Chapter 6

Axiom of Choice, Well-ordering Theorem and Zorn's Lemma

Axiom of choice 對於大部分數學家都認為直覺是對的, 不過卻可以用它推導出一些令人覺得深奧較不合乎直覺的定理或性質, 例如 Well-ordering Theorem 和 Zorn's Lemma (事實上這三個性質是等價的). 對於 axiom of choice 的使用, 有些數學家並不一定那麼釋懷，不過由於過去一些數學的證明常不自知的用到 axiom of choice, 而且這個 axiom 的使用並沒有和數學的理論造成任何的矛盾, 所以目前絕大部分的數學家是接受 axiom of choice 以及與其等價的 Well-ordering Theorem 和 Zorn's Lemma. 也因此將來大家在學習進階的一些數學課程時會遇到需要用這三個性質其中之一所得到的定理, 所以我們特別介紹這三個性質. 要注意, 我們並不是要證明這三個性質是等價的 (有興趣的同學可參考集合論相關的書籍), 而是著重於瞭解這三個性質以及如何運用.

6.1. Axiom of Choice

Axiom of choice 指的是對於任意的非空集合 S, 我們都可以定義一個"方法"在 S 的任意非空子集中挑出一個代表元素. 這個性質在 S 是 finite set 時不會有問題, 因為此時 S 的非空子集只有有限多個, 我們可以用列舉的方法告訴大家如何挑選每個非空子集的代表元素. 另外對於一些特別的 infinite set, 也可能沒問題. 例如當 S 為 $\mathbb{N}$ 時, 我們可以對於 $\mathbb{N}$ 的每個非空子集利用 well-ordering principle, 使用選 least element 的方法挑出代表元素. 不過對於更一般的 infinite set, 就可能會有問題了, 因為我們可能無法明確地造出"挑選"的方法. 不過換一個角度來說, 既然是非空子集, 我們可以任意挑選一個元素當代表元素啊! 所以雖然無法像 finite set 的情況用列舉法, 不過至少應該還是一種"挑選"的方法. 因此一般的數學家認為這個性質只是對於 finite set 的情形延伸而來, 頗符合直覺, 也應此公認它是對的.

要注意, 前述在非空子集中任意挑選一個元素當代表元素的說法其實是有限制的. 既然要挑代表元素, 便要有一致性. 也就是說對於同一個非空子集, 不能一下子挑一個元素, 一下

子又挑另一個元素. 這種一致性利用 function 來表達便最合適了. 回顧一下集合 S 的子集合所成的集合, 即所謂 S 的 power set, 我們用 $\mathscr{P}(S)$ 來表示. 我們想將 $\mathscr{P}(S)$ 中任一個非空子集 A 對應到 A 的某一個元素, 所以用函數的觀點來看就是找到一個 function f 使得對任意 S 的非空子集 A 皆有 $f(A) \in A$. 這一個 function f, 由於是挑選 S 中每一個非空子集的代表元素, 所以一般我們也稱之為 *choice function*. 接下來, 我們寫下 axiom of choice 的正確敘述.

Axiom of Choice: *For any nonempty set S, there exists a choice function $f : \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset \to S$ such that for every nonempty subset A of S (*即 $A \in \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset$*), we have $f(A) \in A$.*

要注意, 這裡 A 雖然是一個集合, 但 choice function 對其作用後所得的是 A 中的一個元素, 而不是集合. 也就是說 choice function f 的定義域是 S 的非空子集合, 而不是 S, 千萬不要誤以為 $f(A)$ 是前一章 Section 5.2 所提的 "image of A under f". 另外要說明的是 axiom of choice 中僅談到 choice function 的存在性, 並未論及如何找到此 choice function. 所以一般利用 axiom of choice 所得的結果, 它的存在性都不會是 constructive.

前面提及, 我們常不經意地用到 axiom of choice. 例如在 Proposition 5.5.9 的證明中, 我們事實上用到了 axiom of choice. 也就是在 $S_1, \dots, S_n, \dots$ 皆為 countable set 的假設上, 對於每一個 $i \in \mathbb{N}$, 由於 $|S_i| \leq |\mathbb{N}|$, 我們就在可能很多 $S_i \to \mathbb{N}$ 的 one-to-one function 中挑選了一個 $f_i : S_i \to \mathbb{N}$, 為代表. 所以嚴格來說 Proposition 5.5.9 是要用到 axiom of choice 才能成立的. 最後, 我們再看一個利用 axiom of choice 所得的結果.

