Chapter 1

Basic Logic

其實學習數學就像學習新的語言. 一些名詞的定義就像“單字”一樣, 而邏輯 *logic* 就好比是將這些單字組合成一個句子所需的“文法”. 一般同學在學習邏輯時, 會不自覺地將一些邏輯規則以背誦的方式記憶, 這會造成以後學習上許多的障礙. 其實這些規則應該是潛意識內的直覺, 這樣學習數學才能通行無阻.

在數學中能明確知道對或錯的論述我們稱之為 *statement*. 例如 $2>0$ 是一個 statement, $3<2$ 也是一個 statement 但 $x>0$ 就不是一個 statement (除非我們知道 x 是什麼).

1.1. Connectives

數個 statements 可以組合成一個 statement, 連接這些 statements 的就是所謂 *connectives*. 我們要探討經由 connectives 連結成的 statement 其對或錯的情形.

1.1.1. And. 首先介紹的便是“and”這一個 connective. 這一個 connective 應該是大家最容易理解的一個. 若 P 和 Q 皆為 statement, 我們用 $P\wedge Q$ 表示「P and Q」這一個 statement. $P\wedge Q$ 什麼時候是對的什麼時候是錯的呢? 按照字面的意義“and”就是“且”的意思, 就如同習慣用語當 P 而且 Q 都是對時我們才能說 $P\wedge Q$ 是對的, 而只要 P 和 Q 其中有一個是錯的, 我們便會說 $P\wedge Q$ 是錯的. 例如「$2>0$ and $2<7$」是對的, 而「$2>0$ 且 $2>7$」便是錯的.

我們可利用所謂的真值表 *truth table* 來表示用 connectives 連結兩個 statements 後其對錯的情況. 我們用 T 表示對 (true), F 表示錯 (false). 所以我們有以下的 truth table.

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

基本上 Truth table 就是將 P,Q 每個可能對錯的情況列出, 然後由 P,Q 所對應的情況, 寫下它們連接後的對錯情況. 例如上表第三橫排為 P 為 T, Q 為 F 故寫下 $P\wedge Q$ 為 F.

很容易發現不管 P,Q 的對錯情況如何 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 的對錯情形皆相同. 也就是說 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 在邏輯上是相等的. 我們稱它們為 *logically equivalent.*

Truth table 可以幫助我們判斷許多 statements 用 connectives 連接起來後其對錯的情況, 例如 $(P\wedge Q)\wedge R$ 的 truth table 為

P	Q	R	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\wedge R$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

Question 1.1. 你會列出 $P\wedge(Q\wedge R)$ 的 *truth table* 嗎*?*

注意 $(P\wedge Q)\wedge R$ 和 $P\wedge(Q\wedge R)$ 在意義上是不一樣的. $(P\wedge Q)\wedge R$ 是先探討 $P\wedge Q$ 的對錯再和 R 連結; 而 $P\wedge(Q\wedge R)$ 是先探討 $Q\wedge R$ 的對錯再和 P 連結. 不過從它們的 truth table 我們知道 $(P\wedge Q)\wedge R$ 和 $P\wedge(Q\wedge R)$ 為 logically equivalent.

1.1.2. Or. 當 P 和 Q 皆為 statement, 我們用 $P\vee Q$ 表示「P or Q」這一個 statement. 按照字面的意義 “or” 就是 “或” 的意思. 不過在我們日常用語中 “或” 有兩種用法: 例如在速食店點套餐, 飲料可以選擇「可樂或果汁」. 這裡的 “或” 表示二者擇一, 你不可以兩個都選; 而遊樂園購票時規定「六歲以下或身高 105 公分以下」才可購買兒童票. 這裡的 “或” 表示六歲以下和身高 105 公分以下二者有一個成立就可以, 並不排除六歲以下且身高 105 公分以下同時成立的情況. 在數學邏輯上, “or” 指的是後面那種說法, 也就是說當 P 和 Q 其中有一個是對的 $P\vee Q$ 便是對的 (並不排除 P 和 Q 皆為對的情況). 換言之, 只有當 P 和 Q 都是錯的, $P\vee Q$ 才是錯的.

