數學導論

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

大學所學的數學和高中階段所學習數學在層次上有所不同. 簡單來說大學數學著重於理論的基礎. 本講義希望介紹同學如何讀懂定理, 理解證明甚而自己寫下證明. 我們將介紹邏輯 (Logic), 集合 (Set) 以及函數 (Function) 的概念. 要注意, 我們不是要介紹邏輯學以及集合論. 這裡談論的僅著重於將來大家學習數學所需要的邏輯及集合的概念.

本講義雖然主要以中文撰寫, 不過當涉及定義或專有名詞時, 為免翻譯的困擾將以英文取代. 因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現, 若有不便請見諒.

本講義編寫費時, 編寫完後並未經過嚴謹的校對. 疏漏在所難免, 雖不至於有理論性上嚴重的錯誤, 但讀者仍應注意不宜概括全收. 若發現錯誤, 歡迎提出寶貴的意見.

Chapter 3

Set

集合的理論是所有數學理論的基礎系統. 在這一章中我們將簡單的介紹集合的一些基本理論. 我們採用較自然及直覺的方式介紹集合論, 而不涉及抽象的公設結構.

3.1. Basic Definition

首先我們介紹有關集合的基本定義, 並了解集合之間的關係.

集合和元素是數學最基本的名詞, 嚴格說起來它是無法定義清楚的. 這裡我們就不去定義集合, 而採用較直觀的說法. 所謂一個集合 (英文稱之為 *set*) 就是一些事物收集起來的結果, 而組成這個集合的事物, 我們稱為此集合的元素 (英文稱之為 *element*). 通常我們會用英文大寫來表示一個 set, 例如 A,B,S 等, 而用小寫字母來表示 set 裡的元素. 不過有些數學常用的集合大家都習慣用特定的符號表示. 例如: $\mathbb{N}$ 表示所有自然數所成的集合, $\mathbb{Z}$ 為整數所成的集合, $\mathbb{Q}$ 表示有理數所成的集合, 而所有實數所成的集合我們用 $\mathbb{R}$ 來表示. 若 x 為集合 S 裡的一個元素, 我們就用 $x \in S$ 來表示, 稱之為 x *belongs to* S (即 x 屬於 S). 若 x 不在 S 中, 我們就用 $x \notin S$ 來表示.

在數學上, 我們希望一個 set 是要明確的知道哪些是它的 element 哪些不是它的 element. 也就是說給定一集合 S, 對於任意的 x, 我們必須明確知道 $x \in S$ 是對的還是錯的. 一般來說, 一個集合若僅有有限多個元素, 我們便可以一一將它們列舉出來. 例如 $S = \{1,2,3\}$ 表示的就是有 3 個元素的集合, 其元素為 1,2 和 3. 這裡 S 是一個集合, 例如我們知道 $1 \in S$, 而 $4 \notin S$. 有時一個集合我們無法一一列舉出它的元素, 此時我們便用所謂 *set-builder notation* 來表示其元素. 它的表示法通常為 $\{x : P(x)\}$ 這樣的形式, 其中冒號 : 左邊的 x 表示我們要用 x 來表示此集合的元素, 而冒號 : 右邊的 $P(x)$ 指的是這個集合裡的元素 x 需滿足 $P(x)$. 也就是說 $\{x : P(x)\}$ 這個集合便是收集所有滿足 $P(x)$ 的 x 所成的集合.

在探討集合相關性質之前, 首先我們必須定義何謂集合的相等, 以及集合間的包含關係.

Definition 3.1.1. 設 A,B 為集合. 如果 B 中的 element 皆為 A 的 element, 我們稱 B 為 A 的 *subset* (子集合), 也稱 B is *contained* in (包含於) A, 記為 $B \subseteq A$. 若 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$, 則稱 A,B 為 *equal*, 記為 $A = B$. 另外若 $B \subseteq A$ 但 $B \neq A$, 則稱 B 為 A 的 *proper subset*, 記為 $B \subset A$.

注意 subset 和 proper set 的符號 “$\subseteq$” 和 “$\subset$”, 許多參考書籍的符號並不一致, 請在閱讀時注意.

依定義若要證明 $B \subseteq A$, 我們必須說明任意 B 中的元素 x, 皆會是 A 的元素, 所以用數學的表示法就是要證明 “$x \in B \Rightarrow x \in A$”. 而要證明 $A = B$ 的話就是等同於證明 “$x \in B \Leftrightarrow x \in A$”. 從這裡得知, 兩集合的包含關係以及相等, 只與元素是否屬於該集合有關, 和集合的表示法無關. 例如以下的例子:

Example 3.1.2. 令 $A = \{1,2,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{3,3,1,2\}$, $D = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 3\}$, $E = \{2,4\}$.

由於 A 僅有 1,2 兩個元素, 而 $1 \in B$ 且 $2 \in B$, 故知 $A \subseteq B$. 又 $3 \in B$ 但 $3 \notin A$, 知 B 不包含於 A, 故得 $A \subset B$. 同理我們知 $B = C$.

現若 $x \in B$, 則知 $x \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq x \leq 3$, 故得 $x \in D$. 得證 $B \subseteq D$. 另一方面, 若 $x \in D$ 表示 $x \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq x \leq 3$, 所以 $x = 1,2,3$ 皆在 B 中, 得證 $D \subseteq B$, 由此知 $B = D$.

最後因 $1 \in B$ 但 $1 \notin E$, 我們知 B 不是 E 的 subset. 同樣的, 因 $4 \in E$ 但 $4 \notin B$, 我們知 E 也不是 B 的 subset.

當 A,B 為 sets, 但 B 不是 A 的 subset 時, 我們也用 $B \not\subseteq A$ 來表示. 所以如果 $B \subseteq A$ 但 $A \not\subseteq B$, 依定義我們得 $B \subset A$.

Question 3.1. 假設 $P(x)$, $Q(x)$ 皆為 *statement form*. 令 $P = \{x : P(x)\}$ 且 $Q = \{x : Q(x)\}$ 試證明以下性質:

(1) $P \subseteq Q$ 若且唯若 $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

(2) $P = Q$ 若且唯若 $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

為了將來探討集合間的關係方便, 我們定義兩個特殊的集合. 首先, 當我們所探討的問題都是某個特定集合的元素或其 subset 時, 為了方便我們定此特定集合為 *universal set* (宇集). 例如當我們談論的是有關於實數, 我們就可以說 $\mathbb{R}$ 為我們的 universal set. 如此便可以不必每次都要去提類似如 $x \in \mathbb{R}$ 這樣的事. 不過 universal set 可以因所探討的問題不同而改變, 例如在 a,b 為整數時, 我們可以在 universal set 為 $\mathbb{Q}$ 時談論 $ax + b = 0$ 的解. 但談論 $ax^2 + b = 0$, 就可能要令 universal set 為 $\mathbb{R}$ 或複數 $\mathbb{C}$ 才有意思. 不管如何, 當我們發現要探討的集合都是某一個特定集合的子集合時, 明確的將之訂定為 universal set 確有其方便性. 不過當我們訂定 universal set 之後, 所有談論的 set 就必須是此 universal set 的 subset.

另一個我們需要定義的是所謂 *empty set* (空集合). 它是一個沒有任何元素的集合, 我們用 $\emptyset$ 來表示. 或許大家會疑惑 $\emptyset$ 有符合集合的要求嗎? 其實由於我們可以明確的知道所有的元素皆不屬於空集合, 所以它並未違背當初我們說的 “明確知道 $x \in \emptyset$ 是對或錯” 的要求. 由於我們將來要探討集合的一些如交集等的 operations, 因此將 $\emptyset$ 視為一集合確有其必要性. 關於 universal set 和 empty set, 我們有以下的性質.

Proposition 3.1.3. 假設 X 為 *universal set* 且 A 為 *set*. 則 $A \subseteq X$ 且 $\emptyset \subseteq A$.

Proof. 依定義 X 為 universal set, 故 A 為 X 的 subset, 得 $A \subseteq X$. 另一方面, 要證明 $\emptyset \subseteq A$ 等同於要證明若 $x \in \emptyset$ 則 $x \in A$. 但不可能會有 $x \in \emptyset$ 的情形發生, 故由當 P 錯時 $P \Rightarrow Q$ 恆對的邏輯規則知 "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" 為正確故知 $\emptyset \subseteq A$. □

Question 3.2. 在此 *Question* 中令 X 為 *universal set.* 試問 *universal set* 是否唯一? 又 *empty set* 是否唯一?

一般數學上定義了一些名詞後, 接著便是要探討這些名詞相關的性質, 接下來我們便是要談論有關 subset 的基本性質.

Proposition 3.1.4. 假設 A,B,C 為 *sets,* 我們有以下的性質.

(1) $A \subseteq A$.

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$.

Proof. (1) 假設 $x \in A$, 自然有 $x \in A$, 故得 $A \subseteq A$.

(2) 設 $x \in A$, 由 $A \subseteq B$ 得 $x \in B$. 又由 $B \subseteq C$ 得 $x \in C$. 綜言之, 對於任意 $x \in A$ 必有 $x \in C$, 得證 $A \subseteq C$. □

Question 3.3. 試利用 *Proposition 3.1.4* 證明若 $A = B$ 且 $B = C$, 則 $A = C$.

Question 3.4. 假設 A,B,C 為 *sets,* 下列哪些是對的?

(1) 若 $A \subset B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$.

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subset C$.

(3) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$, 則 $A \subseteq C$.

(4) 若 $A \subset B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subset C$.

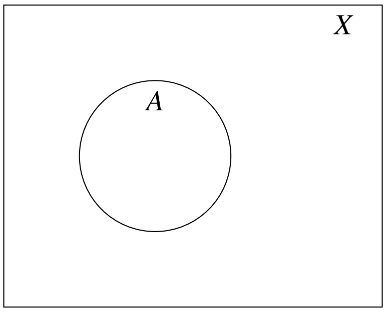
再強調一次, 當要證明 $A = B$ 時必須 $A \subseteq B$ 以及 $B \subseteq A$ 兩個方向都證明才行. 尤其在處理解方程式的情形, 我們都會設未知數為解然後解方程式, 同學常常弄不清楚是處理哪一邊的包含關係或常常忘了處理另一邊的包含關係. 我們看以下的例子.

Example 3.1.5. 令 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x = y = 2\}$ 且 $B = \{(2,2),(-1,2)\}$. 證明 $A = B$.

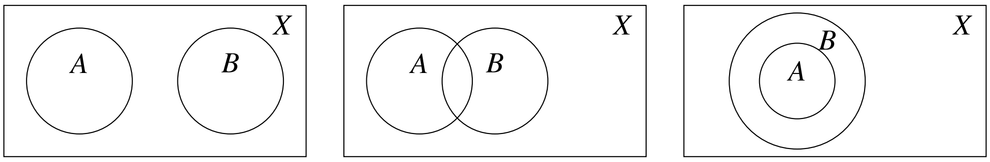
Proof. 設 $(x,y) \in A$, 表示 $x^2 - x = 2$ 且 $y = 2$, 故得 $x = 2$ 或 $x = -1$ 且 $y = 2$. 此表示若 $(x,y) \in A$, 則 $(x,y) = (2,2)$ 或 $(x,y) = (-1,2)$. 故知 $x \in B$, 亦即得證 $A \subseteq B$. 接著設 $(x,y) \in B$, 知 $(x,y) = (2,2)$ 或 $(x,y) = (-1,2)$ 代入皆符合 $x^2 - x = y = 2$, 故知 $(x,y) \in A$. 得證 $B \subseteq A$, 故知 $A = B$ □

Question 3.5. 令 $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} = x - 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{4\}$, $D = \{1,4\}$. 試寫下 A,B,C,D 相互間的包含關係.

我們可以利用所謂的 *Venn diagrams* 來幫助我們了解集合間的關係. 大致上, 我們先畫一個框框表示 universal set, 然後在此框框內畫一個封閉區域 (一般是畫一個圓) 表示一個 set. 例如下圖就是表示在宇集 X 中的一個 set A.