Proposition 6.1.1. 假設 S 為 *infinite set,* 則 S 中存在 *subset* 是 *countably infinite.*

Proof. 假設 $f : \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset \to S$ 為 choice function. 考慮 $g : \mathbb{N} \to S$, 定義為 $g(1) = f(S)$. 令 $S_2 = S \setminus \{f(S)\}$, 由於 S 為 infinite set, 我們有 $S_2 \neq \emptyset$, 也就是說 $S_2 \in \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset$, 所以 $f(S_2)$ 是有定義的, 現令 $g(2) = f(S_2)$. 現利用數學歸納法對於 $k \geq 2$ 令 $S_{k+1} = S \setminus \{f(S), f(S_2), \dots, f(S_k)\}$. 由 S 為 infinite set, 我們知 $S_{k+1} \in \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset$, 故定義 $g(k+1) = f(S_{k+1})$. 依此, 我們定義了一個 $g : \mathbb{N} \to S$ 這樣的一個 one-to-one function, 也因此 g 的 image, 即 $g(\mathbb{N})$ 就是 S 的一個 countably infinite 的 subset. □

一般來說，在處理有無窮多個集合的問題時，就有可能用到 axiom of choice, 但也未必一定要用到。英國哲學家 Russell（也是數學家和邏輯學家）提出了一個簡單區分是否要用到 axiom of choice 的例子。當在無窮多雙的襪子中（一般來說每雙襪子都是同色且不分左右腳），若要從每雙襪子中都挑出一隻襪子，便需用到 axiom of choice；但在無窮多雙的鞋子中（一般來說每雙鞋子都有分左右腳），若要從每雙鞋子中都挑出一隻鞋子，便不需用到 axiom of choice，因為我們可以簡單的都挑左鞋。簡單來說，是否用到 axiom of choice 取決於函數是否為 constructive。

6.2. Well-ordering Theorem

回顧一個 partial ordered set $(X, \preceq)$, 為 total ordered 表示 X 中任意兩個元素都可以比較大小, 亦即若 $a, b \in X$, 則 $a \preceq b$ 或 $b \preceq a$, 其中之一必成立. 而一個 poset (partial ordered set)

$(X, \preceq)$, 稱為 well-ordered 表示每一個 X 的非空子集 T 都會有 least element, 也就是說存在 $t_0 \in T$ 滿足 $t_0 \preceq t$, $\forall t \in T$. 為了方便起見我們用 $\min(T)$ 表示 T 的 least element. 所謂 Well-ordering Theorem, 就是說對於一個非空的集合 X, 我們都可以找到一個 order $\preceq$, 使得 $(X, \preceq)$ 是一個 well-ordered set.

不要將 Well-ordering Theorem 和 Well-ordering Principle 混淆. Well-ordering Principle, 簡單來說指的是用我們一般的 order $\leq$ 會使得 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是 well-ordered set. 而 Well-ordering Theorem, 指的是任意的非空集合 X, 另外它並無指出哪一種 order $\preceq$ 會使得 $(X, \preceq)$ 是一個 well-ordered set. 例如有理數 $\mathbb{Q}$ 利用一般的 $\leq$, 並不會是 well-ordered (我們無法在 $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r < 1\}$ 這個集合中找到最小的有理數). 不過利用 $\mathbb{Q}$ 是 countable (Corollary 5.5.8), 我們可以利用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Q}$ 的一對一的對應, 將 $\mathbb{Q}$ 從新排序, 而利用此新的排序得到 $\mathbb{Q}$ 為 well-ordered. 所以說 Well-ordering Theorem, 對於 countable set, 我們知道可由 $\mathbb{N}$ 的 Well-ordering Principle 推得. 不過對於 uncountable set, Well-ordering Theorem 就較難令人理解. 事實上到目前為止, 我們仍無法具體舉出實數 $\mathbb{R}$ 上的 order $\preceq$ 使得 $(\mathbb{R}, \preceq)$ 是 well-ordered.

Well-ordering Theorem 又稱為 Zermelo's Theorem, 它是 Zermelo 利用 Axiom of Choice 證出的. 我們可以很快地利用 Well-ordering Theorem 證出 Axiom of Choice. 所以邏輯上, 它們是等價的. 因此我們也可以將 Well-ordering Theorem 視為是一種 axiom (公設). 不過如前所說, 一般人直覺上較能覺得 Axiom of Choice 是對的, 而直覺上較無法理解 Well-ordering Theorem, 所以一般我們不稱它為公設, 覺得它是由 Axiom of Choice 所推出的定理. 我們正式寫下其定理形式.

Theorem 6.2.1 (Well-ordering Theorem)**.** *Let X be a nonempty set. Then there exists an order relation $\preceq$ on X such that $(X, \preceq)$ is well-ordered.*

Well-ordered Theorem 強調的是可以找到 order $\preceq$, 使得 $(X, \preceq)$ 為 well-ordered. 不過由於這個存在性是利用 Axiom of Choice 所得到, 前面強調過用 Axiom of Choice 所得的存在性不是 constructive, 所以 Well-ordered Theorem 並無法提出使得 $(X, \preceq)$ 為 well-ordered set 的 order $\preceq$ 為何.

