)$ ）。

這個變換變數的技巧有幾件事要注意。首先就是所設新的變數 $u = g(x)$ 不必知道其反導函數為何，但必需正確求其導函數並寫成 $du = g'(x) \, dx$ 的形式才能正確完成變換變數。

過去我們一再強調微分和積分千萬不要漏掉 dx 就是這個原因。接著切記一定要將原積分寫成 $\int f(u) du$ (可能差個倍數) 而且必需知道 $f(x)$ 反導函數才算完成。最後別忘了把 u 換回 $g(x)$ 。我們看以下的例子。

例子 3.2.1. [BioCalc.] Example 5.4.3 求 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ 。這個例子，看到 $\sqrt{1-4x^2}$ ，很多人會誤以為 $f(x) = \sqrt{x}$ ，然後設 $u = 1-4x^2$ ，得 $du = -8x dx$ 。故由 $x dx = -\frac{1}{8} du$ 得原積分為 $-\frac{1}{8} \int \frac{1}{f(u)} du$ ，而誤以為求出反導函數為 $-\frac{1}{8} \ln|f(u)| = -\frac{1}{8} \ln \sqrt{1-4x^2}$ 。這裡最大的問題是 $\int \frac{1}{f(u)} du$ 不是 $\ln|f(u)|$ (應該是 $\int \frac{f'(u)}{f(u)} du$ 才會是 $\ln|f(u)|$)。

我們建議不必先急著決定 $f(x)$ 為何，先決定 $u = 1-4x^2$ 後，如前面說明所述，先利用 $du = -8x dx$ 將 $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ 完全用新變數 u 來表示，即 $-\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$ 。再決定是否會求此不定積分。事實上 $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2}$ ，故求得反導函數為 $-\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ #

不要誤以為積分函數是兩個函數相乘才能用變換變數。事實上若變數是一次多項式 $u = ax + b$ ，則 $du = a dx$ 就不會出現兩個函數相乘的形式。例如 [BioCalc.] Example 5.4.2 $\int \sqrt{2x+1} dx$ 就需設 $u = 2x+1$ ，得 $du = 2dx$ 而變換變數成 $\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du$ 。因此得反導函數為 $\frac{1}{3}u^{3/2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}$ 。同樣的，[BioCalc.] Example 5.4.4 $\int e^{5x} dx$ 就需設 $u = 5x$ ，得 $du = 5dx$ 而變換變數成 $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^u du$ 。因此得反導函數為 $\frac{1}{5}e^u = \frac{1}{5}e^{5x}$ 。

接下來看前面提過 $\tan x$, $\sec x$ 的反導函數。

例子 3.2.2. 首先我們看 $\int \tan x dx$ 。利用 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ，這等同於要求 $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ 。若設 $u = \cos x$ ，得 $du = -\sin x dx$ 。故原積分式變成 $-\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| = \ln \frac{1}{|u|} = \ln|\sec x|$ 。我們求得了 $\tan x$ 的反導函數是 $\ln|\sec x|$ ，亦即

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x|. \quad (3.12)$$

接下來我們看 $\int \sec x dx$ 。這雖然也用變換變數處理，不過技巧性更高。首先我們觀察 $d \sec x = \sec x \tan x dx$ 以及 $d \tan x = \sec^2 x dx$ 。也就是說若設 $u = \sec x + \tan x$ ，則 $du = \sec x(\tan x + \sec x) dx = \sec x \cdot u dx$ 。也就是說 $\sec x dx = \frac{1}{u} du$ ，因此

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln|\sec x + \tan x|. \quad (3.13)$$

#

當處理定積分時，我們會先求不定積分 (即反導函數) 再利用微積分基本定理，代上下界求得積分值。不過若在求不定積分時用到了變換變數，我們不必轉換回原來的變數，直接用新的變數寫成定積分求值即可。我們看以下例子。

例子 3.2.3. [BioCalc.] Example 5.4.7 求 $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ 。利用變換變數 $u = 3 - 5x$ ，則 $du = -5 dx$ ，故 $\int \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5} \int u^{-2} du = \frac{1}{5} u^{-1}$ 。接下來我們有兩個做法。第一個是將 $u = 3 - 5x$ 代回得反導函數 $\frac{1}{5(3-5x)}$ ，再代上下界，即

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \frac{1}{5(3-5x)} \Big|_1^2 = \frac{1}{5(-7)} - \frac{1}{5(-2)} = \frac{-2+7}{70} = \frac{1}{14}.$$

或是直接寫成以 u 為變數的定分，將上、下界 $x = 2$ 、 $x = 1$ 利用 $u = 3 - 5x$ 分別改為 $u = -7$ 、 $u = -2$ ，即

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} u^{-2} du = \frac{1}{5} u^{-1} \Big|_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{-7} - \frac{1}{-2} \right) = \frac{1}{14}.$$

#

習題 3.4. 請用變數變換做以下積分：

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2} dx; & \int \sin \pi t dt; & \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx; & \int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4 dx; \\ & \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{1 + \tan t}}; & \int x(2x + 5)^8 dx; & \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx; & \int \frac{x}{1 + x^4} dx. \end{aligned}$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 5.4(6, 11, 13, 23, 28, 31, 33, 36))

習題 3.5. 請用新的變數寫出上下界的方式處理以下定積分：

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos(\pi t/2) dt; & \int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x) dx; & \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx \quad (\text{設 } u = x-1) \\ & \int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^2 + z} dx; & \int_0^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4} \quad (\text{設 } u = 1 + \sqrt{x}). \end{aligned}$$

(取自 [BioCalc.] Exercise 5.4(37, 44, 47, 49, 51))

3.2.2. 分部積分. Integration by parts 來自於微分的乘法性質。基本上，若積分的函數是兩個函數相乘，且知道其中一個函數的反導函數，就可考慮使用分部積分求出乘在一起的反導函數。