例如, 「$4<5$ or $4<3$」這個 statement 是對的, 因為 $4<5$ 是對的. 而「$4>5$ or $4>6$」這個 statement 便是錯的, 因為二者皆不成立. 要注意「$4<5$ or $4>3$」這個 statement 依然是對的, 雖然你會認為用 and 比較好, 不過在邏輯上它依然是對的, 千萬別搞錯.

我們有以下關於 $P\vee Q$ 的 truth table.

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Question 1.2. $P\vee Q$ 和 $Q\vee P$ 是否為 *logically equivalent?* $(P\vee Q)\vee R$ 和 $P\vee(Q\vee R)$ 是否為 *logically equivalent?*

既然 and, or 皆為 connectives, 我們可以將其混合使用. 例如當 P,Q,R 為 statements 我們可以考慮如 $(P\wedge Q)\vee R$, $(P\vee Q)\wedge R$,... 等形式的 statements. 如何判定它們的對錯

呢? 例如 $(P\wedge Q)\vee R$ 是對的就必須 $(P\wedge Q)$ 或 R 其中一個是對的. 所以只要是 R 是對的, $(P\wedge Q)\vee R$ 就一定對, 而若 R 是錯的那就必須 P,Q 皆對, $(P\wedge Q)\vee R$ 才會是對的. 注意, 千萬不要誤以為 $(P\wedge Q)\vee R$ 和 $P\wedge(Q\vee R)$ 是 logically equivalent. 很顯然的 $P\wedge(Q\vee R)$ 是對的就必須 P 和 $Q\vee R$ 皆為對的. 例如當 R 是對的時, 不管 Q 為對或錯 $Q\vee R$ 皆為對, 但還必須 P 為對才可得到 $P\wedge(Q\vee R)$ 是對的. 這和只要是 R 是對的, $(P\wedge Q)\vee R$ 就一定對不同, 所以 $(P\wedge Q)\vee R$ 和 $P\wedge(Q\vee R)$ 不是 logically equivalent. 當然我們也可利用以下的 truth table 判定它們不是 logically equivalent.

P	Q	R	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\vee R$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\wedge(Q\vee R)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	F	F

另一方面, 利用以下 $(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$ 的 truth table, 不難發現 $(P\wedge Q)\vee R$ 和 $(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$ 為 logically equivalent.

P	Q	R	$P\vee R$	$Q\vee R$	$(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F

Question 1.3. 試利用 *truth table* 檢查 $(P\vee Q)\wedge R$ 和 $(P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$ 是否為 *logically equivalent.*

我們可以利用 truth table 檢驗一些表示法是否為 logically equivalent. 在一些有關 logic 的書也會有一些 logical equivalences 的列表讓大家檢驗. 不過這些都是為了讓大家熟悉這些 connectives 以及 truth table 的運用. 除了以後和論證有關的 logical equivalences 我們需要注意且會特別提醒大家要熟悉, 一般來說大家不必花時間於記憶這些 logical equivalences.

最後提醒一下和 “or” 有關的數學符號 $\geq$ 和 $\leq$. 在數學上 $x\geq y$ 表示 $x>y$ or $x=y$, 所以 $4\geq 3$ 這一個 statement 按照 or 的邏輯規則是對的. 同理 $4\leq 5$, 也是對的.

1.1.3. If - Then. 這是一個數學定理裡常見的 connective 但又是許多同學不甚了解而經常誤解的 connective, 請務必弄清楚. 當 P 和 Q 皆為 statement, 我們用 $P\Rightarrow Q$ 表示「if P then Q」這一個 statement, 即「若 P 則 Q」的意思. 要注意 $P\Rightarrow Q$ 在數學上的意涵與純粹邏輯上有所不同. 主要的區別是, 數學上 $P\Rightarrow Q$ 較常表達的是 P,Q 之間的因果關係 (也就是說 P,Q 通常是相關的). 這裡 P,Q 通常不是 statement, 而是如「x 為實數」這樣的 “性質”.

