Set

集合的理論是所有數學理論的基礎系統. 在這一章中我們將簡單的介紹集合的一些基本理論. 我們採用較自然及直覺的方式介紹集合論, 而不涉及抽象的公設結構.

3.1. Basic Definition

首先我們介紹有關集合的基本定義, 並了解集合之間的關係.

集合和元素是數學最基本的名詞, 嚴格說起來它是無法定義清楚的. 這裡我們就不去定義集合, 而採用較直觀的說法. 所謂一個集合 (英文稱之為 *set*) 就是一些事物收集起來的結果, 而組成這個集合的事物, 我們稱為此集合的元素 (英文稱之為 *element*). 通常我們會用英文大寫來表示一個 set, 例如 A,B,S 等, 而用小寫字母來表示 set 裡的元素. 不過有些數學常用的集合大家都習慣用特定的符號表示. 例如: $\mathbb{N}$ 表示所有自然數所成的集合, $\mathbb{Z}$ 為整數所成的集合, $\mathbb{Q}$ 表示有理數所成的集合, 而所有實數所成的集合我們用 $\mathbb{R}$ 來表示. 若 x 為集合 S 裡的一個元素, 我們就用 $x \in S$ 來表示, 稱之為 x *belongs to* S (即 x 屬於 S). 若 x 不在 S 中, 我們就用 $x \not\in S$ 來表示.

在數學上, 我們希望一個 set 是要明確的知道哪些是它的 element 哪些不是它的 element. 也就是說給定一集合 S, 對於任意的 x, 我們必須明確知道 $x \in S$ 是對的還是錯的. 一般來說, 一個集合若僅有有限多個元素, 我們便可以一一將它們列舉出來. 例如 $S = \{1,2,3\}$ 表示的就是有 3 個元素的集合, 其元素為 1,2 和 3. 這裡 S 是一個集合, 例如我們知道 $1 \in S$, 而 $4 \not\in S$. 有時一個集合我們無法一一列舉出它的元素, 此時我們便用所謂 *set-builder notation* 來表示其元素. 它的表示法通常為 $\{x : P(x)\}$ 這樣的形式, 其中冒號 : 左邊的 x 表示我們要用 x 來表示此集合的元素, 而冒號 : 右邊的 $P(x)$ 指的是這個集合裡的元素 x 需滿足 $P(x)$. 也就是說 $\{x : P(x)\}$ 這個集合便是收集所有滿足 $P(x)$ 的 x 所成的集合.

在探討集合相關性質之前, 首先我們必須定義何謂集合的相等, 以及集合間的包含關係.

Definition 3.1.1. 設 A,B 為集合. 如果 B 中的 element 皆為 A 的 element, 我們稱 B 為 A 的 *subset* (子集合), 也稱 B is *contained* in (包含於) A, 記為 $B \subseteq A$. 若 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$, 則稱 A,B 為 *equal*, 記為 $A = B$. 另外若 $B \subseteq A$ 但 $B \neq A$, 則稱 B 為 A 的 *proper subset*, 記為 $B \subset A$.

注意 subset 和 proper set 的符號 “$\subseteq$” 和 “$\subset$”, 許多參考書籍的符號並不一致, 請在閱讀時注意.

依定義若要證明 $B \subseteq A$, 我們必須說明任意 B 中的元素 x, 皆會是 A 的元素, 所以用數學的表示法就是要證明 “$x \in B \Rightarrow x \in A$”. 而要證明 $A = B$ 的話就是等同於證明 “$x \in B \Leftrightarrow x \in A$”. 從這裡得知, 兩集合的包含關係以及相等, 只與元素是否屬於該集合有關, 和集合的表示法無關. 例如以下的例子:

Example 3.1.2. 令 $A = \{1,2,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{3,3,1,2\}$, $D = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 3\}$, $E = \{2,4\}$.

由於 A 僅有 1,2 兩個元素, 而 $1 \in B$ 且 $2 \in B$, 故知 $A \subseteq B$. 又 $3 \in B$ 但 $3 \notin A$, 知 B 不包含於 A, 故得 $A \subset B$. 同理我們知 $B = C$.