我們直接看分部積分處理積分的方法。考慮不定積分 $\int f(x) \cdot g(x) dx$ 。若知道 $g(x)$ 的反導函數為 $G(x)$ ，此時我們可設 $u = f(x)$ ， $v = G(x)$ 。因為 $dv = G'(x) dx = g(x) dx$ ，所以原式可寫成 $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int u dv$ 。回顧微分的乘法性質 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$ 。若用微積分基本定理寫成積分形式為

$$u \cdot v = \int (u \cdot v)' dx = \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx + \int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = \int v du + \int u dv.$$

也因此

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du = f(x) \cdot G(x) - \int G(x) \cdot f'(x) dx.$$

也就是說，我們把求 $\int f(x) \cdot g(x) dx$ 的問題轉換成求 $\int G(x) \cdot f'(x) dx$ 。若能知道 $G(x) \cdot f'(x)$ 的反導函數就可求出 $f(x) \cdot g(x)$ 的反導函數。

求積分時，設好 u, v ，使得原積分為 $\int u dv$ ，利用 $\int v du$ 的積分得

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (3.14)$$

就是分部積分的技巧。

例子 3.2.4. [BioCalc.] Example 5.5.1 求 $\int x \sin x dx$ 。由於我們知道 $\sin x$ 的反導函數為 $-\cos x$ ，所以可設 $u = x, v = -\cos x$ 。因此由 $du = dx$ 以及式子 (3.14) 得

$$\int x \sin x dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x.$$

注意分部積分的重點就是要設定好 u, v 使得原本不知反導函數的積分 $\int u dv$ 轉換成已知反導函數的 $\int v du$ 。不是只要找到 u, v 就一定可用分部積分處理。例如本例題若因知道 x 的反導函數為 $\frac{1}{2}x^2$ 而設 $u = \sin x, v = \frac{1}{2}x^2$ ，此時 $\int x \sin x dx$ 仍等於 $\int u dv$ 也因此由 $du = \cos x dx$ 得

$$\int x \sin x dx = \int u dv = u \cdot v - \int v du = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int (x^2 \cos x) dx.$$

雖然這個積分式仍然正確，但由於我們不知 $\int v du$ (即 $\int (x^2 \cos x) dx$) 為何，所以這個設定法，無法讓我們用分部積分處理原積分。#

從**例子 3.2.4** 我們知道在利用分部積分處理積分時，應注意所設的 u, v 是否能幫助我們處理積分，若無助於處理問題就應換另一組 u, v 。一般來說，若積分的函數為 $x^n \cdot g(x)$ 的形式，且知 $g(x)$ 的反導函數為 $G(x)$ ，則令 $u = x^n, v = G(x)$ 是可行的選擇。因為此時 $du = nx^{n-1} dx$ ，所以若用此組設定可將 $\int x^n \cdot g(x) dx$ 轉換成處理 $\int v du = n \int x^{n-1} G(x) dx$ ，由於 x 的次數變小了，也因此簡化了積分的難度（通常可繼續下去直到 x 項消失）。我們看以下例子。

例子 3.2.5. [BioCalc.] Example 5.5.3 求 $\int x^2 e^x dx$ 。由於 e^x 的反導函數為 e^x ，所以依前述建議令 $u = x^2$ 以及 $v = e^x$ 。因 $du = 2x dx$ 故得

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx. \quad (3.15)$$

雖然我們依然不知 $\int x e^x dx$ ，不過可以再設一次 $u = x$ 以及 $v = e^x$ 。由於 $du = dx$ 故得

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x. \quad (3.16)$$

因此合併式子 (3.15), (3.16) 得 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$. #

從這個例子我們知道，有時分部積分需要處理好幾次才能完成。有時甚至，處理一次後看不出將積分簡化了，不過再做一次有可能因為積分的等式求出反導函數。我們看以下例子。

例子 3.2.6. [BioCalc.] Example 5.5.4 求 $\int e^x \sin x \, dx$ 。該 Example 中是以 $u = e^x$ 以及 $v = -\cos x$ 處理，不過這裡我們用 $u = \sin x$, $v = e^x$ 處理，讓大家了解兩種設法都可以。依我們的設法，由於 $du = \cos x \, dx$ 故得

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \quad (3.17)$$

雖然我們依然不知 $\int e^x \cos x \, dx$ ，而且看似新的積分與原積分複雜度相同。不過我們再設一次 $u = \cos x$ 以及 $v = e^x$ 。由於 $du = -\sin x \, dx$ 故得

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - (-\int e^x \sin x \, dx) = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx. \quad (3.18)$$

因此合併式子 (3.17), (3.18) 得

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx) = (e^x \sin x - e^x \cos x) - \int e^x \sin x \, dx,$$

再移項得 $2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$ ，因此得 $\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$ 。有趣的是，我們也可利用式子 (3.18) 再用式子 (3.17) 得到 $\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ 。#

雖然分部積分來自於微分的 product rule，不過有時積分函數未必是乘法形式，也能用分部積分處理。例如 $\ln x$ 的反導函數 $\int \ln x \, dx$ 。因為 1 的反導函數是 x ，我們可設 $u = \ln x$, $v = x$ 。此時 $du = \frac{1}{x} \, dx$ ，故利用分部積分得

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x.$$

這裡有趣的是反函數和合成有關，但它的積分並不是用和 chain rule 有關的變換變數處理。接下來我們看另兩個反函數 $\sin^{-1} x, \tan^{-1} x$ 的反導函數，也是同樣用分部積分處理，不過還要搭配變換變數才能完成。也因此要記住，有時積分需要多個步驟且搭配不同的方法處理。

例子 3.2.7. 我們先處理 $\int \sin^{-1} x \, dx$ 。利用 $u = \sin^{-1} x$ 以及 $v = x$ ，因 $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ，我們有

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx. \quad (3.19)$$

接下來用變換變數處理 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ，即設 $u = 1 - x^2$ ，因 $du = -2x \, dx$ ，故

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \int u^{-1/2} \, du = -u^{1/2} = -\sqrt{1-x^2}. \quad (3.20)$$