而邏輯上將 $\Rightarrow$ 看成是一個 connective 可以連結任意的 P,Q (即使它們毫無關係). 例如數學上我們有 “if $x > 3$ then $x^2 > 9$” 這樣的 statement (注意 $x > 3$ 和 $x^2 > 9$ 皆不是 statement, 但用 if-then 連結後, 它是一個 statement). $x > 3$ 和 $x^2 > 9$ 是有關係的. 而在邏輯上在我們有 “if $3 > 2$ then 2 is even” 這樣的 statement (即使 $3 > 2$ 和 2 為偶數是沒有關係的). 在探討 $P \Rightarrow Q$ 在邏輯上對錯的情況之前, 我們先強調它在數學理論以及推理與論證上的意涵.

在數學上, 當我們說「if P then Q」意即 “當 P 成立時, Q 一定成立”. (注意: 為了區別性質與 statement, 我們說一個性質成不成立, 而不用對錯這樣的說法.) 這裡要強調的是, 當我們說 if P then Q 表示我們僅知道如果 P 成立, 則可確定 Q 一定成立. 如果 P 不成立, 是無法知道 Q 是否成立. 所以在數學上要論述「if P then Q」我們只關心當 P 成立時, Q 是否也成立這樣的 “因果關係”, 不必在意 P 不成立的情況. 這一點和邏輯上的「if P then Q」看成 P,Q 這兩個 statements 的 connective 相當的不同, 因為既然要讓「if P then Q」成為一個 statement, 就必須明定 P,Q 在任何的對錯情況時 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況. 另外我們也要強調 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 在數學上是完全不一樣的. 有許多同學會誤以為可由 $P \Rightarrow Q$ 推得 $Q \Rightarrow P$. 這是不對的, 事實上 $P \Rightarrow Q$ 僅表示由 P 成立可推得 Q 成立, 但不表示當 P 不成立時不會使得 Q 成立. 例如我們知道 if $x > 3$ then $x^2 \geq 9$, 但這並不表示當 $x \leq 3$ 時不會使得 $x^2 \geq 9$. 也就是說我們無法由 Q 成立得到 P 成立. 總而言之, $P \Rightarrow Q$ 並不能確保 $Q \Rightarrow P$. 等一下我們定義「if P then Q」在邏輯上的對錯情況時, 我們也會發現 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 在邏輯上也不是 equivalent.

Question 1.4. 如果我們知道 P 成立則 Q 成立. 那麼當我們發現 Q 不成立時, 是否可以斷言 P 也不成立?

現在我們來看在邏輯上如何定義 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況. 從前面數學上的意義來看, 當 P,Q 為 statements 時, 如果 P 是對的且 Q 是對的, 那麼並未違背 $P \Rightarrow Q$ 的說法, 所以在這種情況我們定 $P \Rightarrow Q$ 為對. 但若 P 是對的而 Q 是錯的, 那麼就違背 $P \Rightarrow Q$ 的說法, 所以在這種情況我們定 $P \Rightarrow Q$ 為錯. 但是若 P 是錯的, 如何定 $P \Rightarrow Q$ 的對錯呢? 由於 $P \Rightarrow Q$ 並未論及當 P 是錯時, Q 會如何, 所以當 P 是錯時, 不管 Q 的對錯都未違背前述 $P \Rightarrow Q$ 的說法, 所以此時我們都定義 $P \Rightarrow Q$ 為對. 例如 $2 > 3$ 是錯的且 $2^2 > 9$ 是錯的, 但這並不違背前面所提 if $x > 3$ then $x^2 > 9$ 這一個對的 statement. 另一方面, $-4 > 3$ 是錯的, 但 $(-4)^2 > 9$ 是對的, 也不違背前述 if $x > 3$ then $x^2 > 9$ 這一個對的 statement. 總而言之, 關於 $P \Rightarrow Q$ 我們有以下的 truth table.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Question 1.5. 試利用 *truth table* 判斷 $Q \Rightarrow P$ 和 $P \Rightarrow Q$ 是否為 *logically equivalent?* $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ 是否和 $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ 為 *logically equivalent?*

或許有些同學對 $P \Rightarrow Q$ 的對錯情況為何這麼定義仍有疑慮, 在我們介紹 “if and only if” 這個 connective 時會再進一步說明.