在這裡我們不去探討如何由 Axiom of Choice 得到 Well-ordering Theorem. 不過反向是容易的, 即利用 Well-ordering Theorem 推得 Axiom of Choice. 對於任意的 nonempty set S, 利用 Well-ordering Theorem, 考慮 order $\preceq$ 使得 $(S, \preceq)$ 為 well-ordered. 此時對任意 $A \in \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset$, 令 $f(A) = \min(A)$. 則 $f : \mathscr{P}(S) \setminus \emptyset \to S$, 滿足 choice function 的要求, 即 $f(A) \in A$. 故推得 Axiom of Choice.

有了 Well-ordering Theorem 這個強大的工具, 就如同 $\mathbb{N}$ 有 Well-ordering principle 一樣, 我們可以有類似 mathematical induction 的方法稱之為 *transfinite induction*. 回顧一下 Corollary 2.3.6, 要使用 mathematical induction 證明 $P(n)$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 皆成立, 我們先證明 (i) $P(1)$ 是對的; 然後再證明 (ii) 若對任意 $i < k$, $P(i)$ 皆成立, 則 $P(k)$ 亦成立. 證明了 (i), (ii) 便證得 $P(n)$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 皆成立. 而 transfinite induction 是利用 $(X, \preceq)$ 為

well-ordered, 先證明 (1) $P(\min(X))$ 成立; 再證明 (ii) 若對任意 $\alpha \prec \beta$, $P(\alpha)$ 皆成立, 則 $P(\beta)$ 亦成立. 如此便證得了 $P(x)$, 對所有 $x \in X$ 皆成立. 我們將此定理敘述如下:

Theorem 6.2.2 (Transfinite Induction)**.** *假設 $(X, \preceq)$ 為 well-ordered set 且令 $x_1 = \min(X)$. 假設以下兩個 statement 是對的, 那麼對任意 $x \in X$, $P(x)$ 皆會成立.*

(1) *$P(x_1)$ 成立.*

(2) *假設 $\beta \in X$. 若對任意 $\alpha \in X$ 滿足 $\alpha \prec \beta$, $P(\alpha)$ 皆成立, 則 $P(\beta)$ 成立.*

Proof. 利用反證法, 假設存在 $x \in X$ 使得 $P(x)$ 不成立. 考慮 $S = \{x \in X \mid P(x) \text{ 不成立 }\}$. 依假設 $S \neq \emptyset$. 故由 $(X, \preceq)$ 為 well-ordered, 知存在 $\beta \in S$ 使得 $\beta = \min(S)$. 由 (1) 知 $\beta \neq x_0$. 又因 $\beta = \min(S)$, 我們知對任意 $\alpha \in X$ 滿足 $\alpha \prec \beta$, 皆有 $\alpha \notin S$, 亦即 $P(\alpha)$ 皆成立. 故由 (2) 知 $P(\beta)$ 成立. 此與 $\beta \in S$ 之假設相矛盾, 故知 $S = \emptyset$, 亦即對任意 $x \in X$, $P(x)$ 皆成立. □

Well-ordering Theorem 的好處就是可以讓我們如同處理 $\mathbb{N}$ 一樣地處理一般的集合. 不過這反而會造成同學的誤解. 許多同學會誤以為一個集合是 well-ordered, 表示可以由最小的元素開始排序. 若將最小的元素對應到 1, 第二小的元素對應到 2, 這樣一直下去不就表示所有 infinite set 都可以和 $\mathbb{N}$ 形成一對一對應, 而造成所有的集合都是 countable 這樣的奇怪現象? 這樣的看法其實是錯的, 主要的原因是我們確實可以利用 well-order 的性質將集合中的元素從小排到大, 但這並不代表可以將每一個元素都排到. 例如對於 $\mathbb{N}$ 我們可以有以下的 order $\preceq$: 若 $a, b \in \mathbb{N}$ 且同奇同偶, 則定 $a \preceq b$ 若且唯若 $a \leq b$; 而若 a 為奇數 b 為偶數, 則定 $a \preceq b$. 在此定義之下我們仍可得 $(\mathbb{N}, \preceq)$ 為 well-ordered set, 但是若從小到大排序, 則 2 (或任何的偶數) 永遠都無法被排到 (因為必須將奇數先排完才能排偶數).

6.3. Zorn's Lemma

Zorn's Lemma 和 Axiom of Choice 也是等價的. 由於它的前題對一般的 partial ordered set 都可使用, 所以較易拿來應用. 也因此有許多數學上的定理是用它推得的, 故一般稱之為 Lemma. 事實上, 以後大家在遇到符合 Zorn's Lemma 的前題時, 可以如使用 Axiom 一樣直接套用. 所以我們不去論證 Zorn's Lemma 和 Axiom of Choice (或 Well-ordering Theorem) 之間的等價關係, 而專注於了解這個 Lemma.