合併式子 (3.19), (3.20) 可得

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}.$$

對於 $\int \tan^{-1} x \, dx$ 。同樣設 $u = \tan^{-1} x$ 以及 $v = x$ ，因 $du = \frac{1}{1+x^2} \, dx$ ，我們有

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx. \quad (3.21)$$

接下來用變換變數處理 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ ，即設 $u = 1 + x^2$ ，因 $du = 2x dx$ ，故

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int u^{-1} du = \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad (3.22)$$

合併式子 (3.21), (3.22) 可得

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad \#$$

最後我們要說明，分部積分雖然設 u, v ，但它不是變換變數（沒有將整個積分式變成 u 的函數或 v 的函數的積分）。所以在處理定積分時若用到分部積分，不能如變換變數將上下界換成 u 或 v 來處理。只能求出反導函數（不定積分）再代原上下界來處理。例如 [BioCalc.] Example 5.5.6 求定積分 $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$ 。我們利用例子 3.2.7 所得 $\tan^{-1} x$ 的反導函數 $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ 代上下界得

$$\int_0^1 \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = (1 \tan^{-1}(1) - 0) - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

習題 3.6. 當積分的函數是 $f(x) \cdot g(x)$ 其中 $f(x)$ 是多項式， $g(x)$ 不是對數有關的函數，則可令 $u = f(x)$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\int x^2 \sin \pi x dx; \quad \int (x^2 + 1)e^{-x} dx; \quad \int \frac{y}{e^{2y}} dy.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.5(7, 14, 17)）

習題 3.7. 當積分的函數是 $f(x) \cdot g(x)$ 其中 $f(x)$ 是多項式（或有理根式）， $g(x)$ 是對數有關的函數，則可令 $u = g(x)$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\int p^5 \ln p dp; \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \int \frac{\ln y}{\sqrt{y}} dy.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.5(10, 15, 16)）

習題 3.8. 積分的函數不是兩個相異函數相乘時，可令 $v = x$ 然後用分部積分處理。求以下積分：

$$\int \ln \sqrt[3]{x} dx; \quad \int \arctan \frac{1}{x} dx; \quad \int (\ln x)^2 dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.5(9, 18, 19)）

3.2.3. 部分分式與查表. Partial Fractions 針對的是分式的積分，我們稱為部分分式意指將分式利用代數方法寫成一些簡單分式之和，而這些簡單分式很容易得到反導函數。最後我們簡單介紹使用查表求積分的方法。

當我們要處理有理多項式（簡稱分式）的積分 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，其中 $f(x), g(x)$ 為多項式。首先注意 $f(x)$ 的次數是否小於 $g(x)$ 的次數。若 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ ，則利用長除法將 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 寫成 $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ 其中 $h(x)$ 為商式、 $r(x)$ 為餘式，即 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。此時

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{h(x)g(x) + r(x)}{g(x)} dx = \int h(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx. \quad (3.23)$$

例如 [BioCalc.] Example 5.6.1 求 $\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx$ 。由於分子次數比較大，利用長除法 $x^3 + x = (x-1)(x^2 + x + 2) + 2$ 得

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 2) dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1|.$$

在式子 (3.23) 的積分中，因為 $h(x)$ 是多項式，它的反導函數容易求得。所以我們只要會處理 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 的反導函數即可。因此以下我們只專注於分式的積分其中分子的次數小於分母次數

的情況，也就是說我們討論的分式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 皆假設 $\deg f(x) < \deg g(x)$ 。

我們先討論最簡單的一種情況，即分母可完全分解成一次式且無重根。此時若 $\deg f(x) < \deg g(x)$ 且 $g(x) = (a_1x + b_1) \cdots (a_nx + b_n)$ ，則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 可用部分分式寫成

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx + b_n}.$$

因為部分分式的每一項皆為 $\frac{c}{ax+b}$ 的形式，所以可以用變換變數 $u = ax + b$ ，得 $du = adx$ ，因此 $\int \frac{c}{ax+b} dx = \frac{c}{a} \int \frac{1}{u} = \frac{c}{a} \ln|u| = \frac{c}{a} \ln|ax+b|$ 。也因此利用積分線性性質就可求出 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的反導函數了。

例子 3.2.8. [BioCalc.] Example 5.6.3 求 $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$ 。首先分子次數確實小於分母次數。接著將分母分解成 $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x-1)(x+2)$ ，沒有重根所以可寫成部分分式

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{2x-1} + \frac{c_3}{x+2}.$$

我們必需決定 c_1, c_2, c_3 的值。將右式通分，比較左右式的分子得

$$x^2 + 2x - 1 = c_1(2x-1)(x+2) + c_2x(x+2) + c_3x(2x-1).$$

我們可以將右式展開，比較係數解聯立方程得 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{5}, c_3 = -\frac{1}{10}$ 。另一簡單的方法是利用 $x, 2x-1, x+2$ 的根分別為 $0, \frac{1}{2}, -2$ ，將它們分別帶入上式，分別得 $-1 = -2c_1, \frac{1}{4} = \frac{5}{4}c_2$ 以及 $-1 = 10c_3$ ，故知 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{5}, c_3 = -\frac{1}{10}$ 。因此原積分為

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x-1| - \frac{1}{10} \ln|x+2|. \end{aligned}$$

注意，其中 $\int \frac{1}{2x-1} dx, \int \frac{1}{x+2} dx$ 我們分別用變換變數 $u = 2x-1, u = x+2$ ，得反導函數分別為 $\frac{1}{2} \ln|2x-1|$ 以及 $\ln|x+2|$ 。 #

第二種情況，即分母可完全分解成一次式但有重根。此時寫成部分分式時無重根部分和前面一樣；而重根部分例如為 $(ax+b)^k$ ，則可寫成 $\frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(ax+b)^k}$ 。我們看以下例子。