現若 $x \in B$, 則知 $x \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq x \leq 3$, 故得 $x \in D$. 得證 $B \subseteq D$. 另一方面, 若 $x \in D$ 表示 $x \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq x \leq 3$, 所以 $x = 1,2,3$ 皆在 B 中, 得證 $D \subseteq B$, 由此知 $B = D$.

最後因 $1 \in B$ 但 $1 \notin E$, 我們知 B 不是 E 的 subset. 同樣的, 因 $4 \in E$ 但 $4 \notin B$, 我們知 E 也不是 B 的 subset.

當 A,B 為 sets, 但 B 不是 A 的 subset 時, 我們也用 $B \not\subseteq A$ 來表示. 所以如果 $B \subseteq A$ 但 $A \not\subseteq B$, 依定義我們得 $B \subset A$.

Question 3.1. 假設 $P(x)$, $Q(x)$ 皆為 *statement form.* 令 $P = \{x : P(x)\}$ 且 $Q = \{x : Q(x)\}$ 試證明以下性質:

(1) $P \subseteq Q$ 若且唯若 $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

(2) $P = Q$ 若且唯若 $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

為了將來探討集合間的關係方便, 我們定義兩個特殊的集合. 首先, 當我們所探討的問題都是某個特定集合的元素或其 subset 時, 為了方便我們定此特定集合為 *universal set* (宇集). 例如當我們談論的是有關於實數, 我們就可以說 $\mathbb{R}$ 為我們的 universal set. 如此便可以不必每次都要去提類似如 $x \in \mathbb{R}$ 這樣的事. 不過 universal set 可以因所探討的問題不同而改變, 例如在 a,b 為整數時, 我們可以在 universal set 為 $\mathbb{Q}$ 時談論 $ax + b = 0$ 的解. 但談論 $ax^2 + b = 0$, 就可能要令 universal set 為 $\mathbb{R}$ 或複數 $\mathbb{C}$ 才有意思. 不管如何, 當我們發現要探討的集合都是某一個特定集合的子集合時, 明確的將之訂定為 universal set 確有其方便性. 不過當我們訂定 universal set 之後, 所有談論的 set 就必須是此 universal set 的 subset.

另一個我們需要定義的是所謂 *empty set* (空集合). 它是一個沒有任何元素的集合, 我們用 $\emptyset$ 來表示. 或許大家會疑惑 $\emptyset$ 有符合集合的要求嗎? 其實由於我們可以明確的知道所有的元素皆不屬於空集合, 所以它並未違背當初我們說的 “明確知道 $x \in \emptyset$ 是對或錯” 的要求. 由於我們將來要探討集合的一些如交集等的 operations, 因此將 $\emptyset$ 視為一集合確有其必要性. 關於 universal set 和 empty set, 我們有以下的性質.

Proposition 3.1.3. 假設 X 為 *universal set* 且 A 為 *set.* 則 $A \subseteq X$ 且 $\emptyset \subseteq A$.

Proof. 依定義 X 為 universal set, 故 A 為 X 的 subset, 得 $A \subseteq X$. 另一方面, 要證明 $\emptyset \subseteq A$ 等同於要證明若 $x \in \emptyset$ 則 $x \in A$. 但不可能會有 $x \in \emptyset$ 的情形發生, 故由當 P 錯時 $P \Rightarrow Q$ 恆對的邏輯規則知 "$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$" 為正確故知 $\emptyset \subseteq A$. □

Question 3.2. 在此 *Question* 中令 X 為 *universal set.* 試問 *universal set* 是否唯一? 又 *empty set* 是否唯一?

一般數學上定義了一些名詞後, 接著便是要探討這些名詞相關的性質, 接下來我們便是要談論有關 subset 的基本性質.

Proposition 3.1.4. 假設 A,B,C 為 *sets,* 我們有以下的性質.

(1) $A \subseteq A$.

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$.

Proof. (1) 假設 $x \in A$, 自然有 $x \in A$, 故得 $A \subseteq A$.

(2) 設 $x \in A$, 由 $A \subseteq B$ 得 $x \in B$. 又由 $B \subseteq C$ 得 $x \in C$. 綜言之, 對於任意 $x \in A$ 必有 $x \in C$, 得證 $A \subseteq C$. □

Question 3.3. 試利用 *Proposition 3.1.4* 證明若 $A = B$ 且 $B = C$, 則 $A = C$.

