Function

這一章我們將介紹 function (函數). Function 可以說是要進入高等數學一定要學習的數學工具. 簡單的說函數可以幫助我們了解兩集合之間的關係. 更進一步的, 當我們要探討的集合有更豐富的結構時, 我們有興趣的函數就要求有更多的性質. 比方說在實數上, 由於實數有距離的概念, 我們可以談論所謂的連續函數, 可微函數. 而對於向量空間, 由於有線性組合的性質, 所以我們可以談論所謂的線性映射. 不過在這裡我們僅由集合的概念來探討最基本的函數性質, 也就是說不牽涉任何結構上的問題, 在這裡所談論的函數性質是適用於以後大家會學習的各式各樣函數. 本章中, 我們從最基本的函數定義出發, 介紹一些基本性質. 接著探討一些有特殊性質的函數, 即一對一以及映成函數. 最後我們會將這些概念運用在處理集合的計數問題.

5.1. Basic Definition

給定兩個 nonempty sets X,Y. 它們之間的 function 其實是 X,Y 之間的一種特殊的 relation. 這一種 relation, 給我們一個從 X 到 Y 的對應關係, 由於這種對應關係就如同一個機器經過某一程度的運作將 X 中的元素轉化成 Y 的元素, 所以英文稱之為 “function”. 從機器的觀點來看若 $f\subseteq X\times Y$ 是一個從 X 到 Y 的 relation, 怎樣才是一個好機器呢? 首先當然是每個要放入機器的元素都能產生出東西來, 所以我們要求對所有 $x\in X$, 皆存在 $y\in Y$ 使得 $(x,y)\in f$. 另外, 我們當然希望放入機器的元素都能產生固定的東西, 否則每次產生的東西都不相同, 那要這機器何用? 也就是說, 我們要求對所有 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in Y$ 使得 $(x,y)\in f$. 這個唯一性用比較好處理的數學寫法就是若 $(x,y)\in f$ 且 $(x,y')\in f$, 則 $y=y'$. 因此 function 的定義如下:

Definition 5.1.1. 假設 X,Y 為 nonempty sets 且 $f\subseteq X\times Y$, 為一個 from X to Y 的 relation. 若 f 滿足以下性質, 則稱 f 為一個 from X to Y 的 *function* (函數). 有時我們也稱 function 為 *mapping* 或 *map* (映射).

(1) 對所有 $x\in X$, 皆存在 $y\in Y$ 使得 $(x,y)\in f$.

(2) 若 $x\in X$, $y,y'\in Y$ 滿足 $(x,y)\in f$ 且 $(x,y')\in f$, 則 $y=y'$.

由於用 relation 的方法來表示 function 不容易感受它是一個有如“機器”的作用, 一般來說我們會用 $f:X\to Y$, 來表示 f 是一個從 X 到 Y 的 function. 而對於任意 $x\in X$, 我們用 $f(x)=y$ 來表示 x 這個元素放入 f 這一個“機器”後產生出 y 來. 也就是說 $f(x)=y$ 就表示 $(x,y)\in f$. 要注意當我們說 f 是一個 function 時必須清楚表達 f 是從哪個集合到哪個集合的 function, 否則無法確定是否會符合 (1), (2) 的性質 (請參考以下 Example 5.1.2). 所以用 $f:X\to Y$ 這樣的符號表示是必要的. 從機器的觀點來說 $f:X\to Y$, 清楚的表達了 f 這個機器是要放那些元素進去且會產生出哪一類的東西, 這樣的機器我們才會覺得是好機器. 因此這裡的 X,Y 特別重要. 這裡 X 就稱為 f 的 *domain* (定義域), 指的是所有可以放入這個機器的元素所成的集合. 而 Y 稱為 f 的 *codomain* (對應域), 就是說這個機器“可能”產生的元素所成的集合. 注意這裡我們用“可能”這個字眼, 是因為在 function 的定義中並沒有要求每個 Y 中的元素都可以找到 X 中的元素代入得到. 當我們拿到或自己設定了一個 function 後就必須說明它是一個 “well-defined function”, 也就是說要檢查它真的符合成為 function 的條件 (用比喻的說法就是說明它是一個好機器). 當然了, 這裡用“well-defined” 這個字眼只是一種強調的語氣, 所有的 function 都應該是 well-defined.

Example 5.1.2. 我們考慮以下幾種 relations, 看看哪一個是 well-defined function.