例子 3.2.9. [BioCalc.] Exercise 5.6.19 求 $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} dx$ 。 $x+2$ 是無重根部分，而 x^2 有重根，故原分式可寫成部分分式 $\frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ 。右式通分，比較分子可得 $5x^2+3x-2 = ax^2+bx(x+2)+c(x+2)$ 。代 $x=0, -2$ 分別得 $c=-1, a=3$ 。再任意代一個數例如 $x=1$ ，可得 $b=2$ ，故得

$$\int \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)} dx = 3 \int \frac{1}{x+2} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x| + \frac{1}{x}.$$

#

比較複雜的情況是分母無法完全分解成一次式的情況。要注意，由代數基本定理以及虛根成對定理，這表示分母有虛根 $a+bi$ 和 $a-bi$ ，也因此可分解出 $(x-a)^2+b^2$ 這種形式的二次式。當分母有這樣的因式且 $a+bi$ 無重根，則這部分的部分分式可寫成 $\frac{cx+d}{(x-a)^2+b^2}$ 。我們直接看一個例子。

例子 3.2.10. [BioCalc.] Exercise 5.6.22 求 $\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx$ 。 x^2+1 無法再分解，故原分式可寫成部分分式 $\frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$ 。右式通分，比較分子可得 $3x^2-2x+3 = a(x^2+1) + (cx+d)(x-1)$ 。代 $x=1$ 得 $a=2$ 。再任意代兩個數例如 $x=0, x=-1$ （或直接展開比較係數），可得 $c=1, d=-1$ ，故得

$$\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = 2 \ln|x-1| + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx.$$

由於 $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x$ ，而 $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ 利用變換變數 $u = x^2+1$ ，由 $du = 2x dx$ 可得

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

故解得

$$\int \frac{3x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx = 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \tan^{-1} x.$$

#

習題 3.9. 利用部分分式做以下積分：

$$\int \frac{x}{x-6} dx; \quad \int \frac{r^2}{r+4} dr; \quad \int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx; \quad \int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} dy$$

$$\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2} dx; \quad \int \frac{3x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.6(3, 4, 5, 13, 20, 21)）

習題 3.10. 做以下需要變換變數、分部積分以及部分分式的綜合問題。

- (1) $\int x \ln(1+x) dx$ （先利用 $u = \ln(1+x)$ 做分部積分，再用部分分式）。
- (2) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$ （先利用 $u = \sqrt{x+3}$ 做變數變換，再用部分分式）。

(取自 [BioCalc.] Exercise 5.5.25, 5.6.16)

最複雜情況為分母有虛根 $a + bi$ 且是 k 重根，即分母有因式 $((x - a)^2 + b^2)^k$ ，則這部分的部分分式可寫成

$$\frac{c_1x + d_1}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{c_2x + d_2}{((x - a)^2 + b^2)^2} + \cdots + \frac{c_kx + d_k}{((x - a)^2 + b^2)^k}.$$

因為這情況複雜度較高，我們大致舉例說明如何處理。例如求 $\frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 3}{(x + 1)(x^2 + 4)^2}$ 的反導函數，我們先寫成部分分式（注意 $\pm 2i$ 有二重根），即 $\frac{a}{x + 1} + \frac{c_1x + d_1}{x^2 + 4} + \frac{c_2x + d_2}{(x^2 + 4)^2}$ 。通分後因為有 5 個未知數，我們可以代 5 個數解出 $a = 2, c_1 = 1, d_1 = 0$ 以及 $c_2 = 0, d_2 = -1$ 。因此

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 20x^2 + 3x + 3}{(x + 1)(x^2 + 4)^2} dx = 2 \int \frac{1}{x + 1} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

我們有 $\int \frac{1}{x + 1} dx = \ln|x + 1|$ ，並利用變換變數 $u = x^2 + 4$ 可得 $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)$ 。至於積分 $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$ 可利用所謂的三角變換處理。不過這裡我們不介紹此特殊技巧，取而代之，我們介紹使用積分表的方法。

積分表大部分都會分類，在比較詳細的積分表中可找到 $x^2 + a^2$ （或類似表法 $u^2 + c^2$ ）這類，其中有一項可以幫助我們處理 $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$ ，即

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2a^2(n - 1)} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3) \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx \right).$$

所以我們代 $a = 2, n = 2$ 可得

$$\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{8} \left(\frac{x}{(x^2 + 4)} + \int \frac{1}{(x^2 + 4)} dx \right) = \frac{1}{8} \frac{x}{(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2}.$$

其中 $\int \frac{1}{(x^2 + 4)} dx$ 可用變換變數 $x = 2u$ 處理或直接利用表中 $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ 代 $a = 2$ 。

積分表中有許多疊代公式可以運用。例如 [BioCalc.] Example 5.7.2 求 $\int x^3 \sin x dx$ 。我們可以在積分表的三角函數類中找到

$$\int u^n \sin u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du \quad (3.24)$$

利用 $u = x$ 以及 $n = 3$ 可得 $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx$ 。在三角函數類中也有

$$\int u^n \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du.$$

所以利用 $u = x$ 以及 $n = 2$ 可得 $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$ 。再利用一次式子 (3.24) 在 $n = 1$ 的情形得 $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$ 。結合這些結

果得

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3(x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x)) = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x.$$

積分表中函數的變數經常用 u 來表示（而不是 x ）主要就是告訴我們即使用查表法，經常需要用變換變數才能完成。我們看以下例子。

例子 3.2.11. [BioCalc.] Example 5.7.3 求 $\int x \sqrt{x^2 + 2x + 4} \, dx$ 。在積分表的分類中，我們僅看到 $\sqrt{u^2 + a^2}$, $\sqrt{u^2 - a^2}$ 以及 $\sqrt{a^2 - u^2}$ ，並沒有看到如 $\sqrt{au^2 + bu + c}$ 這樣的分類。這意味著我們必需利用配方法 $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$ ，再利用變換變數 $u = x + 1$ 將函數寫成符合積分表中的某類。此時由於 $x = u - 1$ 以及 $du = dx$ ，所以變換變數成

$$\int x \sqrt{x^2 + 2x + 4} \, dx = \int (u - 1) \sqrt{u^2 + 3} \, du = \int u \sqrt{u^2 + 3} \, du - \int \sqrt{u^2 + 3} \, du.$$