最後我們補充 $P \Rightarrow Q$ 在英文上的幾種說法. 除了「if P then Q」外, 還有

- 「Q if P」
- 「P implies Q」
- 「P is sufficient for Q」(意即 P 成立足以使得 Q 成立)
- 「Q is necessary for P」(意即需要 Q 成立才有可能使得 P 成立)
- 「P only if Q」(意即只有當 Q 成立時 P 才可能成立)
- 「Q whenever P」(意即每當 P 成立時 Q 都會成立)

1.1.4. If and Only If. 當我們將 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 用 and 連接時, 即 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, 我們稱之為 "$P$ if and only if Q", 用 $P \Leftrightarrow Q$ 來表示.

我們依然先探討在數學上 $P \Leftrightarrow Q$ 的意義. 依定義在數學上我們說 $P \Leftrightarrow Q$ 表示 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$. 也就是說若 P 成立則 Q 一定成立, 另一方面若 Q 成立則 P 一定成立. 因此 P, Q 有一個成立時另一個一定也成立. 換言之, $P \Leftrightarrow Q$ 表示若 Q 成立則 P 一定成立而且只有當 Q 成立時才會使得 P 成立 (否則會造成 P 成立但 Q 不成立的情況). 這也是在中文我們將 $P \Leftrightarrow Q$ 稱之為 "P 若且唯若 Q" (或 P 當且僅當 Q) 的原因.

現在我們來看在邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 的對錯情況. 從前面數學上的意義來看, 我們可以知道 $P \Leftrightarrow Q$ 表示 P 對則 Q 且 Q 對則 P 對. 不會有一對一錯的情況. 因此若 P, Q 有一個錯則另一個一定也是錯的. 也就是說在邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 是對的表示 P 和 Q 必須是同時是對的或同時是錯的. 所以我們有以下關於關於 $P \Leftrightarrow Q$ 的 truth table.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Question 1.6. 試利用 $P \Rightarrow Q$ 以及 $Q \Rightarrow P$ 的 *truth table* 寫下 $P \Leftrightarrow Q$ 的 *truth table.*

Question 1.7. $P \Leftrightarrow Q$ 和 $Q \Leftrightarrow P$ 是否為 *logically equivalent?* $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$ 和 $P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ 是否為 *logically equivalent?*

邏輯上 $P \Leftrightarrow Q$ 對錯的情況, 和數學上的情況很一致, 大家應該覺得較為自然. 現在我們利用 $P \Leftrightarrow Q$ 來解釋為何邏輯上只要 P 是錯的, 不管 Q 的對錯, $P \Rightarrow Q$ 都定義為對的. 當然了, 因為 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ 就是 $P \Leftrightarrow Q$, 所以當 P, Q 皆為錯時, 為了讓 $P \Leftrightarrow Q$ 為對, 我們當然要定義 $P \Rightarrow Q$ 和 $Q \Rightarrow P$ 為對. 所以當 P, Q 皆為錯時, 我們定義 $P \Rightarrow Q$ 為對. 至於 P 錯 Q 對的情形, 由於此時 $Q \Rightarrow P$ 為錯, 不管 $P \Rightarrow Q$ 怎麼定都可以使得 $P \Leftrightarrow Q$ 為錯. 然而此時若 $P \Rightarrow Q$ 定為錯, 將會導致 $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ 和 $P \Leftrightarrow Q$ 皆有相同的 truth table (亦即 equivalent), 此和前述數學上不能由 $P \Rightarrow Q$ 推得 $Q \Rightarrow P$ 相違背, 所以當 P 錯 Q 對的情形, 我們依然定義 $P \Rightarrow Q$ 為對.

最後我們補充 $P \Leftrightarrow Q$ 在英文上的幾種說法. 除了「P if and only if Q」外, 還有

- 「P iff Q」
- 「P is equivalent to Q」
- 「P is necessary and sufficient for Q」

1.2. Logical Equivalence and Tautology

前面我們介紹過 logical equivalence 的概念. 我們可以利用 logical equivalence 的一些規則推導出更多的 logical equivalences. 這樣的好處是不必每次都用 Truth table 來探討有關 logical equivalence 的問題.