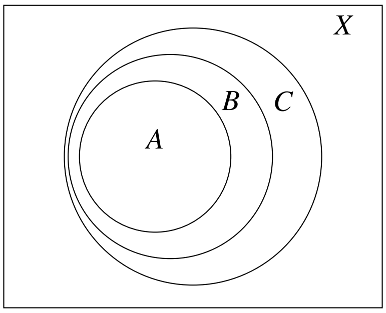


我們可以用 Venn diagrams 來表示兩個集合 A,B 之間三種可能的關係如下.



最左邊圖示表示的是 A,B 沒有共同的元素, 中間圖示表示的是 A,B 有共同元素但互相沒有包含關係, 而最右邊表示的是 $A \subseteq B$.

有時 Venn diagrams 可以幫助我們了解一些集合的性質, 甚至給我們證明這些性質的提示. 例如以下的圖示便可以幫助我們理解 Proposition 3.1.4 (2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$ 這個性質.



當然了 Venn diagrams 只是讓我們參考用, 絕不能只是畫個圖就以為證明完成.

Question 3.6. 假設 A,B,C 為 *sets.* 已知 $A \subseteq B$. 若 B 和 C 沒有共同的元素, 畫出可能的 *Venn diagrams.* 是否可以確定 A 和 C 沒有共同元素? 又若 B 和 C 有共同的元素, 畫出可能的 *Venn diagrams,* 是否可確定 A 和 C 有共同元素? 同樣的, 從 A,C 有沒有共同元素的情況畫出可能的 *Venn diagrams,* 並探討是否依此可確定 B,C 有沒有共同元素.

最後提醒大家千萬不要把 "$\in$" (屬於) 和 "$\subseteq$" (包含於) 弄混淆. "$\in$" 指的是元素和集合之間的關係, 而 "$\subseteq$" 指的是兩集合間的關係. 對於集合我們有 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 則 $A \subseteq C$ 的性質, 但對於元素 $A \in B$ 且 $B \in C$ 未必可得 $A \in C$. 例如

$$A = \{1\}, \quad B = \big\{\{1\}\big\}, \quad C = \Big\{\big\{\{1\}\big\}\Big\}.$$

我們有 $A \in B$ 且 $B \in C$, 但很明顯的 $A \notin C$.

3.2. Set Operations

所謂 set operation, 就是利用兩個已知的集合得到另一個集合的方法. 我們將介紹集合間幾種重要的 operations, 即 intersection, union 和 set difference, 並探討這幾種 set operations 之間重要的性質.

3.2.1. Intersection and Union. 首先我們定義 intersection 與 union.

Definition 3.2.1. 設 A,B 為 sets. 我們令 $A\cap B=\{x : x\in A \text{ and } x\in B\}$ 稱之為 the *intersection* of A and B (A 和 B 的交集). 令 $A\cup B=\{x : x\in A \text{ or } x\in B\}$ 稱之為 the *union* of A and B (A 和 B 的聯集).

簡單的說 $A\cap B$ 就是將 A,B 共同的元素收集起來所得的集合, 而 $A\cup B$ 是將 A,B 所有的元素收集起來而得的元素. 例如以下的例子.

Example 3.2.2. 令 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6\}$. 由於只有 2 是同時屬於 A 且屬於 B, 所以得 $A\cap B=\{2\}$. 而 1,3 雖沒有在 B 但都屬於 A, 符合屬於 A 或屬於 B 的條件故知 1,3 皆屬於 $A\cup B$. 同理 4,6 亦屬於 $A\cup B$. 至於 2 既然同時屬於 A 和 B 當然符合屬於 A 或屬於 B 的條件, 故知 2 也屬於 $A\cup B$. 又由於沒有其他的數在 A 中或 B 中, 我們可以確定 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

聯集和交集與原來的集合是有關係的. 例如在上面的例子中我們有 $A\cap B=\{2\}\subseteq A=\{1,2,3\}$ 以及 $B=\{2,4,6\}\subseteq A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$. 事實上, 若 $x\in A\cap B$, 表示 $x\in A$ 且 $x\in B$, 故知 x 一定屬於 A 且 x 一定屬於 B, 所以我們有

$$(A\cap B)\subseteq A \quad \text{and} \quad (A\cap B)\subseteq B. \tag{3.1}$$

注意 $A\cap B$ 有可能是空集合, 此時我們稱 A,B 為 *disjoint.* 不過空集合包含於任意的集合, 所以當 A,B 為 disjoint 時上式仍然成立. 另一方面若 $x\in A$, 則 x 必屬於 A 或 B, 所以 $x\in A\cup B$ 成立. 我們有

$$A\subseteq (A\cup B) \quad \text{and} \quad B\subseteq (A\cup B) \tag{3.2}$$

Question 3.7. 試證明 $(A\cap A)=A$ 以及 $(A\cup A)=A$.

交集和聯集在某種程度上可以說是保持包含關係的, 事實上我們有以下的性質.

Proposition 3.2.3. 設 A,B,C,D 皆為 *sets* 滿足 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$. 則

$$(A\cap C)\subseteq (B\cap D) \quad \text{and} \quad (A\cup C)\subseteq (B\cup D).$$

Proof. 因 $A\subseteq B$, 可由 $x\in A$ 得 $x\in B$. 同理因 $C\subseteq D$, 可由 $x\in C$ 得 $x\in D$. 現若 $x\in A\cap C$, 表示 $x\in A$ 且 $x\in C$. 故可得 $x\in B$ 且 $x\in D$. 得證 $(A\cap C)\subseteq (B\cap D)$. 同理, 若 $x\in A\cup C$, 表示 $x\in A$ 或 $x\in C$. 當 $x\in A$ 時可得 $x\in B$, 而當 $x\in C$ 時可得 $x\in D$. 故由 $x\in A\cup C$ 可得 $x\in B\cup D$. 得證 $(A\cup C)\subseteq (B\cup D)$. ☐

特別的, 當 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq D$ 時, 我們可以考慮 $C = A$ 的情形套用 Proposition 3.2.3 得 $(A \cap A) \subseteq (B \cap D)$. 又由於 $(A \cap A) = A$, 得知 $A \subseteq (B \cap D)$. 同理, 當 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq B$ 時, 我們有 $(A \cup C) \subseteq (B \cup B)$. 又由於 $(B \cup B) = B$, 得知 $(A \cup C) \subseteq B$. 我們證得以下性質. 由於這個結果是由 Proposition 3.2.3 簡單推導而得, 我們就用 *corollary* (引理) 稱之.

Corollary 3.2.4. 假設 A,B,C,D,E 為 *sets.*

(1) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 則 $A \subseteq (B \cap C)$.

(2) 若 $D \subseteq A$ 且 $E \subseteq A$, 則 $(D \cup E) \subseteq A$.

Question 3.8. 試直接證明 *Corollary 3.2.4,* 並用此結果推導出 *Proposition 3.2.3.*

我們也可利用交集或聯集來判斷兩集合的包含關係. 我們有以下的結果.

Proposition 3.2.5. 假設 A,B 為 *sets.* 則以下是 *equivalent.*

(1) $A \subseteq B$.

(2) $(A \cap B) = A$.

(3) $(A \cup B) = B$.

Proof. 我們證明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 以及 (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Leftrightarrow$ (2): 假設 $A \subseteq B$, 我們要證明 $(A \cap B) = A$. 事實上由式子 (3.1) 我們知 $(A \cap B) \subseteq A$, 故僅要證明 $A \subseteq (A \cap B)$. 然而已知 $A \subseteq A$ 以及 $A \subseteq B$, 故由 Corollary 3.2.4 得 $A \subseteq (A \cap B)$. 因此證明了 (1) $\Rightarrow$ (2). 另一方面, 由式子 (3.1) 我們知 $(A \cap B) \subseteq B$. 故由 $A = (A \cap B)$ 可得 $A \subseteq B$, 證明了 (2) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Leftrightarrow$ (3): 假設 $A \subseteq B$, 我們要證明 $(A \cup B) = B$. 事實上由式子 (3.2) 我們知 $B \subseteq (A \cup B)$, 故僅要證明 $(A \cup B) \subseteq B$. 然而已知 $A \subseteq B$ 以及 $B \subseteq B$, 故由 Corollary 3.2.4, 得 $(A \cup B) \subseteq B$. 因此證明了 (1) $\Rightarrow$ (3). 另一方面, 由式子 (3.2) 我們知 $A \subseteq (A \cup B)$. 故由 $(A \cup B) = B$ 可得 $A \subseteq B$, 證明了 (3) $\Rightarrow$ (1). □

由 Definition 3.2.1 我們知道“交集”和邏輯的“and”有關, 而“聯集”和“or”有關. 所以我們很容易推得以下的關係:

(1) $A \cap B = B \cap A$.

(2) $A \cup B = B \cup A$.

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

由於 (3) 的關係, 以後多個集合的交集我們便省略括弧不必去強調哪幾個先作交集, 例如直接寫成 $A \cap B \cap C$. 同理由於 (4), 以後多個集合的聯集我們也省略括弧, 例如直接寫成 $A \cup B \cup C$.

利用邏輯 $\wedge,\vee$ 之間的分配性質, 即

$$((P\wedge Q)\vee R)\sim((P\vee R)\wedge(Q\vee R)),\quad ((P\vee Q)\wedge R)\sim((P\wedge R)\vee(Q\wedge R)),$$

我們有以下的性質.

Proposition 3.2.6. 假設 A,B,C 為 *sets,* 則

$$((A\cap B)\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C),\quad ((A\cup B)\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

Proof. 首先由 $(A\cap B)\subseteq A$ 以及 $C\subseteq C$ 利用 Proposition 3.2.3 得 $((A\cap B)\cup C)\subseteq(A\cup C)$. 同理知 $((A\cap B)\cup C)\subseteq(B\cup C)$. 再利用 Corollary 3.2.4 得 $((A\cap B)\cup C)\subseteq(A\cup C)\cap(B\cup C)$. 另一方面假設 $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$ 表示 $x\in A\cup C$ 且 $x\in B\cup C$. 我們利用 proof in cases, 考慮 $x\in C$ 和 $x\notin C$ 這兩種情況. 若 $x\in C$, 則當然 $x\in(A\cap B)\cup C$. 而若 $x\notin C$, 則由 $x\in A\cup C$ 且 $x\in B\cup C$, 知 $x\in A$ 且 $x\in B$, 亦即 $x\in A\cap B$. 故此時仍有 $x\in(A\cap B)\cup C$. 也就是說不管哪種情況, 我們都可以由 $x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$ 推得 $x\in(A\cap B)\cup C$, 得證 $((A\cup C)\cap(B\cup C))\subseteq(A\cap B)\cup C$. 故知 $((A\cap B)\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

至於 $((A\cup B)\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ 的證明, 首先由 $A\subseteq(A\cup B)$ 以及 $C\subseteq C$ 利用 Proposition 3.2.3 得 $(A\cap C)\subseteq((A\cup B)\cap C)$, 同理我們有 $(B\cap C)\subseteq((A\cup B)\cap C)$. 故由 Corollary 3.2.4 知 $(A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq((A\cup B)\cap C)$. 另一方面, 若 $x\in(A\cup B)\cap C$, 表示 $x\in A\cup B$ 且 $x\in C$. 由 $x\in A\cup B$, 我們知 $x\in A$ 或 $x\in B$. 當 $x\in A$ 時, 由於已知 $x\in C$, 故得 $x\in A\cap C$. 此時自然有 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. 同理, 當 $x\in B$ 時, 可得 $x\in B\cap C$. 因此也有 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$, 得證 $((A\cup B)\cap C)\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$. 故知 $((A\cup B)\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ □

Question 3.9. 試利用 *Proposition 3.2.5* 中 $(1)\Rightarrow(2)$ 的結果以及 *Proposition 3.2.6* 證明 *Proposition 3.2.5* 中 $(2)\Rightarrow(3)$.