首先我們在回顧一些有關於 order 的定義. 在一個 partial ordered set $(S, \preceq)$ 中, 假設 T 是 S 的 subset 且 T 在 $\preceq$ 之下 $(T, \preceq)$ 是一個 total ordered set (意即對任意 $t, t' \in T$ 皆有 $t \preceq t'$ 或 $t' \preceq T$), 我們稱 T 為 $(S, \preceq)$ 的一個 *chain*. 對於 S 的一個 nonempty subset S', 我們說 $u \in S$ 是 S' 的一個 upper bound, 表示對任意 $s' \in S'$ 皆有 $s' \preceq u$. 而我們說 $\mu \in S$ 是 S 的 maximal element, 表示 $\mu \in S$ 且 S 中沒有任何元素 s 會滿足 $\mu \preceq s$ (也就是說 S 中的元素 s, 要不是滿足 $s \preceq \mu$ 就是和 μ 不能比較大小). 現在我們可以敘述 Zorn's Lemma.

Lemma 6.3.1 (Zorn's Lemma)**.** *假設 $(S, \preceq)$ 是一個 partial ordered set. 若 S 中每一個 chain 皆在 S 中有 upper bound, 則 S 有 maximal element.*

從 Zorn's Lemma 的敘述可知, 當我們要證明一個特定的 partial ordered set 有 maximal element, 可以考慮使用 Zorn's Lemma. 也就是說, 若要證明一個 poset $(S,\preceq)$ 有 maximal element, 我們可以考慮 S 中任意的一組 chain, 然後試著在 S 中找到此組 chain 的 upper bound. 如果能證明所有的 chain 皆在 S 中可找到 upper bound, 那麼 poset $(S,\preceq)$ 會有 maximal element. 要注意, 這裡我們特別強調, 每一個 chain 的 upper bound 必須在 S 中找到, 否則不能確保 S 有 maximal element.

可以看出 Zorn's Lemma 仍然是談論存在性的問題. 由於它和 Axiom of Choice 以及 Well-ordering Theorem 是等價的, 所以它所得的存在性也不是 constructive. 也就是說, 我們可證得 maximal element 的存在性, 但無從得知這些 maximal element 有哪些. Zorn's Lemma 會在將來許多數學課程中用到. 例如代數中, 要證明每個 ring 皆存在著 maximal ideal; 線性代數中, 要證明所有的 (infinite dimensional) vector space 皆存在一組 basis, 都要用到 Zorn's Lemma. 這裡我們特別舉出一個常常使用 Zorn's Lemma 的情況, 事實上前面所舉的這兩種例子就是在這種情況之下得證的.

Proposition 6.3.2. *假設 $\mathscr{S}$ 是由一些具有某特定性質的 sets 所成的集合. 考慮一般集合的包含關係 $\subseteq$ 所形成的 partial ordered set $(\mathscr{S},\subseteq)$. 若 $\mathscr{S}$ 中任意的一組 chain 的聯集仍在 $\mathscr{S}$ 中, 則在 $\mathscr{S}$ 中必存在一集合 M 使得 $\mathscr{S}$ 中任一集合 S 皆不會滿足 $M\subset S$.*

Proof. 注意 $\mathscr{S}$ 這一個集合裡的元素仍為集合. 很明顯的 $\mathscr{S}$ 中任一組 chain 的聯集必包含此 chain 中任一集合, 故由 $\mathscr{S}$ 中任意的一組 chain 的聯集仍在 $\mathscr{S}$ 中之假設知此聯集便是此 chain 的一個 upper bound. 因此由 Zorn's Lemma 知 $(\mathscr{S},\subseteq)$ 有 maximal element M, 亦即 M 是 $\mathscr{S}$ 中的一個集合, 而且 $\mathscr{S}$ 中沒有其他的集合會比 M "大" (也就是說沒有其他的集合會包含 M), 故得證本定理. □

這裡我們要特別說明的是, 任意的一組集合的聯集當然包含其中任一集合, 所以或許同學會疑問為何 Proposition 6.3.2 中要假設任意的一組 chain 的聯集仍在 $\mathscr{S}$ 中? 這就是我們前面強調的要利用 Zorn's Lemma 的重點在於每一個 chain 的 upper bound 要在 $\mathscr{S}$ 中. 所以光取聯集雖可符合 upper bound 的要求, 但可能不符合在 $\mathscr{S}$ 中的要求. 因此一般使用 Proposition 6.3.2 的重點在於如何利用 "chain" 的特性, 證明將它們取聯集後仍會在 $\mathscr{S}$ 中. 這一點將來遇到用 Zorn's Lemma 證明問題時, 務必留意.