(A) 考慮 $X=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$, $Y=\mathbb{R}$ 以及 relation $f\subseteq X\times Y$ 定義為 $f=\{(x,y)\in X\times Y: y^2=x\}$. 這個 relation f 符合 function 的性質 (1), 因為對於任意 $x\in X$, 表示 $x\geq 0$, 故只要令 $y=\sqrt{x}$, 我們有 $y\in Y=\mathbb{R}$ 且 $y^2=\sqrt{x}^2=x$. 得證對於任意 $x\in X$, 存在 $y\in Y$ 使得 $(x,y)\in f$. 不過 f 並不滿足性質 (2). 例如我們有 $1^2=(-1)^2=1$, 故 $(1,1)\in f$ 且 $(1,-1)\in f$. 也因此知 f 不是 function.

(B) 考慮 $X=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$, $Y=\{y\in\mathbb{R}:y\leq 0\}$ 以及 relation $f\subseteq X\times Y$ 定義為 $f=\{(x,y)\in X\times Y:y^2=x\}$. 這個 relation f 符合 function 定義 (1) 的性質, 因為對於任意 $x\in X$, 表示 $x\geq 0$, 故只要令 $y=-\sqrt{x}$, 我們有 $y\in\mathbb{R}$ 且 $y\leq 0$, 即 $y\in Y$. 又 $y^2=\sqrt{x}^2=x$, 故知對於任意 $x\in X$, 存在 $y\in Y$ 使得 $(x,y)\in f$. 另外 f 也滿足性質 (2). 因為若 $x\in X$, $y,y'\in Y$ 滿足 $(x,y)\in f$ 且 $(x,y')\in f$, 表示 $y^2=x=y'^2$. 因此得 $(y-y')(y+y')=0$, 亦即 $y=y'$ 或 $y=-y'$. 現若 $x=0$, 我們有 $y=y'=0$. 而若 $x\neq 0$, 得 $y\neq 0$ 且 $y'\neq 0$, 此時因 $y,y'\in Y$, 我們有 $y<0$ 且 $y'<0$. 故知 $y=-y'$ 不可能成立, 得證 $y=y'$. 依此得證 $f:X\to Y$ 是 function.

(C) 若將 (B) 中的 X 改為 $X=\mathbb{R}$, 則 $f=\{(x,y)\in X\times Y:y^2=x\}$ 就不是 function. 這是因為 $-1\in X$, 但我們找不到 $y\in Y\subseteq\mathbb{R}$ 滿足 $y^2=-1$. 也就是說不存在 $y\in Y$ 滿足 $(-1,y)\in f$. 因此 f 不滿足性質 (1), 所以 f 不是 function. 另一方面, 若我們將 (B) 中的 Y 改為 $Y=\{y\in\mathbb{R}:y<0\}$, 則 $f=\{(x,y)\in X\times Y:y^2=x\}$ 也不是 function. 這是因為 $0\in X$, 但我們找不到 $y\in Y$ 滿足 $y^2=0$, 也就是說不存在 $y\in Y$ 滿足 $(0,y)\in f$. 因此 f 不是 function.

(D) 考慮 $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 以及 function $f:X\to Y$ 其定義為對任意 $x\in X$, 令

$$f(x)=\{y\in\mathbb{R}:y^2=x\}.$$

我們說明 f 是 well-defined function. 這是因為對任意 $x\in X=\mathbb{R}$, 我們可以將 x 區分為 $x>0, x=0, x<0$ 三種情況. 當 $x>0$ 時, 我們有 $f(x)=\{\sqrt{x},-\sqrt{x}\}$ 為 $\mathbb{R}$ 的 subset, 因此確實為 $Y=\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 中的元素. 又當 $x=0$ 時, 我們有 $f(0)=\{0\}$, 仍為 $Y=\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 中的元素. 而

當 $x<0$ 時, 我們有 $f(x)=\emptyset$, 亦為 $Y=\mathscr{P}(\mathbb{R})$ 的元素. 因此知對於任意 $x\in X$, 我們確實可找到 $\mathbb{R}$ 的 subset $A\in Y$ 使得 $(x,A)\in f$. 要注意, 在 $x<0$ 的情形, 我們有 $f(x)=\emptyset$, 也就是說在這情況之下, 存在 $\emptyset\in Y$ 使得 $(x,\emptyset)\in f$. 並不是說找不到 $y\in Y$, 使得 $(x,y)\in f$, 所以 f 事實上是符合性質 (1). 另外 f 也符合性質 (2). 這是因為如上面所述, 對任意 $x\in X$, 我們確實找到唯一的 $\mathbb{R}$ 的 subset A 滿足 $f(x)=A$. 要注意, 這裡當 $x>0$, 時 $f(x)$ 是 $\{\sqrt{x},-\sqrt{x}\}$ 這一個 Y 中的元素. 亦即我們有 $(x,\{\sqrt{x},-\sqrt{x}\})\in f$; 而不是 $(x,\sqrt{x})\in f$ 且 $(x,-\sqrt{x})\in f$. 因此 f 確實符合 (2) 的性質.