3.2.2. Set Difference. 我們定義何謂 set difference.

Definition 3.2.7. 假設 A,B 為 sets, 定義 $A\setminus B=\{x: x\in A \text{ and } x\notin B\}$, 稱之為 the *set difference* of B in A (B 在 A 中的差集). 若 X 為 universal set, 則令 $A^c=X\setminus A=\{x: x\notin A\}$ 稱之為 the *complement* of A (A 的補集).

注意 A^c 的定義原本應為 $\{x: x\in X \text{ and } x\notin A\}$, 但因 X 為 universal set, 我們知道所有元素皆在 X 中, 故省略 $x\in X$ 直接寫 $x\notin A$. 所以在使用補集時要特別注意是否已明確說明了什麼是宇集, 否則會有符號不唯一的問題. 例如若 $\mathbb{Q}$ 為宇集, 則 $\mathbb{Q}^c=\emptyset$, 而當宇集為 $\mathbb{R}$ 時, $\mathbb{Q}^c$ 就是所有無理數所成的集合了.

利用補集的符號, 依定義我們有 $A\setminus B=A\cap B^c$, 從這裡我們知道一般的情況 $A\setminus B$ 和 $B\setminus A$ 是不相同的. 事實上我們有 $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$. 這是因為很明顯的 $A\cap A^c=\emptyset$ 且 $B\cap B^c=\emptyset$, 故知

$$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c)=(A\cap A^c)\cap(B\cap B^c)=\emptyset.$$

Example 3.2.8. 假設 $X=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{1,2,3\}, B=\{2,4,6\}$. 因 $1,3\in A$ 且 $1\notin B$ 且 $3\notin B$, 知 $1,3\in A\setminus B$. 雖然 $2\in A$ 但是 $2\in B$, 故 $2\notin A\setminus B$. 得 $A\setminus B=\{1,3\}$. 同理可得

$B \setminus A = \{4,6\}$. 我們有 $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{1,3\} \cap \{4,6\} = \emptyset$. 又 $1,3,5 \in X$ 且 $1,3,5$ 皆不在 B 中, 故知 $1,3,5 \in B^c$. 而 $2,4,6 \in B$ 故 $2,4,6$ 皆不屬於 B^c, 得 $B^c = \{1,3,5\}$. 最後考慮 $A \cap B^c$ 得 $A \cap B^c = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3\} = A \setminus B$.

接下來我們看 set difference 和包含之間的關係. 若 A,B,C 為 sets 且 $A \subseteq B$, 此時知若 $x \notin B$, 則 $x \notin A$. 這是因為若 $x \in A$, 則由 $A \subseteq B$ 的假設知 $x \in B$, 故和 $x \notin B$ 相矛盾. 所以若已知 $A \subseteq B$ 則由 $x \in C \setminus B$, 我們知 $x \in C$ 且 $x \notin B$, 可得 $x \in C$ 且 $x \notin A$, 即 $x \in C \setminus A$. 由此知 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. 這個結果的反向是不正確的, 除非已知 $A \subseteq C$, 我們有以下之結果.

Proposition 3.2.9. 假設 A,B,C 為 *sets.* 若 $A \subseteq B$ 則 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

若又假設 $A \subseteq C$, 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

Proof. 由前面的探討知由 $A \subseteq B$ 可得 $C \setminus B \subseteq C \setminus A$ (此部分不需要 $A \subseteq C$ 的假設). 現若已知 $A \subseteq C$ 且 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$, 我們要證明 $A \subseteq B$, 即證明若 $x \in A$ 則 $x \in B$. 因為 $C \setminus B, C \setminus A$ 和 "not" 有關, 我們要用 contradiction method. 即假設 $x \in A$, 但 $x \notin B$, 推得矛盾. 因 $A \subseteq C$ 由 $x \in A$ 可得 $x \in C$, 但又假設 $x \notin B$, 故得 $x \in C \setminus B$. 因此由前提 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$, 得知 $x \in C \setminus A$, 亦即 $x \in C$ 且 $x \notin A$. 此與當初假設 $x \in A$ 相矛盾. 故知當 $x \in A$ 時不可能會 $x \notin B$, 得證 $A \subseteq B$. □

Question 3.10. 真的需要 $A \subseteq C$ 這個假設才能確定 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ 嗎? 若沒有 $A \subseteq C$ 這個假設, 你能舉反例嗎?

特別的當 $C = X$ 為宇集時, 自然有 $A \subseteq C = X$, 故套用到 Proposition 3.2.9, 我們得 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(X \setminus B) \subseteq (X \setminus A)$. 因此有以下之結果.

Corollary 3.2.10. 假設 A,B 為 *sets.* 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $B^c \subseteq A^c$.

從 Definition 3.2.7 我們可以看出 set difference 和邏輯的 "not" 有關, 所以我們也可推導出 set difference 以及交集, 聯集間的關係.

Proposition 3.2.11. 假設 A,B,C 為 *sets,* 我們有以下的性質.

(1) $(C \setminus (C \setminus A)) = (C \cap A)$. 特別的, 我們有 $(A^c)^c = A$.

(2) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. 特別的, 我們有 $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$.

(3) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. 特別的, 我們有 $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$.

Proof. 這些性質都可以利用前面邏輯相關的 equivalence 推導, 不過我們仍用一些集合的性質處理.

(1): 首先依定義若 $x \in C \setminus (C \setminus A)$ 表示 $x \in C$ 且 $x \notin C \setminus A$. 此時若 $x \notin A$, 表示 $x \in C \setminus A$ (因已知 $x \in C$), 而造成與 $x \notin C \setminus A$ 之矛盾, 故知 $x \in A$. 我們證明了若 $x \in (C \setminus (C \setminus A))$, 則 $x \in C$ 且 $X \in A$ (即 $x \in C \cap A$). 得證 $(C \setminus (C \setminus A)) \subseteq (C \cap A)$. 反之, 若 $x \in C \cap A$, 因此時 $x \in C$, 我們只要證明 $x \notin (C \setminus A)$, 便可得 $x \in C \setminus (C \setminus A)$. 然而若 $x \in (C \setminus A)$ 表示 $x \in C$ 且 $x \notin A$, 此

與當初假設 $x \in C \cap A$ 相矛盾, 故得 $x \notin (C \setminus A)$. 我們證得了 $(C \cap A) \subseteq (C \setminus (C \setminus A))$, 因此得證 $(C \setminus (C \setminus A)) = (C \cap A)$.

現考慮 $C = X$ 為宇集的情況, 我們有 $X \setminus A = A^c$, 故 $X \setminus (X \setminus A) = X \setminus A^c = (A^c)^c$. 然而 $X \cap A = A$, 故得證 $(A^c)^c = A$.

(2): 由於 $(A \cap B) \subseteq A$, 故由 Proposition 3.2.9 知 $(C \setminus A) \subseteq (C \setminus (A \cap B))$. 同理由 $(A \cap B) \subseteq B$ 得 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus (A \cap B))$. 故由 Corollary 3.2.4 (2) 得 $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \subseteq C \setminus (A \cap B)$. 另一方面, 若 $x \in C \setminus (A \cap B)$, 表示 $x \in C$ 且 $x \notin A \cap B$. 此時若 $x \notin A$, 則表示 $x \in C \setminus A$, 得 $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. 而若 $x \in A$, 則必 $x \notin B$, 否則 $x \in B$ 會造成 $x \in A$ 且 $x \in B$, 即 $x \in A \cap B$ 之矛盾. 故此時 $x \in C \setminus B$, 也滿足 $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. 得證 $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

現考慮 $C = X$ 的情況, 由 $X \setminus A = A^c$, $X \setminus B = B^c$ 以及 $X \setminus (A \cap B) = (A \cap B)^c$ 我們馬上得知 $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$.

(3): 利用 (2) 的結果我們有 $(A^c \cap B^c)^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)$, 再利用 (1), 得 $(A^c \cap B^c)^c = (A \cup B)$. 取 complement 並再次利用 (1) 得證 $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$. 現因

$$C \setminus (A \cup B) = C \cap (A \cup B)^c = C \cap (A^c \cap B^c) \quad \text{and} \quad (C \setminus A) \cap (C \setminus B) = (C \cap A^c) \cap (C \cap B^c),$$

由交集本身的結合律知 $C \cap (A^c \cap B^c) = (C \cap A^c) \cap (C \cap B^c)$, 故得證

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

□

Question 3.11. 試利用 *Proposition 3.2.11 (2)* 證明 $C \setminus A = C \setminus (C \cap A)$. 依此並利用 *Proposition 3.2.9* 證明 $(C \cap A) \subseteq (C \cap B)$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

其實這些集合 operations 之間的關係與性質, 都可以直接各邊取一元素, 利用第一章介紹邏輯的 connectives 的性質得到集合包含關係, 最後證得兩邊集合相等. 另一方面我們也可套用這一章中所介紹各集合的 operations 的性質推導. 這兩種方法並無好壞之分, 雖然有時直接套用集合 operations 的性質推導很快速, 但它並非萬能. 從上面幾個定理的證明, 大家能看出, 當我們無法用集合性質推導時, 便會回歸到利用元素的原始定義推導. 在這裡我們並不是鼓勵大家用背誦的方式記憶這麼多的性質, 而是希望大家能夠學習如何利用一些已知的性質推導出新的定理. 最後我們再看一個例子.

Example 3.2.12. 假設 A, B, C 為集合且 $B^c \subseteq A$, 我們要證明 $((C \setminus A) \cup B) = B$.

方法一: 我們用元素的方法處理. 首先已知 $B \subseteq ((C \setminus A) \cup B)$, 故要證明等式成立只要證明 $((C \setminus A) \cup B) \subseteq B$. 現假設 $x \in ((C \setminus A) \cup B)$, 我們要證明 $x \in B$. 然而 $x \in ((C \setminus A) \cup B)$ 表示 $x \in C \setminus A$ 或 $x \in B$. 如果 $x \in B$, 則證明結束, 所以我們僅要討論 $x \in C \setminus A$ 的情形, 即 $x \in C$ 且 $x \notin A$. 因為無法直接證明 $x \in B$, 所以我們可以考慮反證法, 即假設 $x \notin B$ 而得到矛盾. 現若 $x \notin B$, 表示 $x \in B^c$, 故由 $B^c \subseteq A$ 的假設得 $x \in A$. 此與 $x \notin A$ 相矛盾, 故知 $x \in B$. 得證 $((C \setminus A) \cup B) \subseteq B$.

方法二: 我們也可完全用前面證得的性質處理. 首先看到等式左右兩邊都有 B, 所以我們可以利用 Proposition 3.2.5. 也就是說若能證明 $(C \setminus A) \subseteq B$, 則可得證 $((C \setminus A) \cup B) = B$.

如何證明 $(C\setminus A)\subseteq B$ 呢? 我們應可看出這一定和 $B^c\subseteq A$ 有關. 由於 $C\setminus A=C\cap A^c$, 所以我們可以利用 Corollary 3.2.10 將 $B^c\subseteq A$ 換成 $A^c\subseteq (B^c)^c$, 再利用 Proposition 3.2.11 (1) 得 $A^c\subseteq B$. 此時我們應很清楚看出

$$(C\setminus A)=(C\cap A^c)\subseteq (C\cap B)\subseteq B.$$

3.3. Indexed Family

在前一節中, 我們談的交集或聯集, 是將其視為兩個集合間的 operation. 不過當我們知道交集和聯集有所謂的結合律後, 我們便可以談論多個集合的聯集與交集了. 這一節中, 我們藉由適當的符號與定義的推廣, 將探討任意多個集合的聯集與交集問題. 大致上之前談的兩個集合的交集與聯集的性質, 都可以推廣到更一般的情形. 不過處理無限多個集合的情況, 有些地方可能和有限的情況稍有不同, 要特別留意.