其中 $\int u \sqrt{u^2 + 3} \, du$ 可用變換變數 $v = u^2 + 3$ （或查表）得 $\int u \sqrt{u^2 + 3} \, du = \frac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$ ，而 $\int \sqrt{u^2 + 3} \, du$ 也可用查表得積分為 $\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 3} + \frac{3}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + 3})$ 。故原積分等於

$$\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{3}{2} \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}).$$

#

要注意，並不是利用查表就可以幫我們處理所有函數的積分。事實上並不是用常見函數表示的函數它的反導函數也可用常見的函數來表示。例如

$$\int e^{x^2} \, dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx$$

等，都被證實無法用常見的函數來表示。

習題 3.11. 利用積分表處理以下積分：

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 + 9}}; \quad \int x \sin(x^2) \cos(3x^2) \, dx; \quad \int \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}; \quad \int \frac{\sec^2 \theta \tan^2 \theta}{\sqrt{9 - \tan^2 \theta}} \, d\theta.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.7(3, 10, 15, 16)）

3.3. 積分的應用

定積分的定義是由 Riemann sum 取極限而來，所以只要能用 Riemann sum 表示的求值問題都可以用定積分求得。例如前面提的面積，和之後談論的體積，都是定積分應用的範圍。

3.3.1. 函數所圍的區域面積. 在定義定積分時，我們知道當函數 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 取值皆大於等於 0 時，就可以用黎曼和取極限求得函數圖形 $y = f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 這個區間與 x 軸之間所圍區域的面積。所以此時面積可以用定積分 $\int_a^b f(x) \, dx$ 求得。同理，當兩函數 $f(x), g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 都滿足 $f(x) \geq g(x)$ 時，我們一樣可以用黎曼和的極限來求函數圖形 $y = f(x), y = g(x)$ 在此區間所圍出的面積。此時當我們將區間 $[a, b]$ 分割成 n 段，利用 n 個長方形面積和來逼近 $y = f(x), y = g(x)$ 所圍區域的面積。每個長方形的寬度為 Δx_i 而高度

為 $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ (注意 $f(x_i^*) \geq g(x_i^*)$, 所以這確實為長度), 故其面積為 $(f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x_i$ 。因此黎曼和可寫成 $\sum_{i=1}^n (f(x_i^*) - g(x_i^*))\Delta x_i$ 取極限便得面積為 $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ 。

例子 3.3.1. [BioCalc.] Example 6.1.1 探討函數圖形 $y = e^x$ 與直線 $y = x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 這個範圍所圍的面積。確認 e^x 在這範圍皆大於 x 後, 我們便可將此區域面積用定積分 $\int_0^1 (e^x - x) dx$ 表示, 並得面積為

$$\int_0^1 (e^x - x) dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} \right) - (1 - 0) = e - \frac{3}{2}.$$

[BioCalc.] Example 6.1.2 探討兩函數圖形 $y = x^2$ 與 $y = 2x - x^2$ 所圍的有界區域面積。這次沒有給 x 的範圍, 所以我們必需先找到 x 的範圍。由於兩個函數圖形一個是凹向上、另一個是凹向下, 所以它們相交處之間便會圍出一個有界區域。利用 $x^2 = 2x - x^2$ 求出它們交於 $x = 0$ 和 $x = 1$ 。接著我們必需確認 $y = x^2$ 與 $y = 2x - x^2$ 其中哪一個在此範圍 $0 \leq x \leq 1$ 是在上方。可由 $x^2 - (2x - x^2)$ 判斷或代 $x = \frac{1}{2}$, 知在 $x \in [0, 1]$ 時 $y = 2x - x^2$ 在 $y = x^2$ 上方。

故可將此區域面積用定積分 $\int_0^1 ((2x - x^2) - x^2) dx$ 表示, 並得面積為

$$\int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

這裡補充一下, 一般來說兩個函數 $f(x), g(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 未必都滿足其中一個一直在另一個上方, 而可能時而在上, 時而在下。所以一般來說會以 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 來表示並計算它們在這個區間所圍面積。計算時必須把哪一個在上哪一個在下變化的區間區隔出來再分別計算。例如 $y = x^3$ 與 x 軸在 $-1 \leq x \leq 1$ 之間所圍區域不是 $\int_{-1}^1 x^3 dx$, 因為上下抵消, 積分會得到 $\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1}^1 = 0$ 。其面積應是 $\int_{-1}^1 |x^3| dx$, 因為 $y = x^3$ 在 $x \in [-1, 0]$ 時在 x 軸下方, 而 $x \in [0, 1]$ 時在 x 軸上方, 所以面積為

$$\int_{-1}^1 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (0 - x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

#

有時我們需要計算函數圖形到無窮遠點所圍的區域面積。由於我們不可能真的計算到無窮遠, 所以這時便需用到極限的概念。也就是說當 $f(x)$ 在 $x \geq a$ 時皆大於等於 0, 我們要計算 $y = f(x)$ 在 $x \geq a$ 和 x 軸所圍面積, 此時我們會用 $\int_a^\infty f(x) dx$ 來表示這個面積。這個積分一般不稱為定積分, 而稱之為“瑕積分”(improper integral)。瑕積分的計算方式便是先考慮積有限的範圍, 即考慮 $\int_a^b f(x) dx$, 然後再讓 b 趨近於無限大, 求其極限。瑕積分不只幫我們求面積, 也有其他應用, 所以不需 $f(x) \geq 0$, 在一般狀況定義瑕積分為

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.25)$$

注意這裡 a 是固定的數字, 而 b 是任意選取的, 所以對 b 取極限。當極限存在時稱此瑕積分收斂, 並以收斂值為其積分值; 而若極限不存在, 便稱此瑕積分發散。

例子 3.3.2. 我們分別求瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 以及 $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ([BioCalc.] Example 5.8.1)。依定義 (式子 (3.25))