首先我們再釐清一個說法. 當 P,Q 是確定的 statements 時, $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 也會是確定的 statements (也就是說它們對錯的情況已經固定), 所以此時說 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 是 logically equivalent 並不是很恰當. 事實上我們是將 P,Q 看成變數一樣, 它們可以用任意的 statement 取代, 所以此時 $P \wedge Q$ 的對錯會因為 P,Q 的不同而有所不同, 故此時說 $P \wedge Q$ 是 statement 也不恰當. 為了方便起見, 這裡 (指的是本講義) 當 P,Q 是可變動的情況之下, 我們便稱它們利用 connectives 連結起來的結果為 "statement form", 例如我們會說 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ 這兩個 statement forms 為 logically equivalent. 另外我們用 "$\sim$" 來表示兩個 statement forms 為 logically equivalent, 例如我們有 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$.

第一個常見的 logical equivalence 的使用規則是: 我們可以將 logically equivalent 的兩個 statement forms 其中同一個變數用其他的 statement form 取代, 仍可得到 logical equivalence. 例如已知 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$, 我們可將 P 用 $P \Rightarrow Q$ 取代得

$$((P \Rightarrow Q) \wedge Q) \sim (Q \wedge (P \Rightarrow Q)).$$

這個規則的原因很簡單, 因為既然 logically equivalent 的 statement forms 有相同的 truth table, 我們將其中某個變數任意變換當然最後所得新的 statement forms 仍會有相同的 truth table. 同樣的道理, 我們可以將其中某個變數用兩個 (或好幾個) logically equivalent 的 statement forms 取代, 最後所得新的 statement forms 仍為 logically equivalent. 例如已知 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 以及 $(R \vee S) \sim (S \vee R)$, 所以可以將 $(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P)$ 左邊的 P 用 $R \vee S$ 取代, 而右邊的 P 用 $S \vee R$ 取代得

$$((R \vee S) \wedge Q) \sim (Q \wedge (S \vee R)).$$

還有一個常用的規則是, 如果兩個 statement forms A,B 是 logically equivalent 而 B 和另一個 statement form C 也是 logically equivalent, 那麼 A 和 C 也是 logically equivalent. 例如我們有 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((Q \wedge P) \vee R)$, 也有 $((Q \wedge P) \vee R) \sim (R \vee (Q \wedge P))$, 故可得

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim (R \vee (Q \wedge P)).$$

這個規則會成立的原因仍然由 truth table 的全等可以得到.

利用這些規則我們可以不必藉由 truth table 很容易推得一些 statement forms 為 logically equivalent. 簡單來說我們可以將 logically equivalent 如 "等號" 一樣運用. 我們前

面學過的 logical equivalences, 例如 $\wedge$ 的交換性和 $\vee$ 的交換性, 即

$$(P \wedge Q) \sim (Q \wedge P), \quad (P \vee Q) \sim (Q \vee P) \tag{1.1}$$

以及 $\wedge$ 的結合性和 $\vee$ 的結合性, 即

$$((P \wedge Q) \wedge R) \sim (P \wedge (Q \wedge R)), \quad ((P \vee Q) \vee R) \sim (P \vee (Q \vee R)) \tag{1.2}$$

還有 $\wedge, \vee$ 之間的分配性質, 即

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R)), \quad ((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)) \tag{1.3}$$

都是常用來幫助我們推導許多 logical equivalences 的工具.

Example 1.2.1. 考慮 $(P \wedge Q) \vee (P \vee Q)$ 這一個 statement form. 利用式子 (1.3) 中的 $((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$, 將 R 用 $P \vee Q$ 取代, 我們有

$$(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \sim ((P \vee (P \vee Q)) \wedge (Q \vee (P \vee Q))). \tag{1.4}$$

再由 $(P \vee (P \vee Q)) \sim ((P \vee P) \vee Q)$ 以及 $(Q \vee (P \vee Q)) \sim (Q \vee (Q \vee P)) \sim ((Q \vee Q) \vee P)$ 得

$$((P \vee (P \vee Q)) \wedge (Q \vee (P \vee Q)) \sim (((P \vee P) \vee Q) \wedge ((Q \vee Q) \vee P)). \tag{1.5}$$

很容易檢查 $(P \vee P) \sim P$ 以及 $(Q \wedge Q) \sim Q$, 故知

$$(((P \vee P) \vee Q) \wedge ((Q \vee Q) \vee P)) \sim ((P \vee Q) \wedge (Q \vee P)) \sim (P \vee Q). \tag{1.6}$$

最後連結式子 (1.4), (1.5), (1.6), 得

$$((P \wedge Q) \vee (P \vee Q)) \sim (P \vee Q).$$

當一個 statement form 其 truth table 在任何情況之下皆為對, 我們稱此 statement form 為 *tautology*. 意即它是重複多餘的. 例如 $P \Leftrightarrow P$ 的 truth table 為

P	$P \Leftrightarrow P$
T	T
F	T

,

故 $P \Leftrightarrow P$ 為 tautology.