當我們談論有限多個集合的交集和聯集時, 如果集合個數不多, 例如 5 個集合 A,B,C,D,E 的交集, 我們直接用 $A\cap B\cap C\cap D\cap E$ 來表示. 這裡我們都可以不用括弧區分到底哪兩個集合先交集後再和其他的集合做交集, 因為交集有結合律. 我們也不必擔心交集的順序, 因為交集有交換性. 同樣的對於聯集也是如此. 當集合的個數太多時, 像前面這樣一一列出就不切實際了. 遇到這種情形, 我們可以把要處理的集合一一編號, 例如有 100 個集合, 我們就編成 $A_1,A_2,\ldots,A_{100}$ (當然了, 這些 A_i 是甚麼應說明清楚). 然後這些集合的交集與聯集我們便像處理加法的 “summation” 符號, 將這些集合的交集與聯集分別用 $\bigcap\limits_{i=1}^{100}A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{100}A_i$ 來表示. 例如若 $A_i=[i-1,i]$ (即介於 $i-1$ 和 i 之間的實數), 則 $\bigcap\limits_{i=1}^{100}A_i=\emptyset$, $\bigcup\limits_{i=1}^{100}A_i=[0,100]$. 如果有無窮多集合怎麼辦? 像前面的例子, 如果對所有的自然數 $i\in\mathbb{N}$, A_i 皆有定義, 我們可以考慮對所有的 A_i 的交集和聯集. 這時候我們一般可以學無窮級數的方法, 將這些交集和聯集分別表示成 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 當然了, 這樣的符號底下表示的是 i 從哪一個數開始, 上面表示的是到哪一個為止, 所以我們要考慮 A_5, A_6, A_7, A_8 的交集和聯集就可以分別用 $\bigcap\limits_{i=5}^{8}A_i$, $\bigcup\limits_{i=5}^{8}A_i$ 來表示. 因此一般若要談 i 從 m 到 n 的 A_i 之交集與聯集, 我們便分別用 $\bigcap\limits_{i=m}^{n}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{n}A_i$ 來表示. 而要表達所有 i 大於等於 m 的 A_i 之交集與聯集, 我們便分別用 $\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$ 來表示. 這裡要注意, 很多同學會誤以為 $\bigcap\limits_{i=m}^{\infty}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}A_i$ 是 $\bigcap\limits_{i=m}^{n}A_i$, $\bigcup\limits_{i=m}^{n}A_i$ 當 n 趨近於 ∞ 的極限. 這個說法是有問題的, 因為我們從未定義過“集合的極限”.

不過這些符號仍不夠我們的需求. 有時我們要探討的集合, 它們的個數是不能像整數一樣一個一個數的. 例如實數, 就無法一個一個數. 所以若我們談的集合和實數有關, 如 $(-r,r)$ 其中 $r>0$, 這樣的區間, 要如何表達所有這樣的區間的交集與聯集呢? 於是乎, 我們引進了 index set 的概念. 所謂 *index set* 就是你要用來“編足碼”的東西所成的集合. 例如前面 $A_i=[i-1,i]$ 的例子, 我們考慮的 i 是所有的自然數 $\mathbb{N}$, 所以此時 $\mathbb{N}$ 便是我們的 index set. 而若要探討 $[-r,r]$ 的情形, 我們可以用正實數 $\mathbb{R}^+$ 為我們的 index set, 將要考慮的區間編

碼成 $A_r=[-r,r]$. 這樣將所有被編碼好的集合 $A_r, r\in\mathbb{R}^+$ 收集在一起, 便是所謂的 *indexed family* 了. 所以一般來說, 我們要先說好 index set 為何. 接下來要說明要探討的集合如何用 index set 裡的元素編碼, 這樣才能形成一個 indexed family. 也就是說若 I 為 index set, 我們必須說明 A_i 是甚麼, 這樣 $\{A_i, i\in I\}$ 便會是一個 indexed family.

接下來, 我們便是要定義一個 indexed family 裡的集合其交集與聯集. 注意, 即使只有有限個集合, 我們仍可將其視為 indexed family. 例如兩個集合 A,B, 我們仍可將其是為 index set 為 $I=\{1,2\}$ 的 indexed family, 其中 $A_1=A$, $A_2=B$. 所以我們定義 index family 的交集與聯集需與有限集合的交集與聯集一致. 當我們有兩個集合 A,B 時, 要求交集的元素必須在每一個集合中; 而聯集裡的元素需在 A,B 某一個中. 所以我們有以下的定義.

Definition 3.3.1. 假設 I 為 index set, 而 $\{A_i, i\in I\}$, 為以 I 為 index set 的 indexed family. 定義此 indexed family 的 intersection 為

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x: x\in A_i,\ \forall i\in I\}.$$

定義此 indexed family 的 union 為

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x: x\in A_i,\ \exists i\in I\}.$$

利用此定義, 我們看以下的例子.

Example 3.3.2. 考慮 index set I 為大於 1 的整數. 對任意 $i\in I$, 令 $A_i=\{m/i: m\in\mathbb{Z}\}$. 我們要證明

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\mathbb{Z},\quad \bigcup_{i\in I}A_i=\mathbb{Q}.$$

首先, 任意 $n\in\mathbb{Z}$, 我們都可以寫成 $n=ni/i$. 由於 $ni\in\mathbb{Z}$, 故得 $n\in A_i, \forall i\in I$. 證得了 $\mathbb{Z}\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i$. 另一方面, 若 $x\in\bigcap_{i\in I}A_i$, 表示對任意 $i\in I$ 皆有 $x\in A_i$. 現由於 $x\in A_2$ 以及 $x\in A_3$, 我們有 $x=m/2$ 且 $x=m'/3$, 其中 $m,m'\in\mathbb{Z}$. 然而此即表示 $3m=2m'$, 故知 $3m$ 必為偶數. 因而得知 m 為偶數 $2n$, 其中 $n\in\mathbb{Z}$. 代回得 $x=m/2=n\in\mathbb{Z}$. 得證 $\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq\mathbb{Z}$, 故 $\bigcap_{i\in I}A_i=\mathbb{Z}$.

現若 $x\in\mathbb{Q}$, 依有理數之定義, x 可寫成 m/n, 其中 $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$. 現若 $n=1$, 即 $x=m\in\mathbb{Z}$. 我們可以將 x 寫成 $x=2m/2$, 知此時 $x\in A_2$. 而若 $n\geq 2$, 表示 $n\in I$, 故此時 $x\in A_n$. 得證 $\mathbb{Q}\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$. 另一方面, 若 $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$, 表示存在 $n\in I$, 使得 $x\in A_n$. 故依定義得 $x=m/n$, 其中 $m\in\mathbb{Z}$. 此即表示 $x\in\mathbb{Q}$, 得證 $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq\mathbb{Q}$, 故 $\bigcup_{i\in I}A_i=\mathbb{Q}$.

Question 3.12. 令 A_i 如 *Example 3.3.2* 所設. 利用當 $m\in\mathbb{Z}$ 時, 若 p,q 為兩互質整數且 p 整除 mq, 則 p 整除 m 之事實, 證明若 p,q 為兩互質整數, 則 $A_p\cap A_q=\mathbb{Z}$. 依此證明當 $m\in\mathbb{N}$, $\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i=\mathbb{Z}$.

Question 3.13. 令 A_i 如 *Example 3.3.2* 所設, 證明當 $m \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i = \mathbb{Q}$. 是否可找到兩正整數 $m < n$ 使得 $\bigcap_{i=m}^{n} A_i = \mathbb{Q}$?

現在我們探討一些有關兩集合的交集與聯集的性質, 是否可以推廣到更一般 indexed family 的情形. 首先 Proposition 3.2.3 是可以推廣的.

Proposition 3.3.3. 假設 $\{A_i, i \in I\}$, $\{B_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的兩組 *indexed family.* 若對於所有 $i \in I$ 皆有 $A_i \subseteq B_i$, 則

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i \quad \text{and} \quad \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Proof. 設 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 表示對所有 $i \in I$, 皆有 $x \in A_i$, 故由 $A_i \subseteq B_i$, 得 $x \in B_i$. 因為這是對任意的 $i \in I$ 皆成立, 故得 $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$. 得證 $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$.

現若 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 表示存在 $i \in I$ 使得 $x \in A_i$, 故由 $A_i \subseteq B_i$, 得 $x \in B_i$. 此即表示 $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$, 得證 $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$. □

很容易知道, 若對於任意 $i \in I$, 皆有 $A_i = A$, 則 $\bigcap_{i \in I} A_i = A$ 且 $\bigcup_{i \in I} A_i = A$. 所以我們套用 Proposition 3.3.3 有以下 Corollary 3.2.4 的推廣.

Corollary 3.3.4. 假設 A, B 為 *set* 且 $\{A_i, i \in I\}$, $\{B_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family.*

(1) 若對於所有 $i \in I$ 皆有 $A \subseteq A_i$, 則 $A \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

(2) 若對於所有 $i \in I$ 皆有 $B_i \subseteq B$, 則 $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq B$.

假設 A_i 是以自然數 $\mathbb{N}$ 為 index set 的 indexed family 且滿足 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$ (即 $A_{i+1} \subseteq A_i, \forall i \in \mathbb{N}$). 對於任意 $n \in \mathbb{N}$, 因 $A_n \subseteq A_i, \forall i \leq n$, 由 Corollary 3.3.4, 我們有 $A_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. 另一方面, 我們又有 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_n$, 故此時可得 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n$. 所以, 此時若已知對任意 $i \in \mathbb{N}$, 皆有 A_i 不為空集合, 則 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 必不為空集合. 不過在當考慮無窮多個集合的交集時, 就有可能變空集合了. 我們有以下的例子.

Example 3.3.5. 我們要舉例說明有可能一個以自然數 $\mathbb{N}$ 為 index set 的 indexed family $\{A_i, i \in I\}$, 滿足對所有 $i \in \mathbb{N}$ 皆有 $A_{i+1} \subseteq A_i$ 且 A_i 不為空集合, 但 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

事實上對所有 $i \in \mathbb{N}$ 考慮 A_i 為開區間 $(0,1/i)$. 此時 A_i 當然滿足 $A_i \neq \emptyset$ 且 $A_{i+1} \subseteq A_i$. 但 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. 這是因為若 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 首先必有 $x > 0$. 此時考慮 $n \in \mathbb{N}$ 滿足 $n > 1/x$. 我們得 $x > 1/n$, 即 $x \notin (0,1/n) = A_n$. 此與 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 相矛盾, 得證 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

從上面這個例子我們知道, 一些在有限多個集合的交集或聯集會對的情形, 在無窮多個集合的時候有可能是錯的, 所以還是要多加留意.

關於交集與聯集分配律的性質, 我們有以下 Proposition 3.2.6 的推廣.

Proposition 3.3.6. 假設 B 為 *set*, 且 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family.* 則

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B) \quad \text{and} \quad (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B).$$

Proof. 由於對所有 $k \in I$ 皆有 $(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq (A_k \cup B)$ 且 $B \subseteq (A_k \cup B)$, 由 Corollary 3.2.4 (2) 知 $((\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B) \subseteq (A_k \cup B)$. 因為這是對任意 $k \in I$ 皆對, 故由 Corollary 3.3.4 (1) 知

$$((\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B) \subseteq \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B).$$

另一方面, 若 $x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$, 則對所有 $i \in I$, 皆有 $x \in A_i$ 或 $x \in B$. 我們分 $x \in B$ 以及 $x \notin B$ 兩種情況來討論. 若 $x \in B$, 則自然有 $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$. 而若 $x \notin B$, 則知 $x \in A_i$ 且由於這是對所有 $i \in I$ 皆成立, 故得 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, 因此 $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$. 得證 $\bigcap_{i \in I}(A_i \cup B) \subseteq ((\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B)$, 故

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B).$$

同理, 對所有 $k \in I$ 皆有 $(A_k \cap B) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)$ 且 $(A_k \cap B) \subseteq B$, 由 Corollary 3.2.4 (1) 知 $(A_k \cap B) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$. 因為這是對任意 $k \in I$ 皆對, 故由 Corollary 3.3.4 (2) 知

$$\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B) \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B.$$

另一方面, 若 $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$, 表示 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ 且 $x \in B$. 因此存在 $i \in I$, 使得 $x \in A_i$ 且 $x \in B$. 亦即存在 $i \in I$ 使得 $x \in A_i \cap B$. 故知此時 $x \in \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)$, 得證 $((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B) \subseteq \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)$, 故

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B).$$

$\square$

Question 3.14. A_i, B_i, $i \in I$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family.* 是否

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B_i) \quad \text{and} \quad (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B_i)?$$

最後我們推廣有關於有限集合差集的 DeMorgan's laws (Proposition 3.2.11 (2)(3)).