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1.$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - 0 = \infty.$$

所以我們說瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ 收斂且其值為 1；而瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ 發散。注意雖然 $y = \frac{1}{x^2}$ 和 x 軸所圍區域從 $x = 1$ 延伸到無窮遠面積一直增加，但不會增加到無限大，從前面計算知這面積會趨近於 1；但 $y = \frac{1}{x}$ 和 x 軸所圍面積就會趨近於無限大。 #

瑕積分的定義也可推廣到負無窮遠，當 b 為固定值，我們定義瑕積分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 為

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.26)$$

例如瑕積分 $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ ([BioCalc.] Example 5.8.3) 依定義為收斂且其值為 1，因為

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

我們也可談兩端都趨近於無限大的瑕積分，其定義為選取一固定實數 c (通常選 0)，然後分別計算上下界的瑕積分 $\int_{-\infty}^c f(x) dx, \int_c^\infty f(x) dx$ 再加起來，亦即

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx. \quad (3.27)$$

注意兩個瑕積分要分開算，再加起來，其中只要有一個瑕積分是發散，原瑕積分就發散。千萬不要用 $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx$ 這樣的方式計算，會有正負抵消造成錯誤的情況發生。

例子 3.3.3. 考慮瑕積分 $\int_{-\infty}^\infty x dx$ ，若用 $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x dx$ ，會得到

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-a}^a = \frac{1}{2} (a^2 - a^2) = 0,$$

這樣的錯誤發生。事實上，依定義應為

$$\int_{-\infty}^\infty x dx = \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^\infty x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx.$$

因為其中 $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} b^2 = \infty$ 為發散 (事實上 $\int_{-\infty}^0 x dx$ 也發散) 所以此瑕積分為發散。

[BioCalc.] Example 5.8.4 考慮瑕積分 $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ 。分開來計算，我們有

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$

同理可得 $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\tan^{-1} a = \frac{\pi}{2}$ 。故 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ 。 #

前面談的瑕積分是在無限的區間積分，但在積分的範圍內函數都是有定義的。還有一種瑕積分是在有限區間積分，但函數在積分範圍某些點無定義（趨近於無限大）。例如 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 和 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ，由於 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=0$ 無定義，所以它們都是瑕積分。這種瑕積分和前面情況一樣的概念處理：先考慮不含無定義點的定積分，再慢慢逼近求極值。因此我們有瑕積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln a) = \infty$$

為發散；而

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2$$

為收斂且其值為 2。

前面在探討 $\frac{1}{x}$ 的不定積分為 $\ln|x|$ 有提及 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 為瑕積分，就是因為 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 時無定義（不連續），無法套用微積分基本定理。事實上，如同前面的定義，此瑕積分應為 $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 。由於已知 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 為發散，所以 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ 也是發散。

習題 3.12. 判斷以下瑕積分是否收斂，若收斂請求其值：

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}} dx; \quad \int_{-\infty}^{-1} e^{-2t} dt; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx.$$

（取自 [BioCalc.] Exercise 5.8(3, 8, 18)）

習題 3.13. 求以下函數圖形在指定範圍內所圍有界區域之面積：

- (1) $y = 5x - x^2, y = x, 0 \leq x \leq 4$.
- (2) $y = \cos x, y = 2 - \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$.
- (3) $y = \cos x, y = 1 - \cos x, 0 \leq x \leq \pi$.

（取自 [BioCalc.] Exercise 6.1(1, 10, 14)）

3.3.2. 平均值. 當有有限個數字，其平均值就是將這些數字加起來，再除以這些數字的個數。當有無限多個數字，要求其平均，我們可以利用極限的概念，先算有限多個的平均值，再逐漸增加數量求其極限。利用這個概念，一個連續函數在一個區間的平均，便可以用黎曼和的極限表示成定積分的形式。

假設在時間為 t 時溫度為 $f(t)$ ，我們要如何算從時間 a 到 b 這段時間的平均溫度呢？我們可以將這段時間均分為 n 等分，亦即每一等分時間間距為 $\Delta t_i = \frac{b-a}{n}$ 。然後在每段時間中挑一個時間 t_i^* 測量得到溫度 $f(t_i^*)$ 。這 n 個溫度的平均值可寫成

$$\frac{1}{n}(f(t_1^*) + f(t_2^*) + \cdots + f(t_n^*)) = \frac{\Delta t_i}{b-a}(f(t_1^*) + f(t_2^*) + \cdots + f(t_n^*)) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t_i,$$

恰為黎曼和的形式。所以當分割的次數逐漸增加取極限可得這段時間的平均溫度為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

因此我們定義連續函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 的平均值為

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

例如 [BioCalc.] Example 6.2.2 提及西元 1900 年全世界人口約為 1.43653×10^9 。若從 1900 年開始 (設 $t = 0$)， t 年後世界人口數依模型為 $P(t) = 1.43653 \times 10^9 \cdot (1.01395)^t$ 。則我們可以算出整個 20 世紀 (即 $t = 0$ 到 $t = 100$) 全世界人口的平均值約為

$$\frac{1}{100} \int_0^{100} 1.43653 \times 10^9 \cdot (1.01395)^t dt = 1.43653 \times 10^7 \cdot \frac{(1.01395)^{100} - 1}{\ln(1.01395)} \approx 3.1 \times 10^9.$$