Question 3.4. 假設 A,B,C 為 *sets,* 下列哪些是對的?

(1) 若 $A \subset B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$.

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subset C$.

(3) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$, 則 $A \subseteq C$.

(4) 若 $A \subset B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subset C$.

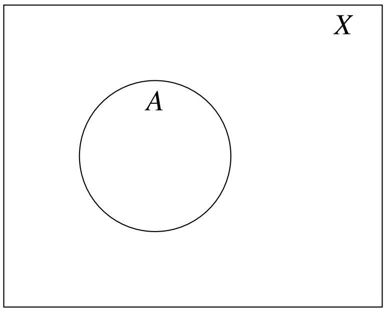
再強調一次, 當要證明 $A = B$ 時必須 $A \subseteq B$ 以及 $B \subseteq A$ 兩個方向都證明才行. 尤其在處理解方程式的情形, 我們都會設未知數為解然後解方程式, 同學常常弄不清楚是處理哪一邊的包含關係或常常忘了處理另一邊的包含關係. 我們看以下的例子.

Example 3.1.5. 令 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x = y = 2\}$ 且 $B = \{(2,2),(-1,2)\}$. 證明 $A = B$.

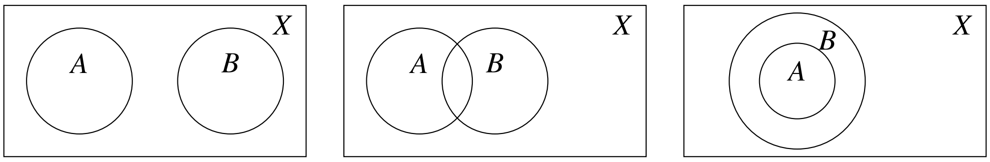
Proof. 設 $(x,y) \in A$, 表示 $x^2 - x = 2$ 且 $y = 2$, 故得 $x = 2$ 或 $x = -1$ 且 $y = 2$. 此表示若 $(x,y) \in A$, 則 $(x,y) = (2,2)$ 或 $(x,y) = (-1,2)$. 故知 $(x,y) \in B$, 亦即得證 $A \subseteq B$. 接著設 $(x,y) \in B$, 知 $(x,y) = (2,2)$ 或 $(x,y) = (-1,2)$ 代入皆符合 $x^2 - x = y = 2$, 故知 $(x,y) \in A$. 得證 $B \subseteq A$, 故知 $A = B$ □

Question 3.5. 令 $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} = x - 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{4\}$, $D = \{1,4\}$. 試寫下 A,B,C,D 相互間的包含關係.

我們可以利用所謂的 *Venn diagrams* 來幫助我們了解集合間的關係. 大致上, 我們先畫一個框框表示 universal set, 然後在此框框內畫一個封閉區域 (一般是畫一個圓) 表示一個 set. 例如下圖就是表示在宇集 X 中的一個 set A.

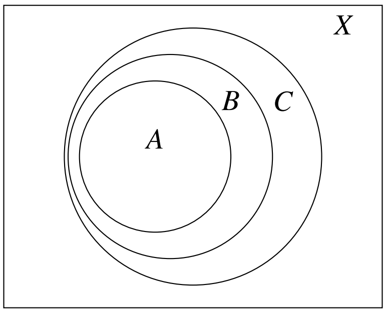


我們可以用 Venn diagrams 來表示兩個集合 A,B 之間三種可能的關係如下.



最左邊圖示表示的是 A,B 沒有共同的元素, 中間圖示表示的是 A,B 有共同元素但互相沒有包含關係, 而最右邊表示的是 $A \subseteq B$.

有時 Venn diagrams 可以幫助我們了解一些集合的性質, 甚至給我們證明這些性質的提示. 例如以下的圖示便可以幫助我們理解 Proposition 3.1.4 (2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 則 $A \subseteq C$ 這個性質.



當然了 Venn diagrams 只是讓我們參考用, 絕不能只是畫個圖就以為證明完成.