Proposition 3.3.7. 假設 C 為 *sets* 且 $\{A_i, i\in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family,* 我們有以下的性質.

(1) $C\setminus(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(C\setminus A_i)$. 特別的, 我們有 $(\bigcap_{i\in I}A_i)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c$.

(2) $C\setminus(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(C\setminus A_i)$. 特別的, 我們有 $(\bigcup_{i\in I}A_i)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c$.

Proof. (1): 由於對所有 $k\in I$, $\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq A_k$, 故由 Proposition 3.2.9 知 $(C\setminus A_k)\subseteq(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i)$. 故由 Corollary 3.3.4 (2) 得 $\bigcup_{i\in I}(C\setminus A_i)\subseteq(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i)$. 另一方面, 若 $x\in C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i$, 表示 $x\in C$ 且 $x\notin\bigcap_{i\in I}A_i$, 亦即 x 不會屬於每一個 A_i. 因此存在 $i\in I$ 使得 $x\notin A_i$, 故由 $x\in C$ 得 $x\in C\setminus A_i$. 得證 $x\in\bigcup_{i\in I}(C\setminus A_i)$, 故 $(C\setminus\bigcap_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}(C\setminus A_i)$.

現考慮 $C=X$ 的情況, 由 $X\setminus A_i=A_i^c$ 以及 $X\setminus(\bigcap_{i\in I}A_i)=(\bigcap_{i\in I}A_i)^c$ 我們馬上得知

$$(\bigcap_{i\in I}A_i)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c.$$

(2): 利用 (1) 的結果我們有 $(\bigcap_{i\in I}A_i^c)^c=\bigcup_{i\in I}(A_i^c)^c$, 再利用 Proposition 3.2.11 (1), 得 $(\bigcap_{i\in I}A_i^c)^c=\bigcup_{i\in I}A_i$. 取 complement 並再次利用 Proposition 3.2.11 (1) 得證 $(\bigcup_{i\in I}A_i)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c$. 現因

$$C\setminus(\bigcup_{i\in I}A_i)=C\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)^c=C\cap(\bigcap_{i\in I}A_i^c)\quad\text{and}\quad\bigcap_{i\in I}(C\setminus A_i)=\bigcap_{i\in I}(C\cap A_i^c),$$

由交集本身的結合律與交換律知 $C\cap(\bigcap_{i\in I}A_i^c)=\bigcap_{i\in I}(C\cap A_i^c)$, 故得證

$$C\setminus(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(C\setminus A_i).$$

□

Question 3.15. 假設 C 為 *sets* 且 $\{A_i, i\in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family.* 試問 $(\bigcap_{i\in I}A_i)\setminus C$ 會等於 $\bigcap_{i\in I}(A_i\setminus C)$ 或是 $\bigcup_{i\in I}(A_i\setminus C)$, 還是都不對? 而 $(\bigcup_{i\in I}A_i)\setminus C$ 會等於甚麼?

3.4. Power Set and Cartesian Product

前面介紹的幾個集合的運算 (交集, 聯集和差集) 在作用後所得的集合仍在宇集中, 接著要介紹的這兩種運算在作用後所得的集合很可能會不在原先的宇集中 (當然此時要擴大我們的宇集), 這一點要特別留意.

3.4.1. Power Set. 首先我們定義 power set.

Definition 3.4.1. 假設 A 為 set. 我們定義 A 的 *power set* 為 A 的 subsets 所成的集合, 用 $\mathscr{P}(A)$ 來表示. 依定義我們有

$$\mathscr{P}(A) = \{S : S \subseteq A\}.$$

由於對任意的 set A, 皆有 $\emptyset \subseteq A$ 以及 $A \subseteq A$, 我們得 $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ 且 $A \in \mathscr{P}(A)$. 最特別的是, 因 $\emptyset$ 包含於任何的集合, 故我們仍有 $\emptyset \subseteq \mathscr{P}(A)$. 也就是我們會同時有 $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ 且 $\emptyset \subseteq \mathscr{P}(A)$ 的情形發生. 另外若 $a \in A$, 表示 $\{a\} \subseteq A$, 故知 $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$. 原來的 set 和其 power set 中“屬於”和“包含於”關係的轉變, 千萬不要混淆. 我們看以下的例子.

Example 3.4.2. 由於 $\emptyset$ 只有自己一個子集合, 故得 $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

考慮 $A = \{1,2,3\}$, 由前已知 $\emptyset$, A, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ 皆在 $\mathscr{P}(A)$ 中. 又因 $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ 皆包含於 A, 故得

$$\mathscr{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

當一個集合 A 僅有有限多個元素時, 我們稱之為 *finite set.* 此時我們用 $\#(A)$ 來表示 A 的元素個數. 例如在上面 Example 3.4.2 中 $\#(A) = 3$, 此時我們發現 $\#(\mathscr{P}(A)) = 2^3 = 8$. 一般的 finite set, 我們都可以由其元素個數, 得到知道它的 power set 的元素個數.

Proposition 3.4.3. 假設 A 為 *finite set* 且 $\#(A) = n$. 則 $\#(\mathscr{P}(A)) = 2^n$.

Proof. 我們可以用排列組合的方法得到 $\#(\mathscr{P}(A)) = 2^n$. 不過這不是本門課所要談論的技巧, 我們用數學歸納法證明. 我們對 A 的元素個數 $\#(A)$ 做數學歸納法. 當 $\#(A) = 0$ 時, 表示 A 沒有任何元素, 即 $A = \emptyset$. 由 Example 3.4.2, 我們知此時 $\#(A) = 1 = 2^0$. 而當 $\#(A) = 1$ 時, 表示 A 僅有一元素, 設其為 a, 即 $A = \{a\}$. 此時我們有 $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, 故得 $\#(A) = 2 = a^1$. 證得 $n = 0,1$ 時成立.

現假設當集合的個數為 k 時成立. 考慮 $\#(A) = k+1$ 的情形, 假設 $A = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$. 此時令 $A' = A \setminus \{a_{k+1}\}$. 我們有 $\#(A') = k$, 故由歸納法之假設得 $\mathscr{P}(A') = 2^k$, 亦即 A' 共有 2^k 個元素. 現因 $A' \subset A$, A' 的 subset 必為 A 的 subset. 故知 $\mathscr{P}(A)$ 至少有 2^k 個元素. 然而 A 中有 subset 是不包含於 A' 的, 就是那些含有 a_{k+1} 的 subset. 若 S 為這樣的 subset, 即 $A_{k+1} \in S$. 此時令 $S' = S \setminus \{a_{k+1}\}$, 則 $S' \subseteq A'$. 反之, 若 $S' \subseteq A'$, 則令 $S = S' \cup \{a_{k+1}\}$, 我們會得到 S 是 A 的 subset, 但不是 A' 的 subset. 換言之, A 的 subset, 要不然就是 A' 的 subset, 要不然就是將某個 A' 的 subset 聯集 $\{a_{k+1}\}$ 而得. 故得 A 的 subset 的個數為 $2^k + 2^k = 2^{k+1}$, 證得 $\#(\mathscr{P}(A)) = 2^{k+1}$. 故由數學歸納法知, 若 $\#(A) = n$, 則 $\#(\mathscr{P}(A)) = 2^n$. $\square$

接下來我們要談論 power set 和原來的 set 之間的關係. 由於這些關係仍和集合的包含關係有關, 我們只要能掌握 power set 的元素即可. 依 power set 的定義, 若 A 為 set, 則 $S \in \mathscr{P}(A)$ 若且唯若 $S \subseteq A$. 利用這個看法, 我們可以很容易地得到一些有關 power set 的性質. 首先我們來看, power set 事實上是會保持包含關係的.

Proposition 3.4.4. 假設 A, B 為 *sets.* 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

Proof. ($\Rightarrow$): 假設 $A \subseteq B$. 若 $S \in \mathscr{P}(A)$, 表示 $S \subseteq A$. 故由 $A \subseteq B$ 得 $S \subseteq B$, 亦即 $S \in \mathscr{P}(B)$. 得證 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$.

($\Rightarrow$): 假設 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$. 由於 $A \in \mathscr{P}(A)$, 故由 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$, 得 $A \in \mathscr{P}(B)$. 依 power set 之定義, 此即表示 $A \subseteq B$. □

Question 3.16. 假設 A,B 為 *sets.* 試問 $A \subset B$ 若且唯若 $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$ 是否正確?

Power set 也保持交集的運算, 也就是說我們有以下的性質.

Proposition 3.4.5. 假設 A,B 為 *sets.* 則 $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Proof. 因 $(A \cap B) \subseteq A$ 且 $(A \cap B) \subseteq B$ 由 Proposition 3.4.4 我們有 $\mathscr{P}(A \cap B) \subseteq \mathscr{P}(A)$ 且 $\mathscr{P}(A \cap B) \subseteq \mathscr{P}(B)$. 故由 Corollary 3.2.4 知 $\mathscr{P}(A \cap B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

另一方面, 若 $S \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ 表示 $S \in \mathscr{P}(A)$ 且 $S \in \mathscr{P}(B)$, 亦即 $S \subseteq A$ 且 $S \subseteq B$. 故再由 Corollary 3.2.4 知 $S \subseteq (A \cap B)$, 也就是說 $S \in \mathscr{P}(A \cap B)$. 得證 $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cap B)$, 故 $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. □

Question 3.17. 假設 $\{A_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family.* 試問 $\mathscr{P}(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)$ 是否等於 $\bigcap\limits_{i \in I} \mathscr{P}(A_i)$?

Power set 一般來說並不會保持聯集. 雖然我們有 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ (這是因為 $A \subseteq (A \cup B)$ 且 $B \subseteq (A \cup B)$ 所以由 Proposition 3.4.4 我們有 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ 且 $\mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$), 但是一般來說 $\mathscr{P}(A \cup B) \subseteq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$ 卻是不正確的. 這是因為若 $S \in \mathscr{P}(A \cup B)$ 表示 $S \subseteq (A \cup B)$, 但這並不一定保證 $S \subseteq A$ 或 $S \subseteq B$. 例如當 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, 我們有 $S = \{1,2\} \subseteq A \cup B$, 但 $S \not\subseteq A$ 且 $S \not\subseteq B$. 事實上此時 $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}, \mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, 故有 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. 但是 $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. 故此時 $\mathscr{P}(A \cup B) \neq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$, 即 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$.

只有在特殊情況才有可能 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$, 也就是在 $A \cup B$ 的子集合都會是 A 的子集合或 B 的子集合這種情形才會對. 現如果 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$, 此時我們分別有 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ 或 $\mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A)$. 又此時分別有 $(A \cup B) = B$ 或 $(A \cup B) = A$, 自然得 $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$. 反之, 若 $A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$ (注意, 此即 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ 的相反), 則必存在 $a \in A \setminus B$ 以及 $b \in B \setminus A$. 此時考慮 $S = \{a,b\}$, 則有 $S \subseteq A \cup B$ 但 $S \not\subseteq A$ 且 $S \not\subseteq B$, 亦即 $S \in \mathscr{P}(A \cup B)$ 但 $S \notin \mathscr{P}(A)$ 且 $S \notin \mathscr{P}(B)$, 故 $S \notin (\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B))$. 得證在這情況下 $\mathscr{P}(A \cup B) \neq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$. 我們有以下之結果.