Question 1.8. *$P \Rightarrow P$ 是否為 tautology? $P \Rightarrow (P \Rightarrow P)$ 是否為 tautology?*

Tautology 雖然有重複多餘的意思, 但它在邏輯上仍是有意思的. 它可以幫我們用另一種方法來詮釋 logically equivalent. 當兩個 statement forms A, B 為 logically equivalent 時, 因為 A, B 的對錯情況一致, 我們有 $A \Leftrightarrow B$ 恆為對. 意即 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology. 反之, 當 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology 時, 由於 A, B 的對錯情形一致, 它們有相同的 truth table. 意即 $A \sim B$. 我們有以下的性質.

Proposition 1.2.2. *假設 A, B 為兩個 statement forms. 則 A 和 B 為 logically equivalent 等同於 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology.*

其實在前面的說明中, 我們先假設 $A \sim B$ 成立推得 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology (即若 $A \sim B$ 則 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology), 後又由 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology 推得 $A \sim B$. 故 Proposition 1.2.2 可以說成 $A \sim B$ 若且唯若 $A \Leftrightarrow B$ 為 tautology.

Question 1.9. 假設 A, B 為兩個 *statement forms.* 若 $A \sim B$ 可否推得 $A \Rightarrow B$ 為 *tautology?* 若 $A \Rightarrow B$ 為 *tautology* 可否推得 $A \sim B$*?*

Question 1.10. 假設 A, B, C 為 *statement forms.* 若 $A \Leftrightarrow B$ 和 $B \Leftrightarrow C$ 皆為 *tautology,* 是否可推得 $A \Leftrightarrow C$ 為 *tautology?*

和 tautology 相反的是所謂的 *contradiction* (矛盾). 它指的是一個 statement form 在任何情況之下皆為錯的. 關於 contradiction, 我們會在下一節介紹 “not” 之後再探討.

Question 1.11. 假設 A, B 為 *statement forms.*

(1) 若 A 為 *tautology,* 試說明 $(A \wedge B) \sim B$ 並說明 $A \vee B$ 為 *tautology.*

(2) 若 A 為 *contradiction,* 試說明 $(A \vee B) \sim B$ 並說明 $A \wedge B$ 為 *contradiction.*

1.3. Not and Contradiction

我們介紹 “not” 以及和 not 有關的 equivalences. 本節內容分量比前面幾節重, 而且許多情形很可能和你的直覺不同. 希望大家能好好熟習, 糾正錯誤的直覺, 而將正確觀念成為你的本能反應而不是盲目地記誦.

Not 有否定和相反的意思, 給定一個 statement P, 我們用 $\neg P$, 來表示 not P, 一般稱為 “非 P”. 它的定義就是當 P 為對時, $\neg P$ 就為錯. 反之, 當 P 為錯時, $\neg P$ 就為對. 所以我們有以下 $\neg P$ 的 truth table.

P	$\neg P$
T	F
F	T

.

利用這個定義, 我們馬上有

$$P \sim \neg(\neg P). \tag{1.7}$$

Not P 雖然定義簡單, 但是對於由許多 connectives 連結的 statement 取 not 之後, 其對錯狀況就較複雜了. 例如 $\neg(P \wedge Q)$, 或許很多人會誤以為是 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$, 不過檢查一下 truth table 可得

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

很明顯看出, 在 P 對 Q 錯或 P 錯 Q 對時, $\neg(P \wedge Q)$ 和 $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ 是不同的. 事實上, 利用 truth table, 我們可得

$$\neg(P \wedge Q) \sim (\neg P) \vee (\neg Q). \tag{1.8}$$