Question 3.6. 假設 A,B,C 為 *sets*. 已知 $A \subseteq B$. 若 B 和 C 沒有共同的元素, 畫出可能的 *Venn diagrams*. 是否可以確定 A 和 C 沒有共同元素? 又若 B 和 C 有共同的元素, 畫出可能的 *Venn diagrams*, 是否可確定 A 和 C 有共同元素? 同樣的, 從 A,C 有沒有共同元素的情況畫出可能的 *Venn diagrams*, 並探討是否依此可確定 B,C 有沒有共同元素.

最後提醒大家千萬不要把 "$\in$" (屬於) 和 "$\subseteq$" (包含於) 弄混淆. "$\in$" 指的是元素和集合之間的關係, 而 "$\subseteq$" 指的是兩集合間的關係. 對於集合我們有 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 則 $A \subseteq C$ 的性質, 但對於元素 $A \in B$ 且 $B \in C$ 未必可得 $A \in C$. 例如

$$A = \{1\}, \quad B = \big\{\{1\}\big\}, \quad C = \Big\{\big\{\{1\}\big\}\Big\}.$$

我們有 $A \in B$ 且 $B \in C$, 但很明顯的 $A \notin C$.

3.2. Set Operations

所謂 set operation, 就是利用兩個已知的集合得到另一個集合的方法. 我們將介紹集合間幾種重要的 operations, 即 intersection, union 和 set difference, 並探討這幾種 set operations 之間重要的性質.

3.2.1. Intersection and Union. 首先我們定義 intersection 與 union.

Definition 3.2.1. 設 A,B 為 sets. 我們令 $A\cap B=\{x : x\in A \text{ and } x\in B\}$ 稱之為 the *intersection* of A and B (A 和 B 的交集). 令 $A\cup B=\{x : x\in A \text{ or } x\in B\}$ 稱之為 the *union* of A and B (A 和 B 的聯集).

簡單的說 $A\cap B$ 就是將 A,B 共同的元素收集起來所得的集合, 而 $A\cup B$ 是將 A,B 所有的元素收集起來而得的元素. 例如以下的例子.

Example 3.2.2. 令 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6\}$. 由於只有 2 是同時屬於 A 且屬於 B, 所以得 $A\cap B=\{2\}$. 而 1,3 雖沒有在 B 但都屬於 A, 符合屬於 A 或屬於 B 的條件故知 1,3 皆屬於 $A\cup B$. 同理 4,6 亦屬於 $A\cup B$. 至於 2 既然同時屬於 A 和 B 當然符合屬於 A 或屬於 B 的條件, 故知 2 也屬於 $A\cup B$. 又由於沒有其他的數在 A 中或 B 中, 我們可以確定 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

聯集和交集與原來的集合是有關係的. 例如在上面的例子中我們有 $A\cap B=\{2\}\subseteq A=\{1,2,3\}$ 以及 $B=\{2,4,6\}\subseteq A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$. 事實上, 若 $x\in A\cap B$, 表示 $x\in A$ 且 $x\in B$, 故知 x 一定屬於 A 且 x 一定屬於 B, 所以我們有

$$(A\cap B)\subseteq A \quad \text{and} \quad (A\cap B)\subseteq B. \tag{3.1}$$

注意 $A\cap B$ 有可能是空集合, 此時我們稱 A,B 為 *disjoint*. 不過空集合包含於任意的集合, 所以當 A,B 為 disjoint 時上式仍然成立. 另一方面若 $x\in A$, 則 x 必屬於 A 或 B, 所以 $x\in A\cup B$ 成立. 我們有

$$A\subseteq (A\cup B) \quad \text{and} \quad B\subseteq (A\cup B) \tag{3.2}$$

Question 3.7. 試證明 $(A\cap A)=A$ 以及 $(A\cup A)=A$.

交集和聯集在某種程度上可以說是保持包含關係的, 事實上我們有以下的性質.