Proposition 3.4.6. 假設 A,B 為 *sets.* 則

$$(\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)) \subseteq \mathscr{P}(A \cap B).$$

而 $(\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)) = \mathscr{P}(A \cap B)$ 若且唯若 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$.

在任何情況之下, Power set 都無法保持差集. 這是因為當 A,B 為 sets 時, 在任何情況之下皆有 $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$, $\emptyset \in \mathscr{P}(B)$. 因此會得到 $\emptyset \notin \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$. 然而 $\emptyset \in \mathscr{P}(A \setminus B)$, 故知

$(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))\neq\mathscr{P}(A\setminus B)$. 不過當 $S\neq\emptyset$ 時, 若 $S\in\mathscr{P}(A\setminus B)$, 表示 $S\subseteq(A\setminus B)$. 此時因 $(A\setminus B)\subseteq A$, 故得 $S\subseteq A$ (即 $S\in\mathscr{P}(A)$). 這時我們也會有 $S\not\subseteq B$ (即 $S\notin\mathscr{P}(B)$). 這是因為 S 假設為非空集合, 故存在 $x\in S$, 現若 $S\subseteq B$, 即表示 $x\in B$. 但又已知 $S\subseteq(A\setminus B)$, 表示 $x\in A\setminus B$, 亦即 $x\notin B$, 而造成矛盾. 故由此時 $S\in\mathscr{P}(A)$ 且 $S\notin\mathscr{P}(B)$ 得 $S\in\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)$. 我們證明了 $\mathscr{P}(A\setminus B)$ 中除了空集合以外, 其他的元素都會在 $\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)$ 中, 故得

$$(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})\subseteq(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)).$$

不過上面的包含關係的反向並不成立. 因為若 $S\in\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)$ 表示 $S\subseteq A$ 且 $S\not\subseteq B$. 但這不表示 $S\subseteq(A\setminus B)$. 例如若 $A\setminus B\neq\emptyset$ 且 $A\cap B\neq\emptyset$, 此時選 $a\in A\setminus B$ 及 $b\in A\cap B$ 且考慮 $S=\{a,b\}$. 則 $\{a,b\}\subseteq A$ 且 $\{a,b\}\not\subseteq B$ (即 $S\in\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)$), 但 $\{a,b\}\not\subseteq(A\setminus B)$ (即 $S\notin\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\}$). 故此時 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))\not\subseteq(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})$. 反之, 若 $A\setminus B=\emptyset$ 或 $A\cap B=\emptyset$, 則我們可得 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))\subseteq(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})$, 不過在證明之前我們需要一個 Lemma.

Lemma 3.4.7. 假設 A,B 為 *sets.*

(1) 若 $A\setminus B=\emptyset$ 則 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=\emptyset$.

(2) 若 $A\cap B=\emptyset$ 則 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})$.

Proof. (1): 由 $A\setminus B=\emptyset$, 可得 $A\subseteq B$. 否則 $A\not\subseteq B$, 表示存在 $a\in A$ 且 $a\notin B$, 造成 $a\in A\setminus B$ 之矛盾. 故由 Proposition 3.4.4 知, $\mathscr{P}(A)\subseteq\mathscr{P}(B)$. 得證 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=\emptyset$.

(2): 因為 $\emptyset\in\mathscr{P}(B)$, 故知 $\{\emptyset\}\subseteq\mathscr{P}(B)$. 由 Proposition 3.2.9 得 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))\subseteq(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})$. 另一方面, $S\in\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$ 表示 $S\in\mathscr{P}(A)$ 且 $S\notin\{\emptyset\}$, 亦即 $S\subseteq A$ 且 $S\neq\emptyset$. 故當 $A\cap B=\emptyset$ 時, 表示 $S\notin\mathscr{P}(B)$. 否則由 $S\in\mathscr{P}(B)$ 可得 $S\subseteq B$, 故加上 $S\subseteq A$ 依 Corollary 3.2.4(1) 會得到 $S\subseteq(A\cap B)=\emptyset$, 此與 $S\neq\emptyset$ 相矛盾. 所以當 $A\cap B=\emptyset$ 時, 我們由 $S\in\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\}$ 推得 $S\in\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)$, 亦即 $(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})\subseteq(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))$. 得證若 $A\cap B=\emptyset$ 則 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})$. □

Question 3.18. 假設 A,B 為 *sets.* 是否 $A\setminus B=\emptyset$ 若且唯若 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=\emptyset$? 是否 $A\cap B=\emptyset$ 若且唯若 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})$?

利用 Lemma 3.4.7, 我們有以下之結果.

Proposition 3.4.8. 假設 A,B 為 *sets.* 則

$$(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})\subseteq(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)).$$

而 $(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})=(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))$ 若且唯若 $A\setminus B=\emptyset$ 或 $A\cap B=\emptyset$.

Proof. 我們之前已證 $(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})\subseteq(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))$. 也證明了若 $A\setminus B\neq\emptyset$ 且 $A\cap B\neq\emptyset$ 則 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))\not\subseteq(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})$. 故知若 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})$ 則 $A\setminus B=\emptyset$ 或 $A\cap B=\emptyset$. 故僅剩證明另一方向, 即證明若 $A\setminus B=\emptyset$ 或 $A\cap B=\emptyset$ 則

$$(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})=(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)).$$

現假設 $A\setminus B=\emptyset$, 由 Lemma 3.4.7(1) 知此時 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=\emptyset$. 另一方面, 此時 $\mathscr{P}(A\setminus B)=\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$, 故

$$(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})=\{\emptyset\}\setminus\{\emptyset\}=\emptyset=(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)).$$

而若 $A\cap B=\emptyset$, 由 Lemma 3.4.7(2) 知此時 $(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B))=(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})$. 另一方面, 此時 $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)=A\setminus\emptyset=A$, 故

$$(\mathscr{P}(A\setminus B)\setminus\{\emptyset\})=(\mathscr{P}(A)\setminus\{\emptyset\})=(\mathscr{P}(A)\setminus\mathscr{P}(B)).$$

□

3.4.2. Cartesian Product. 我們曾強調對於集合我們是不考慮其元素的排列順序, 例如 $\{1,2\}$ 和 $\{2,1\}$ 是相同的集合. 不過若考慮集合 $S_1=\{\{1\},\{1,2\}\}$ 和 $S_2\{\{2\},\{1,2\}\}$, 很容易知道 $\{1\}\in S_1$ 且 $\{1\}\not\in S_2$, 所以我們知道 $S_1\neq S_2$. 這個方法, 幫助我們將 1, 2 這兩個元素做了排序. 因此我們定義以下的符號.

Definition 3.4.9. 假設 A,B 為 sets. 若 $a\in A, b\in B$, 我們定義 *ordered pair*

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

且令

$$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\},$$

稱之為 the *Cartesian product* of A and B.

所謂 ordered pair, 意指有序的數對, 也就是這裡的元素都是成對出現, 而且順序是有關的. 例如前面的例子, 我們有 $(1,2)=\{\{1\},\{1,2\}\}$, 而 $(2,1)=\{\{2\},\{1,2\}\}$, 故 $(1,2)\neq(2,1)$. 一般來說設 $a,a'\in A$, $b,b'\in B$. 若 $a=a'$, $b=b'$, 則依集合相等的定義, 我們有

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}=(a',b').$$

另一方面若 $(a,b)=(a',b')$ 表示 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}$. 現若 $a\neq b$, 表示 $\{a,b\}$ 中有兩個元素, 故若 $(a,b)=(a',b')$, 表示 $\{a',b'\}$ 必須亦為有兩個元素的集合 (否則 $\{\{a'\},\{a',b'\}\}$ 中沒有一個有兩元素的集合, 不可能等於 $\{\{a\},\{a,b\}\}$). 既然如此, 由集合相等之定義, 我們必有 $\{a\}=\{a'\}$ 以及 $\{a,b\}=\{a',b'\}$. 這告訴我們 $a=a'$ 且 $b=b'$. 而若 $\{a,b\}$ 中僅有一元素, 即 $a=b$. 此時依集合定義 $\{a,b\}=\{a\}$, 故

$$(a,b)=(a,a)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\}.$$

因此, 這時候要 $(a,b)=(a',b')$ 非得 $b'=a'=a$, 故此時依然有 $a=a'$ 且 $b=b'$. 我們證得了以下的結果.

Proposition 3.4.10. 假設 A,B 為 *sets*, 又設 $a,a'\in A$ 且 $b,b'\in B$ 則 $(a,b)=(a',b')$ 若且唯若 $a=a'$ 且 $b=b'$.

我們觀察一下, 當 $a \in A$, $b \in B$, $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 會是哪一個集合的元素. 首先由 $\{a,b\}$ 我們可以看出, 此集合應該和 $A \cup B$ 有關. 又 $\{a\}$, $\{a,b\}$ 為 $A \cup B$ 的 subset, 我們有 $\{a\}$ 和 $\{a,b\}$ 皆為 $\mathscr{P}(A \cup B)$ 的元素. 故 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 為 $\mathscr{P}(A \cup B)$ 的子集合, 得 $\{\{a\},\{a,b\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. 也就是說 (a,b) 為 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$ 中的元素. 從這裡知道將 (a,b) 考慮成 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 這樣複雜的集合, 以後處理問題很不方便. 不過 Proposition 3.4.10 告訴我們, 以後可以不去管 (a,b) 的原始定義. 直接將 (a,b) 看成是 $A \times B$ 中的一個元素, 我們可以直接利用 $(a,b) = (a',b')$ 來探討 $A \times B$ 這樣的集合的相關性質.

Example 3.4.11. (1) 假設 $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$. 則依定義我們可以將 $A \times B$ 寫成

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

另外依定義我們有 $A \times \{\emptyset\} = \{(a,\emptyset),(b,\emptyset)\}$.

(2) 考慮 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$. 雖然 S 為 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 subset, 但不存在 $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $S = A \times B$. 事實上, 若 $S = A \times B$, 由 $(1,0) \in S$, 我們得 $1 \in A$. 另外 $(0,1) \in S$, 我們得 $1 \in B$. 因此得 $(1,1) \in A \times B$. 然而 $1^2 + 1^2 = 2 > 1$, 得 $(1,1) \notin S$. 此與 $S = A \times B$ 的假設矛盾, 故得證不存在 $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $S = A \times B$.

要注意區分 $A \times \emptyset$ 和 $A \times \{\emptyset\}$ 之不同. 依定義 $(x,y) \in A \times \{\emptyset\}$ 表示 $x \in A$ 以及 $y \in \{\emptyset\}$, 故此時因 $\{\emptyset\}$ 是一個僅有一個元素 $\emptyset$ 的集合, 故 $y = \emptyset$. 然而 $(x,y) \in A \times \emptyset$ 表示 $x \in A$ 以及 $y \in \emptyset$, 不過不可能會有元素屬於 $\emptyset$, 故此處 y 並不存在. 所以依定義 $A \times \emptyset$ 中沒有任何元素, 故得 $A \times \emptyset = \emptyset$. 同理我們會有 $\emptyset \times B = \emptyset$. 事實上我們有以下的結果.

Proposition 3.4.12. 假設 A,B 為 *sets,* 則 $A \times B = \emptyset$ 若且唯若 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$.