關於平均值有一個重要性質，稱為積分的均值定理。這個均值定理可以用 (微分) 均值定理處理。回顧當函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 為連續，且令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ，則由第一型微積分基本定理知 $F'(x) = f(x)$ ，因此對任意 $c \in (a, b)$ ，皆有 $F'(c) = f(c)$ 。再由 (第二型) 微積分基本定理 (Theorem 3.1.2) 知 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ 。另一方面，均值定理 (Theorem 2.3.1) 告訴我們存在 $c \in (a, b)$ 滿足 $F'(c) = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$ ，因此得知 c 滿足

$$f(c) = F'(c) = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.28)$$

這個均值定理可以用剛才平均溫度的例子來理解，它告訴我們一天中會有一個特定時間的溫度和整天的平均溫度一樣。

例子 3.3.4. [BioCalc.] Example 6.2.3 考慮函數 $f(x) = x^2 + 1$ 在區間 $[-1, 2]$ 的情形。要求 $f(x)$ 在這之間的平均值，並找到 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c)$ 為此平均值，以驗證積分均值定理。依定義 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的平均值為 $\frac{1}{2 - (-1)} \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_{-1}^2 = 2$ 。我們必須找到 $c \in (-1, 2)$ 滿足 $f(c) = c^2 + 1 = 2$ 。解得 $c = \pm 1$ 確實其中一點 $1 \in (-1, 2)$ 。#

習題 3.14. 回答以下平均值問題：

- (1) 求函數 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 在區間 $[1, 8]$ 的平均值
- (2) 某城市在早上 9 點後 t 小時其溫度為 $T(t) = 50 + 14 \sin \frac{\pi t}{12}$ 。試求該城市從早上 9 點到晚上 9 點的平均溫度。

(取自 [BioCalc.] Exercise 6.2.3, 6.2.13)

3.3.3. 體積. 當一個物體的每一個切面面積可以用函數表示時，便可以用黎曼和表示此物體的體積。也因此在此情形，我們可以用定積分求此物體的體積。

我們可以把要算體積的物體放在空間坐標的 x 軸上，假設放在 $x = a$ 到 $x = b$ 之間。沿著與 x 軸垂直的方向將此物體細切成 n 片。每片依序算其體積，第 i 片的薄片厚度用 Δx_i 表示且設其切面面積為 $A(x_i)$ ，當切得夠細時，此薄片面積會很接近 $A(x_i) \Delta x_i$ 。因此當越切

越細時每片體積的加總 $\sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i$ 會越來越接近其體積，因此此黎曼和取極限便可得此物體的體積為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i = \int_a^b A(x) dx. \quad (3.29)$$

這就是利用積分算體積的方式。

[BioCalc.] Example 6.4.5 考慮的物體其底為半徑為 1 的圓，將粗體置於 xy 平面，且圓心在原點上。已知沿著與 x 軸垂直的方向切此物體，每個切面皆為正三角形。由於在 x 坐標為 x_i 的位置所切的切面其底為與圓心距離為 $|x_i|$ 的弦，故弦長為 $2\sqrt{1-x_i^2}$ 。也因此知此切面為底為 $2\sqrt{1-x_i^2}$ 的正三角形。由正三角形每個角為 $\frac{\pi}{3}$ 即三角形面積公式知此切面面積為 $\frac{1}{2} \left(2\sqrt{1-x_i^2} \right)^2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}(1-x_i^2)$ 。由於 x 的範圍為 $x = -1$ 到 $x = 1$ ，故得此物體體積為

$$\int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = \sqrt{3} \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

一般的物體很多可用旋轉的概念形成。例如一個上半圓以底部直徑為軸旋轉一圈便可得到一個球、一個線段以通過端點的另一直線為軸，旋轉一圈便可得到一個圓錐，... 等。以這種方式形成的物體，稱為旋轉體。旋轉體的體積都能用積分的方式求其體積。假設我們要考慮的旋轉體是函數圖形 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 到 $x = b$ 這一段，以 x 軸為旋轉軸繞一圈所得。由於對此旋轉體在每個分割點 x_i 沿著與 x 軸垂直的方向所切的薄片切面是一個圓。這個圓的半徑就是 $|f(x_i)|$ 所以面積 $A(x_i)$ 為 $\pi(f(x_i))^2$ 。利用積分算體積的方式（式子 (3.29)），得到此旋轉體的體積為

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx. \quad (3.30)$$

例子 3.3.5. [BioCalc.] Example 6.4.2 探討半徑為 r 的球之體積。由於球可用半徑為 r 的上半圓旋轉而得，我們可將之視為是以函數 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 在 $x = -r$ 和 $x = r$ 之間以 x 軸為旋轉軸旋轉一圈的旋轉體。故依式子 (3.30) 知其體積為

$$\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-r}^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

[BioCalc.] Example 6.4.4 探討兩函數 $y = x$ 和 $y = x^2$ 所圍區域以 x 軸為旋轉軸旋轉一圈的旋轉體體積。首先先求兩圖形的交點發生於 $x = x^2$ ，即 $x = 0, x = 1$ 之處，所以我們只要考慮 $x = 0$ 到 $x = 1$ 這一部分。由於此部分 $y = x$ 都在 $y = x^2$ 的上方，所以這個旋轉體可視為 $y = x$ 所繞得較大的旋轉體（圓錐）挖掉 $y = x^2$ 所繞得較小的旋轉體而得。因此可得此旋轉體體積為

$$\pi \int_0^1 (x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}\pi.$$

習題 3.15. 回答以下有關體積問題：

- (1) $y = \sqrt{x-1}$ 與 x 軸在 $1 \leq x \leq 5$ 所圍區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積。
- (2) $y = x^3$ 與 $y = x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 所圍區域繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積。

(3) 底部為半徑為 r 的圓，而與底部垂直的切面都是正方形的物體體積。

(取自 [BioCalc.] Exercise 6.4(3, 5, 14))

3.3.4. 生物學的應用. 最後我們藉由一些生物學上的應用，再次強調寫成黎曼和便能用定積分計算，這個重要的方法。

3.3.4.1. 心臟輸出率. 這裡指的是每單位時間心臟推入主動脈的血液量。一種測量心輸出量的方法 (dye dilution method) 是輸入固定劑量 A 的染劑。在確定染劑最後會被稀釋殆盡的時間 T 內將時間分割成 n 等分 (故每段時間為 $\Delta t_i = \frac{T}{n}$)，在每段時間開始 t_i ，測量血液中染劑濃度 $c(t_i)$ 。若心臟輸出率為 F ，且每段時間 Δt_i 很短時，這段時間所得染劑的量應為血液量 $F\Delta t_i$ 乘上染劑濃度 $c(t_i)$ 。所以總染劑量 A 會很接近 $\sum_{i=1}^n c(t_i)F\Delta t_i$ ，且會因 n 越來