Proposition 3.2.3. 設 A,B,C,D 皆為 *sets* 滿足 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$. 則

$$(A\cap C)\subseteq (B\cap D) \quad \text{and} \quad (A\cup C)\subseteq (B\cup D).$$

Proof. 因 $A\subseteq B$, 可由 $x\in A$ 得 $x\in B$. 同理因 $C\subseteq D$, 可由 $x\in C$ 得 $x\in D$. 現若 $x\in A\cap C$, 表示 $x\in A$ 且 $x\in C$. 故可得 $x\in B$ 且 $x\in D$. 得證 $(A\cap C)\subseteq (B\cap D)$. 同理, 若 $x\in A\cup C$, 表示 $x\in A$ 或 $x\in C$. 當 $x\in A$ 時可得 $x\in B$, 而當 $x\in C$ 時可得 $x\in D$. 故由 $x\in A\cup C$ 可得 $x\in B\cup D$. 得證 $(A\cup C)\subseteq (B\cup D)$. □

特別的, 當 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq D$ 時, 我們可以考慮 $C = A$ 的情形套用 Proposition 3.2.3 得 $(A \cap A) \subseteq (B \cap D)$. 又由於 $(A \cap A) = A$, 得知 $A \subseteq (B \cap D)$. 同理, 當 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq B$ 時, 我們有 $(A \cup C) \subseteq (B \cup B)$. 又由於 $(B \cup B) = B$, 得知 $(A \cup C) \subseteq B$. 我們證得以下性質. 由於這個結果是由 Proposition 3.2.3 簡單推導而得, 我們就用 *corollary* (引理) 稱之.

Corollary 3.2.4. 假設 A,B,C,D,E 為 *sets.*

(1) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$, 則 $A \subseteq (B \cap C)$.

(2) 若 $D \subseteq A$ 且 $E \subseteq A$, 則 $(D \cup E) \subseteq A$.

Question 3.8. 試直接證明 *Corollary 3.2.4,* 並用此結果推導出 *Proposition 3.2.3.*

我們也可利用交集或聯集來判斷兩集合的包含關係. 我們有以下的結果.

Proposition 3.2.5. 假設 A,B 為 *sets.* 則以下是 *equivalent.*

(1) $A \subseteq B$.

(2) $(A \cap B) = A$.

(3) $(A \cup B) = B$.

Proof. 我們證明 $(1) \Leftrightarrow (2)$ 以及 $(1) \Leftrightarrow (3)$.

$(1) \Leftrightarrow (2)$: 假設 $A \subseteq B$, 我們要證明 $(A \cap B) = A$. 事實上由式子 (3.1) 我們知 $(A \cap B) \subseteq A$, 故僅要證明 $A \subseteq (A \cap B)$. 然而已知 $A \subseteq A$ 以及 $A \subseteq B$, 故由 Corollary 3.2.4 得 $A \subseteq (A \cap B)$. 因此證明了 $(1) \Rightarrow (2)$. 另一方面, 由式子 (3.1) 我們知 $(A \cap B) \subseteq B$. 故由 $A = (A \cap B)$ 可得 $A \subseteq B$, 證明了 $(2) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Leftrightarrow (3)$: 假設 $A \subseteq B$, 我們要證明 $(A \cup B) = B$. 事實上由式子 (3.2) 我們知 $B \subseteq (A \cup B)$, 故僅要證明 $(A \cup B) \subseteq B$. 然而已知 $A \subseteq B$ 以及 $B \subseteq B$, 故由 Corollary 3.2.4, 得 $(A \cup B) \subseteq B$. 因此證明了 $(1) \Rightarrow (3)$. 另一方面, 由式子 (3.2) 我們知 $A \subseteq (A \cup B)$. 故由 $(A \cup B) = B$ 可得 $A \subseteq B$, 證明了 $(3) \Rightarrow (1)$. □

由 Definition 3.2.1 我們知道“交集”和邏輯的“and”有關, 而“聯集”和“or”有關. 所以我們很容易推得以下的關係:

(1) $A \cap B = B \cap A$.

(2) $A \cup B = B \cup A$.

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

由於 (3) 的關係, 以後多個集合的交集我們便省略括弧不必去強調哪幾個先作交集, 例如直接寫成 $A \cap B \cap C$. 同理由於 (4), 以後多個集合的聯集我們也省略括弧, 例如直接寫成 $A \cup B \cup C$.

利用邏輯 $\wedge, \vee$ 之間的分配性質, 即

$$((P \wedge Q) \vee R) \sim ((P \vee R) \wedge (Q \vee R)), \quad ((P \vee Q) \wedge R) \sim ((P \wedge R) \vee (Q \wedge R)),$$

我們有以下的性質.