Proof. 我們僅剩下證明若 $A \times B = \emptyset$, 則 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$. 利用 contrapositive method, 假設 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$. 此時存在 $a \in A$ 且 $b \in B$, 故存在 $(a,b) \in A \times B$. 得證 $A \times B \neq \emptyset$. □

當 A,B 為 finite sets 時, 我們可以如 Example 3.4.11 一一列出 $A \times B$ 中的元素. 當我們選定 $a \in A$ 後, 考慮 $(a,y) \in A \times B$. 由 Proposition 3.4.10 我們知, 當我們選 y 為 B 中的相異元素時, 所得的 (a,y) 就會不同. 也就是說此時 $A \times B$ 中為 (a,y) 這樣形式的元素共有 $\#(B)$ 個. 然而當 a 不同時這些元素亦皆不同, 故由排列組合中的乘法原理我們知 $A \times B$ 共會有 $\#(A) \times \#(B)$ 個元素, 因此有以下之定理.

Proposition 3.4.13. 假設 A,B 為 *finite sets.* 則 $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$.

因為 $\#(\emptyset) = 0$, 故由 Proposition 3.4.13 得 $\#(A \times \emptyset) = \#(A) \times \#(\emptyset) = 0$. 此結論和 Proposition 3.4.12 中 $A \times \emptyset = \emptyset$ 的結論一致.

接下來我們探討 Cartesian product 對集合包含關係的影響. 首先注意, 對於任意的 set A, 當 $B = \emptyset$ 時, 我們有 $A \times B = \emptyset$ 所以我們無法由 $A \times B$ 和 $A' \times B$ 來判斷 A,A' 之間的關係. 因此我們必須排除 $A \times B$ 其中 A,B 任一個是 $\emptyset$ 的情形. 我們有以下的結果.

Proposition 3.4.14. 假設 A,B,C,D 為 *sets* 且 $A \neq \emptyset$ 以及 $B \neq \emptyset$. 則 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$ 若且唯若 $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 假設 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$. 現任取 $(x,y)\in A\times B$, 表示 $x\in A$ 且 $y\in B$, 故由 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 得 $x\in C$ 且 $y\in D$. 因此依定義知 $(x,y)\in C\times D$, 得證 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$.

$(\Leftarrow)$: 假設 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$. 現任取 $x\in A$, 由於 $B\neq\emptyset$, 故存在 $b\in B$. 此時考慮 $(x,b)\in A\times B$. 利用 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$, 得 $(x,b)\in C\times D$. 因此依定義知 $x\in C$, 得證 $A\subseteq C$. 同理, 任取 $y\in B$, 由於 $A\neq\emptyset$, 故存在 $a\in A$. 此時考慮 $(a,y)\in A\times B$. 利用 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$, 得 $(a,y)\in C\times D$. 因此依定義知 $y\in D$, 得證 $B\subseteq D$. □

Question 3.19. *Proposition 3.4.14 的證明中, 哪一部分需要 $A\neq\emptyset$ 以及 $B\neq\emptyset$ 的假設? 又為何將 $A\subseteq C$ 和 $B\subseteq D$ 分開來證明?*

接下來我們看 Cartesian product 和 intersection 的關係.

Proposition 3.4.15. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(A\cap C)\times B=(A\times B)\cap(C\times B)\quad\text{and}\quad A\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(A\times D).$$

Proof. 因 $(A\cap C)\subseteq A$ 且 $(A\cap C)\subseteq C$ 由 Proposition 3.4.14 知 $((A\cap C)\times B)\subseteq(A\times B)$ 且 $((A\cap C)\times B)\subseteq(C\times B)$ (注意 Proposition 3.4.14 此部分不需非空集合的假設). 故由 Corollary 3.2.4(1) 得 $((A\cap C)\times B)\subseteq(A\times B)\cap(C\times B)$.

另一方面, 對任意 $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times B)$, 我們有 $(x,y)\in A\times B$ 且 $(x,y)\in C\times B$. 因此 $x\in A$ 且 $x\in C$ 以及 $y\in B$, 得 $x\in A\cap C$ 且 $y\in B$, 故知 $(x,y)\in(A\cap C)\times B$. 得證 $(A\times B)\cap(C\times B)\subseteq(A\cap C)\times B$, 因此證明了 $(A\cap C)\times B=(A\times B)\cap(C\times B)$. 同理可證 $A\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(A\times D)$. □

利用 Proposition 3.4.15 我們可以求 $(A\cap C)\times(B\cap D)$. 首先將 Proposition 3.4.15 中的 B 以 $B\cap D$ 取代, 得 $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times(B\cap D))\cap(C\times(B\cap D))$. 再由 $A\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(A\times D)$ 以及 $C\times(B\cap D)=(C\times B)\cap(C\times D)$, 我們得

$$(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(A\times D)\cap(C\times B)\cap(C\times D).\tag{3.3}$$

現若 $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$ 表示 $(x,y)\in A\times B$ (知 $x\in A$, $y\in B$) 且 $(x,y)\in C\times D$ (知 $x\in C$, $y\in D$), 故得 $(x,y)\in A\times D$ (因 $x\in A$, $y\in D$) 且 $(x,y)\in C\times B$ (因 $x\in C$, $y\in B$). 因此得 $(x,y)\in(A\times D)\cap(C\times B)$, 得證 $((A\times B)\cap(C\times D))\subseteq((A\times D)\cap(C\times B))$. 故由 Proposition 3.2.5 知式子 (3.3) 可化簡成

$$(A\cap C)\times(B\cap D)=((A\times B)\cap(C\times D))\cap((A\times D)\cap(C\times B))=(A\times B)\cap(C\times D).$$

我們有以下之結果.

Corollary 3.4.16. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times B)\cap(C\times D).$$

Question 3.20. 你能利用 *Corollary 3.4.16* 證明 $(A\cap C)\times(B\cap D)=(A\times D)\cap(C\times B)$ 嗎? 試不套用 *Corollary 3.4.16* 直接證明之.

一般來說, 我們會想知道一些集合的 Cartesian products 在經過 operations 後是否仍為 Cartesian product. 例如在交集的情形, 我們會想知道兩對集合的 Cartesian products 的交集是否可寫成一對集合的 Cartesian product. 也就是說 $(A\times B)\cap(C\times D)$ 是否仍可寫成一個 Cartesian product $S\times T$ 的形式. 由 Corollary 3.4.16 我們知道這個答案是肯定的. 只要令 $S=A\cap C$, $T=B\cap D$, 則 $(A\times B)\cap(C\times D)=S\times T$. 由此我們也知, 任意多對集合的 Cartesian products 的交集仍為 Cartesian product.

Question 3.21. 試證明 $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\times D)\cap(C\times B)$.

Question 3.22. 假設 $\{A_i, i\in I\}$, $\{B_i, i\in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family.* 試證明

$$\bigcap_{i\in I}(A_i\times B_i)=(\bigcap_{i\in I}A_i)\times(\bigcap_{i\in I}B_i).$$

對於 Cartesian product 和 union 也有和 Proposition 3.4.15 類似的關係.

Proposition 3.4.17. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(A\cup C)\times B=(A\times B)\cup(C\times B) \quad \text{and} \quad A\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D).$$

Proof. 因 $A\subseteq(A\cup C)$ 且 $C\subseteq(A\cup C)$ 由 Proposition 3.4.14 知 $(A\times B)\subseteq((A\cup C)\times B)$ 且 $(C\times B)\subseteq((A\cup C)\times B)$. 故由 Corollary 3.2.4(2) 得 $(A\times B)\cup(C\times B)\subseteq((A\cup C)\times B)$.

另一方面, 對任意 $(x,y)\in(A\cup C)\times B$, 我們有 $x\in A\cup C$ 以及 $y\in B$, 得 $x\in A$ 或 $x\in C$ 且 $y\in B$. 若 $x\in A$, 則由 $y\in B$ 得 $(x,y)\in A\times B$, 而若 $x\in C$, 則由 $y\in B$ 得 $(x,y)\in C\times B$. 故知 $(x,y)\in A\times B$ 或 $(x,y)\in C\times B$, 亦即 $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times B)$. 得證 $((A\cup C)\times B)\subseteq(A\times B)\cup(C\times B)$, 因此證明了 $(A\cup C)\times B=(A\times B)\cup(C\times B)$. 同理可證 $A\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D)$ □

利用 Proposition 3.4.17 我們可以求 $(A\cup C)\times(B\cup D)$. 首先將 Proposition 3.4.17 中的 B 以 $B\cup D$ 取代, 得 $(A\cup C)\times(B\cup D)=(A\times(B\cup D))\cup(C\times(B\cup D))$. 再由 $A\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D)$ 以及 $C\times(B\cup D)=(C\times B)\cup(C\times D)$, 我們得以下的結果.

Corollary 3.4.18. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(A\cup C)\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D)\cup(C\times B)\cup(C\times D).$$

注意 $(A\cup C)\times(B\cup D)$ 一般來說不會有類似 Corollary 3.4.16 中的性質. 也就是說一般的情形 $(A\cup C)\times(B\cup D)$ 是不會等於 $(A\times B)\cup(C\times D)$ 的. 這是因為一般來說 $A\times D$ 是不會包含於 $(A\times B)\cup(C\times D)$ (除非 $A\subseteq C$ 或 $D\subseteq B$). 所以我們只要考慮 $A\not\subseteq C$ 且 $D\not\subseteq B$, 就能找出反例. 例如當 A,D 皆不是 $\emptyset$ 但 $B=C=\emptyset$, 則 $(A\cup C)\times(B\cup D)=A\times D$ 不為 $\emptyset$ (參見 Proposition 3.4.12), 但 $(A\times B)\cup(C\times D)=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$. 故此時 $(A\cup C)\times(B\cup D)\neq(A\times B)\cup(C\times D)$.

Question 3.23. 試找另外的例子使得 $(A\cup C)\times(B\cup D)\neq(A\times B)\cup(C\times D)$.

我們也想知道是否兩對 Cartesian product 的聯集依然為 Cartesian product. 也就是說 $(A\times B)\cup(C\times D)$ 是否仍可寫成一個 Cartesian product $S\times T$ 的形式? 當然了若 A,B,C,D 中有任一個是 $\emptyset$, 則 $(A\times B)$ 或 $(C\times D)$ 中有一個會是 $\emptyset$, 所以這是對的. 除此之外, 由 Corollary

3.4.18 我們知道這是不一定對的. 因為如果存在 S,T 使得 $(A\times B)\cup(C\times D)=(S\times T)$ 表示對所有 $s\in S,t\in T$, 我們皆有 $(s,t)\in(A\times B)\cup(C\times D)$, 亦即 $s\in A$, $t\in B$ 或者 $s\in C$, $t\in D$. 這表示 s 一定要在 A 或 C 中且 t 一定要在 B 或 D 中, 得 $s\in A\cup C$ 且 $t\in B\cup D$. 知此時 $S\subseteq A\cup C$ 且 $T\subseteq B\cup D$. 另一方面對任意 $x\in A\cup C$, 我們分成 $x\in A$ 或 $x\in C$ 來討論. 若 $x\in A$, 我們任取 $b\in B$ (別忘了我們假設 $B\neq\emptyset$), 我們有 $(x,b)\in A\times B$, 故知 $(x,b)\in(A\times B)\cup(C\times D)=(S\times T)$ 得 $x\in S$. 同理若 $x\in C$, 由 $D\neq\emptyset$, 我們可得 $x\in S$. 得證 $A\cup C\subseteq S$, 我們證明了此時 $S=A\cup C$. 同理可證此時 $T=B\cup D$. 我們證明了當 A,B,C,D 皆不為 $\emptyset$ 時, 若 $(A\times B)\cup(C\times D)=(S\times T)$ 則 $S=A\cup C$ 且 $T=B\cup D$. 然而 Corollary 3.4.18 告訴我們 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ 要成立必須 $(A\times D)\cup(C\times B)\subseteq(A\times B)\cup(C\times D)$. 事實上若 $A\not\subseteq C$ 且 $D\not\subseteq B$, 則考慮 $a\in A\setminus C$ 以及 $d\in D\setminus B$. 我們得 $(a,d)\in A\times D$ 但 $(a,d)\notin A\times B$ 且 $(a,d)\notin C\times D$, 亦即 $(a,d)\notin(A\times B)\cup(C\times D)$. 此與 $(A\times D)\subseteq(A\times B)\cup(C\times D)$ 不合. 故知 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ 要成立, 必須 $A\subseteq C$ 或 $D\subseteq B$. 同理知若 $C\not\subseteq A$ 且 $B\not\subseteq D$, 則考慮 $(c,d)\in C\times D$, 其中 $c\in C\setminus A$ 且 $b\in B\setminus D$, 亦會造成與 $(C\times D)\subseteq(A\times B)\cup(C\times D)$ 不合. 所以 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ 要成立, 必須 $C\subseteq A$ 或 $B\subseteq D$ 亦成立. 我們有以下的結果.