越大越接近。這是一個黎曼和，故取 $n \rightarrow \infty$ 得極限 $\int_0^T c(t)F dt = A$ 。因此便可算得心臟輸出率為

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}.$$

[BioCalc.] Exercise 6.3.11 所舉的例子是劑量 $A = 6$ 、時程 $T = 10$ 而測得染劑濃度符合函數 $c(t) = 20te^{-0.6t}$ 。利用分部積分

$$\int te^{-0.6t} dt = -\frac{1}{0.6}te^{-0.6t} + \frac{1}{0.6} \int e^{-0.6t} dt = -\frac{1}{0.6}(te^{-0.6t} + \frac{1}{0.6}e^{-0.6t})$$

可得 $\int_0^{10} te^{-0.6t} dt = \frac{1}{0.36}(-7e^{-6} + 1)$ 因此在此情況 $F = \frac{6}{20} \times \frac{0.36}{-7e^{-6} + 1} \approx 0.1099$ 。

3.3.4.2. 血流量. 這裡指的是每單位時間流出的血液量。由於血液在血管的流動速度會和其與血管中心軸的距離 r 有關，所以我們必需將血管半徑 R 分段來計算流量。假設依與中心軸距離由小而大依序為 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 。這樣分割血管的剖面每一段都是環狀。當分割很細時，由於環的寬度 $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ 很小，我們可以假設在這環內的血液流速都是 $v(r_i)$ 。因此我們只要知道這個環的面積，乘上流速 $v(r_i)$ 就可知道在單位時間從這個環流出的血液量。

由於第 i 段的環，是半徑為 r_i 的圓扣掉半徑為 r_{i-1} 的圓。因為想寫成黎曼和，我們將 r_{i-1} 寫成 $r_i - \Delta r_i$ 所以這個環的面積為

$$\pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = \pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = \pi(2r_i - \Delta r_i)\Delta r_i = 2\pi r_i \Delta r_i - \pi(\Delta r_i)^2.$$

因為分割得很細 $(\Delta r_i)^2$ 比起 Δr_i 小得很多，可以忽略不計，所以這個環狀區域的面積很接近 $2\pi r_i \Delta r_i$ 。也因此單位時間流出這個環的血液量為 $2\pi r_i \Delta r_i \cdot v(r_i)$ 。將這些環單位時間流出量加總 $\sum_{i=1}^n 2\pi v(r_i) r_i \Delta r_i$ 就會很接近單位時間的血流量 F ，且會因 n 越來越大越接近。這是一個黎曼和，故取 $n \rightarrow \infty$ 得極限 $\int_0^R 2\pi r v(r) dr = F$ 。

事實上根據血液的層流定律 (Law of Laminar Flow)，當血管半徑為 R 長度為 ℓ ，而壓力為 P 黏度為 η 時，距離血管中心軸為 r 的流速為 $v(r) = \frac{P}{4\eta\ell}(R^2 - r^2)$ 。所以我們可以得

到血流量為

$$F = \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta\ell} (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi P}{2\eta\ell} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi P}{2\eta\ell} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi P R^4}{8\eta\ell}.$$

這稱為 *Poiseuille's Law*。

3.3.4.3. 人口預估. 影響人口數量的有兩個函數。一個是所謂的新生函數 (renewal function) $R(t)$ ，它表示從現在起 t 年後新生人口增加速度；另一個是所謂存活函數 (survival function) $S(t)$ ，它指的是當時人口 t 年後仍存活的比率。

若現有人口為 P_0 ，要估計 T 年後的人口。首先注意依照存活函數定義，當前人口會有 $S(T) \cdot P_0$ 人在 T 年仍存活。不過之後出生的人口會因出生時間不同存活率不同，因此我們必需將時間 T 分割成 n 段， $t_1, t_2, \dots, t_n$ ，依序計算這些段出生人口到時存活的人數。當分割很細時我們可假設在 t_{i-1} 到 t_i 這段新增人口速度都是 $R(t_i)$ ，所以這段時間新增人數為 $R(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) = R(t_i) \cdot \Delta t_i$ 。而這些人到 T 年還有 $T - t_i$ 年，所以他們到 T 年時有 $S(T - t_i) \cdot R(t_i) \cdot \Delta t_i$ 人存活。將這些各段時間算出的存活人數加總得 $S(T) \cdot P_0 + \sum_{i=1}^n S(T - t_i) \cdot R(t_i) \cdot \Delta t_i$ 會很接近 T 年後之人口 $P(T)$ ，且會因 n 越來越大越接近。

這是一個黎曼和，故取 $n \rightarrow \infty$ 得極限 $S(T) \cdot P_0 + \int_0^T S(T - t) \cdot R(t) dt = P(T)$ 。

[BioCalc.] Example 6.3.1 討論有一池塘現有 5600 隻鱒魚，而這些鱒魚在第 t 的新生率 (新生函數) 為 $R(t) = 720e^{0.1t}$ (fish/year)，而過 t 年的存活率 (存活函數) 為 $S(t) = e^{-0.2t}$ 。想預估 10 年後的鱒魚數量。依前面討論，我們有

$$P(10) = 5600e^{-2} + 720 \int_0^{10} e^{-0.2(10-t)} e^{0.1t} dt = 5600e^{-2} + 720e^{-2} \int_0^{10} e^{0.3t} dt.$$

因為 $\int_0^{10} e^{0.3t} dt = \frac{1}{0.3} e^{0.3t} \Big|_0^{10} = \frac{1}{0.3} (e^3 - 1)$ ，所以

$$P(10) = 5600e^{-2} + \frac{720}{0.3} e^{-2} (e^3 - 1) = 5600e^{-2} + 2400(e - e^{-2}) \approx 6956.95.$$