Proposition 3.2.6. 假設 A, B, C 為 *sets,* 則

$$((A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad ((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Proof. 首先由 $(A \cap B) \subseteq A$ 以及 $C \subseteq C$ 利用 Proposition 3.2.3 得 $((A \cap B) \cup C) \subseteq (A \cup C)$. 同理知 $((A \cap B) \cup C) \subseteq (B \cup C)$. 再利用 Corollary 3.2.4 得 $((A \cap B) \cup C) \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$. 另一方面假設 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 表示 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$. 我們利用 proof in cases, 考慮 $x \in C$ 和 $x \notin C$ 這兩種情況. 若 $x \in C$, 則當然 $x \in (A \cap B) \cup C$. 而若 $x \notin C$, 則由 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$, 知 $x \in A$ 且 $x \in B$, 亦即 $x \in A \cap B$. 故此時仍有 $x \in (A \cap B) \cup C$. 也就是說不管哪種情況, 我們都可以由 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 推得 $x \in (A \cap B) \cup C$, 得證 $((A \cup C) \cap (B \cup C)) \subseteq (A \cap B) \cup C$. 故知 $((A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

至於 $((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 的證明, 首先由 $A \subseteq (A \cup B)$ 以及 $C \subseteq C$ 利用 Proposition 3.2.3 得 $(A \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap C)$, 同理我們有 $(B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap C)$. 故由 Corollary 3.2.4 知 $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap C)$. 另一方面, 若 $x \in (A \cup B) \cap C$, 表示 $x \in A \cup B$ 且 $x \in C$. 由 $x \in A \cup B$, 我們知 $x \in A$ 或 $x \in B$. 當 $x \in A$ 時, 由於已知 $x \in C$, 故得 $x \in A \cap C$. 此時自然有 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. 同理, 當 $x \in B$ 時, 可得 $x \in B \cap C$. 因此也有 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 得證 $((A \cup B) \cap C) \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$. 故知 $((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ □

Question 3.9. 試利用 *Proposition 3.2.5* 中 (1) $\Rightarrow$ (2) 的結果以及 *Proposition 3.2.6* 證明 *Proposition 3.2.5* 中 (2) $\Rightarrow$ (3).

3.2.2. Set Difference. 我們定義何謂 set difference.

Definition 3.2.7. 假設 A, B 為 sets, 定義 $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$, 稱之為 the *set difference* of B in A (B 在 A 中的差集). 若 X 為 universal set, 則令 $A^c = X \setminus A = \{x : x \notin A\}$ 稱之為 the *complement* of A (A 的補集).

注意 A^c 的定義原本應為 $\{x : x \in X \text{ and } x \notin A\}$, 但因 X 為 universal set, 我們知道所有元素皆在 X 中, 故省略 $x \in X$ 直接寫 $x \notin A$. 所以在使用補集時要特別注意是否已明確說明了什麼是宇集, 否則會有符號不唯一的問題. 例如若 $\mathbb{Q}$ 為宇集, 則 $\mathbb{Q}^c = \emptyset$, 而當宇集為 $\mathbb{R}$ 時, $\mathbb{Q}^c$ 就是所有無理數所成的集合了.

利用補集的符號, 依定義我們有 $A \setminus B = A \cap B^c$, 從這裡我們知道一般的情況 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 是不相同的. 事實上我們有 $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. 這是因為很明顯的 $A \cap A^c = \emptyset$ 且 $B \cap B^c = \emptyset$, 故知

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap (B \cap B^c) = \emptyset.$$

Example 3.2.8. 假設 $X = \{1,2,3,4,5,6\}, A = \{1,2,3\}, B = \{2,4,6\}$. 因 $1,3 \in A$ 且 $1 \notin B$ 且 $3 \notin B$, 知 $1,3 \in A \setminus B$. 雖然 $2 \in A$ 但是 $2 \in B$, 故 $2 \notin A \setminus B$. 得 $A \setminus B = \{1,3\}$. 同理可得

$B \setminus A = \{4,6\}$. 我們有 $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{1,3\} \cap \{4,6\} = \emptyset$. 又 $1,3,5 \in X$ 且 $1,3,5$ 皆不在 B 中, 故知 $1,3,5 \in B^c$. 而 $2,4,6 \in B$ 故 $2,4,6$ 皆不屬於 B^c, 得 $B^c = \{1,3,5\}$. 最後考慮 $A \cap B^c$ 得 $A \cap B^c = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3\} = A \setminus B$.