Proposition 3.4.19. *假設 A,B,C,D 為 sets. 則存在 S,T 為 sets 滿足 $(A\times B)\cup(C\times D)=S\times T$ 若且唯若 A,B,C,D 滿足以下其中之一的條件:*

(1) A,B,C,D 中有一個為 $\emptyset$.

(2) $A=C$

(3) $B=D$

(4) $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$

(5) $C\subseteq A$ 且 $D\subseteq B$

Proof. $(\Rightarrow)$: 當 (1) 不成立時, 即 A,B,C,D 皆不是 $\emptyset$ 時, 前面已證此時存在 S,T 滿足 $(A\times B)\cup(C\times D)=S\times T$, 表示 $S=A\cup C$ 且 $T=B\cup D$. 而當 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$, 由前面論述我們知必須 $A\subseteq C$ 或 $D\subseteq B$ 以及 $C\subseteq A$ 或 $B\subseteq D$ 皆成立. 利用邏輯的表示法這表示 $\big((A\subseteq C)\vee(D\subseteq B)\big)\wedge\big((C\subseteq A)\vee(B\subseteq D)\big)$. 由 $\vee,\wedge$ 的分配性質 (式子 1.3), 我們知這等價於 $\big(((A\subseteq C)\vee(D\subseteq B))\wedge(C\subseteq A)\big)\vee\big(((A\subseteq C)\vee(D\subseteq B))\wedge(B\subseteq D)\big)$. 再利用一次分配律, 這又等價於

$$((A\subseteq C)\wedge(C\subseteq A))\vee((D\subseteq B)\wedge(C\subseteq A))\vee((A\subseteq C)\wedge(B\subseteq D))\vee((D\subseteq B)\wedge(B\subseteq D)).$$

又因 $(A\subseteq C)\wedge(C\subseteq A)$ 等價於 $A=C$, 而 $(D\subseteq B)\wedge(B\subseteq D)$ 等價於 $B=D$, 我們得證此時 (2), (3), (4), (5) 之一會成立.

$(\Leftarrow)$: 當 (1) 成立時, $(A\times B)$ 或 $(C\times D)$ 中有一個會是 $\emptyset$, 故此時存在 S,T 滿足 $(A\times B)\cup(C\times D)=S\times T$.

當 (2) 成立時由 Proposition 3.4.17 知

$$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\times B)\cup(A\times D)=A\times(B\cup D),$$

故取 $S=A, T=(B\cup D)$ 即可.

當 (3) 成立時由 Proposition 3.4.17 知

$$(A\times B)\cup(C\times D)=(A\times B)\cup(C\times B)=(A\cup C)\times B,$$

故取 $S=(A\cup C), T=B$ 即可.

當 (4) 成立時由 Proposition 3.4.14 知 $(A\times B)\subseteq(C\times D)$, 故 $(A\times B)\cup(C\times D)=(C\times D)$. 因此取 $S=C$, $T=D$ 即可.

當 (5) 成立時由 Proposition 3.4.14 知 $(C\times D)\subseteq(A\times B)$, 故 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\times B)$. 因此取 $S=A$, $T=B$ 即可. □

最後我們看 Cartesian product 和 set difference 之關係.

Proposition 3.4.20. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(C\setminus A)\times B=(C\times B)\setminus(A\times B)\quad \text{and}\quad A\times(D\setminus B)=(A\times D)\setminus(A\times B).$$

Proof. 對任意 $(x,y)\in(C\setminus A)\times B$, 我們有 $x\in C\setminus A$ 以及 $y\in B$. 亦即 $x\in C$ 且 $x\notin A$ 以及 $y\in B$. 此時我們知 $(x,y)\in C\times B$ 且 $(x,y)\notin A\times B$ (否則 $(x,y)\in A\times B$ 會導致 $x\in A$ 之矛盾). 故得 $(x,y)\in(C\times B)\setminus(A\times B)$, 證明了 $(C\setminus A)\times B\subseteq(C\times B)\setminus(A\times B)$.

另一方面, 對任意 $(x,y)\in(C\times B)\setminus(A\times B)$, 我們有 $(x,y)\in C\times B$ (得 $x\in C$, $y\in B$) 且 $(x,y)\notin A\times B$ (得 $x\notin A$ 或 $y\notin B$). 但由 $(x,y)\in C\times B$ 我們知 $y\in B$, 故由 $(x,y)\notin A\times B$ 知 $x\notin A$ (否則 $x\in A$ 加上 $y\in B$ 會造成 $(x,y)\in A\times B$ 之矛盾). 因此由 $x\in C$ 且 $x\notin A$ 以及 $y\in B$, 推得 $(x,y)\in(C\setminus A)\times B$, 證明了 $(C\times B)\setminus(A\times B)\subseteq(C\setminus A)\times B$. 得證 $(C\setminus A)\times B=(C\times B)\setminus(A\times B)$. 同理可得 $A\times(D\setminus B)=(A\times D)\setminus(A\times B)$. □

利用 Proposition 3.4.20 我們可以求 $(C\setminus A)\times(D\setminus B)$. 首先利用 Corollary 3.4.16 我們有

$$(C\setminus A)\times(D\setminus B)=((C\setminus A)\cap C)\times(D\cap(D\setminus B))=((C\setminus A)\times D)\cap(C\times(D\setminus B)).$$

再由 Proposition 3.4.20 我們有 $(C\setminus A)\times D=(C\times D)\setminus(A\times D)$ 以及 $C\times(D\setminus B)=(C\times D)\setminus(C\times B)$. 因此得

$$(C\setminus A)\times(D\setminus B)=((C\times D)\setminus(A\times D))\cap((C\times D)\setminus(C\times B)).$$

最後利用 Proposition 3.2.11(3), 我們有

$$((C\times D)\setminus(A\times D))\cap((C\times D)\setminus(C\times B))=(C\times D)\setminus\big((A\times D)\cup(C\times B)\big).$$

因此有以下的結果.

Corollary 3.4.21. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(C\setminus A)\times(D\setminus B)=((C\setminus A)\times D)\cap(C\times(D\setminus B))=(C\times D)\setminus\big((A\times D)\cup(C\times B)\big).$$

接著我們也探討是否兩對集合的 Cartesian product 的差集仍為 Cartesian product. 也就是說 $(C\times D)\setminus(A\times B)$ 是否仍能寫成 $S\times T$ 的形式? 很容易看出, 一般來說這也是不正確

的. 事實上, 我們有 $(C\times D)\setminus(A\times B)=(C\times D)\setminus((C\times D)\cap(A\times B))$ (參見 Question 3.11). 而由 Corollary 3.4.16, 我們有 $(C\times D)\cap(A\times B)=(C\cap A)\times(D\cap B)=(C\times B)\cap(A\times D)$. 故得

$$(C\times D)\setminus(A\times B)=(C\times D)\setminus((C\times B)\cap(A\times D)). \tag{3.4}$$

再由 Proposition 3.2.11(2) 知

$$(C\times D)\setminus((C\times B)\cap(A\times D))=((C\times D)\setminus(C\times B))\cup((C\times D)\setminus(A\times D)). \tag{3.5}$$

最後由 Proposition 3.4.20 知

$$(C\times D)\setminus(C\times B)=C\times(D\setminus B)\quad\text{and}\quad(C\times D)\setminus(A\times D)=(C\setminus A)\times D. \tag{3.6}$$

結合式子 (3.4), (3.5), (3.6) 我們得到以下的結果.

Corollary 3.4.22. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則

$$(C\times D)\setminus(A\times B)=(C\times(D\setminus B))\cup((C\setminus A)\times D).$$

請特別注意 Corollary 3.4.21 與 Corollary 3.4.22 之差異.

由 Corollary 3.4.22, 利用 Proposition 3.4.19 我們很容易判斷何時存在 S,T 使得 $S\times T=(C\times D)\setminus(A\times B)$ 了. 因為由 Proposition 3.4.19 我們知道 $(C\times(D\setminus B))\cup((C\setminus A)\times D)$ 可以寫成 $S\times T$ 形式, 若且唯若以下的情形發生: (1) $C,D,(D\setminus B),(C\setminus A)$ 其中有一個為 $\emptyset$, 亦即 $D\subseteq B$ 或 $C\subseteq A$ (注意此已包括 C 或 D 為 $\emptyset$ 的情況). (2) $C=C\setminus A$, 此即表示 $A\cap C=\emptyset$. (3) $D=D\setminus B$, 此即表示 $B\cap D=\emptyset$. (4) $C\subseteq(C\setminus A)$ 且 $(D\setminus B)\subseteq D$. 因 $(D\setminus B)$ 必包含於 D, 故此條件僅要求 $C\subseteq(C\setminus A)$, 亦即 $C=C\setminus A$, 故與 (2) 之條件相同. (5) $D\subseteq(D\setminus B)$ 且 $(C\setminus A)\subseteq C$. 同 (4) 的情況. 此與 (3) 的條件相同. 結合以上的討論我們有以下之結果.

Proposition 3.4.23. 假設 A,B,C,D 為 *sets.* 則存在 S,T 為 *sets* 滿足 $(C\times D)\setminus(A\times B)=S\times T$ 若且唯若 A,B,C,D 滿足以下其中之一的條件*:*

(1) $D\subseteq B$.

(2) $C\subseteq A$.

(3) $A\cap C=\emptyset$.

(4) $B\cap D=\emptyset$.

Question 3.24. 請找出 *Proposition 3.4.23* 各條件中 S,T 為何*?*

我們也順便討論一下 Cartesian product 和 complement 的關係. 這裡要特別說明, 其實 Cartesian product 很重要的地方是它可以幫我們連結兩個不同宇集中的集合. 也就是說若集合 A 所在的宇集為 X, 而集合 B 所在的宇集為 Y, 我們仍可談論 $A\times B$. 不過此時 $A\times B$ 所在的宇集應為 $X\times Y$. 而這裡我們談 A 的 complement A^c 是指在 X 裡的 complement, 亦即 $A^c=X\setminus A$. 同理 B^c 指的是 B 在 Y 的 complement, 即 $B^c=Y\setminus B$. 而 $A\times B$ 的 complement $(A\times B)^c$, 指的是 $A\times B$ 在 $X\times Y$ 的 complement, 即 $(A\times B)^c=(X\times Y)\setminus(A\times B)$. 所以要特

別注意, 這裡三個 complement 分指在三個不同 universal sets 上的 complement. 依此定義, 套用 Corollary 3.4.22 中 $C = X$ 以及 $D = Y$ 的情形我們有

$$(A \times B)^c = (X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times Y) = (X \times B^c) \cup (A^c \times Y).$$

然而 $X = A \cup A^c$ 以及 $Y = B \cup B^c$, 故由 Proposition 3.4.17 得

$$X \times B^c = (A \cup A^c) \times B^c = (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c),$$

同理得 $A^c \times Y = (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c)$. 最後利用聯集的結合律我們得以下定理.

Proposition 3.4.24. 假設 A, B 為 *sets.* 則 $(A \times B)^c = (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B)$.

最後說明一下, 其實我們可以談論三個或更多集合的 Cartesian product. 不過因為我們之後不需用到, 就不探討這方面的問題了.