接下來我們看 set difference 和包含之間的關係. 若 A,B,C 為 sets 且 $A \subseteq B$, 此時知若 $x \notin B$, 則 $x \notin A$. 這是因為若 $x \in A$, 則由 $A \subseteq B$ 的假設知 $x \in B$, 故和 $x \notin B$ 相矛盾. 所以若已知 $A \subseteq B$ 則由 $x \in C \setminus B$, 我們知 $x \in C$ 且 $x \notin B$, 可得 $x \in C$ 且 $x \notin A$, 即 $x \in C \setminus A$. 由此知 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. 這個結果的反向是不正確的, 除非已知 $A \subseteq C$, 我們有以下之結果.

Proposition 3.2.9. 假設 A,B,C 為 *sets.* 若 $A \subseteq B$ 則 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

若又假設 $A \subseteq C$, 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

Proof. 由前面的探討知由 $A \subseteq B$ 可得 $C \setminus B \subseteq C \setminus A$ (此部分不需要 $A \subseteq C$ 的假設). 現若已知 $A \subseteq C$ 且 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$, 我們要證明 $A \subseteq B$, 即證明若 $x \in A$ 則 $x \in B$. 因為 $C \setminus B, C \setminus A$ 和 “not” 有關, 我們要用 contradiction method. 即假設 $x \in A$, 但 $x \notin B$, 推得矛盾. 因 $A \subseteq C$ 由 $x \in A$ 可得 $x \in C$, 但又假設 $x \notin B$, 故得 $x \in C \setminus B$. 因此由前提 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$, 得知 $x \in C \setminus A$, 亦即 $x \in C$ 且 $x \notin A$. 此與當初假設 $x \in A$ 相矛盾. 故知當 $x \in A$ 時不可能會 $x \notin B$, 得證 $A \subseteq B$. □

Question 3.10. 真的需要 $A \subseteq C$ 這個假設才能確定 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$ 嗎? 若沒有 $A \subseteq C$ 這個假設, 你能舉反例嗎?

特別的當 $C = X$ 為宇集時, 自然有 $A \subseteq C = X$, 故套用到 Proposition 3.2.9, 我們得 $A \subseteq B$ 若且唯若 $(X \setminus B) \subseteq (X \setminus A)$. 因此有以下之結果.

Corollary 3.2.10. 假設 A,B 為 *sets.* 則 $A \subseteq B$ 若且唯若 $B^c \subseteq A^c$.

從 Definition 3.2.7 我們可以看出 set difference 和邏輯的 “not” 有關, 所以我們也可推導出 set difference 以及交集, 聯集間的關係.

Proposition 3.2.11. 假設 A,B,C 為 *sets,* 我們有以下的性質.

(1) $(C \setminus (C \setminus A)) = (C \cap A)$. 特別的, 我們有 $(A^c)^c = A$.

(2) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. 特別的, 我們有 $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$.

(3) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. 特別的, 我們有 $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$.

Proof. 這些性質都可以利用前面邏輯相關的 equivalence 推導, 不過我們仍用一些集合的性質處理.

(1): 首先依定義若 $x \in C \setminus (C \setminus A)$ 表示 $x \in C$ 且 $x \notin C \setminus A$. 此時若 $x \notin A$, 表示 $x \in C \setminus A$ (因已知 $x \in C$), 而造成與 $x \notin C \setminus A$ 之矛盾, 故知 $x \in A$. 我們證明了若 $x \in (C \setminus (C \setminus A))$, 則 $x \in C$ 且 $x \in A$ (即 $x \in C \cap A$). 得證 $(C \setminus (C \setminus A)) \subseteq (C \cap A)$. 反之, 若 $x \in C \cap A$, 因此時 $x \in C$, 我們只要證明 $x \notin (C \setminus A)$, 便可得 $x \in C \setminus (C \setminus A)$. 然而若 $x \in (C \setminus A)$ 表示 $x \in C$ 且 $x \notin A$, 此