從 Example 5.1.2 的各個例子, 我們知道即使一樣的映射規則, 會由於定義域或對應域的不同, 影響其是否為一個函數. 也因此, 對於兩個函數 $f:X\to Y$ 和 $f':X'\to Y'$ 只有在 $X=X'$, $Y=Y'$ 且對於所有 $x\in X$, 皆有 $f(x)=f'(x)$ 的情形, 我們才稱 f 和 f' 為同樣的函數. 另外在 Example 5.1.2 (D) 的例子, 其實對應域比實際 f 會產生的元素所成的集合大了許多. 不過這並不影響它是一個函數的事實. 由於一般當我們定義一個函數時, 在實際的情況往往不容易描繪那些元素可以被該函數產生. 所以對應域的用意主要是大致上知道該函數會產生哪一類的東西即可. 以後當我們談論到映成函數時, 會再進一步討論這個問題.

在所有函數中, 有一個簡單但很重要的函數, 稱為 identity function. 簡單來說, 它是一個將定義域中每個元素自己映射到自己的函數. 其正式定義如下:

Definition 5.1.3. 假設 X 為 nonempty set. 定義 $\mathrm{id}_X:X\to X$, 為 $\mathrm{id}_X(x)=x$, $\forall x\in X$. id_X 是一個 function, 我們稱之為 the *identity function* on X.

Question 5.1. *假設 $f:X\to X$ 是一個 function. 將 f 視為 relation on X. 下面哪一個性質可以確保 $f:X\to X$ 是一個 identity function? 若有一項的性質無法推得 f 為 identity function, 試用 $X=\{1,2\}$ 的情況找到例子, 說明該性質無法推得 f 為 identity function.*

(1) *f is reflexive.*

(2) *f is symmetric.*

(3) *f is transitive.*

最後我們介紹幾個由給定的函數, 造出新的函數的方法. 其實給定一個函數 $f:X\to Y$, 我們只要改變定義域 X 或對應域 Y, 就可以得到“新”的函數. 不過在做這些改變時, 要注意仍需遵守函數的規則. 因此最簡單的情形就是, 對任意 X 的 nonempty subset X', 我們考慮 $f|_{X'}:X'\to Y$, 這樣的函數. $f|_{X'}$ 的定義為: 對所有 $x\in X'$, $f|_{X'}(x)=f(x)$. 也就是說 $f|_{X'}$ 只是將 f 的定義域限制縮小在 X' 這一個 subset, 而它的映射規則和 f 是一致的. 因此很容易從 f 為 X 到 Y 的 function 得到 $f|_{X'}$ 為 X' 到 Y 的 function. 我們稱 $f|_{X'}$ 為 the *restriction* of f to X'. 例如在 Example 5.1.2 (B) 中, 我們可以考慮 $X'=\{x\in\mathbb{R}:x>1\}$, 則 $f|_{X'}:X'\to Y$, 仍為一個 function. 我們也可以改變一個 function 的對應域. 當然了, 將對應域擴大沒有甚麼意義. 比較有意思的還是縮小對應域, 讓大家更精確地知道這個函數能產生那些元素. 但要注意不能將對應域縮得太小, 以至於定義域中有元素找不到對應域的元素對應 (例如 Example 5.1.2 (C) 的情況). 例如在 Example 5.1.2 (D) 中, 我們可以將對應域縮小為 $Y'=\{A\in\mathscr{P}(\mathbb{R}):\#(A)\leq 2\}$, 仍會使的 $f:X\to Y'$ 為一個 function.

當 $f:X\to Y$ 且 $g:Y\to Z$ 為 functions, 我們可以利用 f,g 造出一個從 X 到 Z 的 function, $g\circ f:X\to Z$. $g\circ f$ 的定義為: 對於任意 $x\in X$, $g\circ f(x)=g(f(x))$. 也就是說 $g\circ f(x)$ 這個 Z 中的元素就是先將 x 代入 f 得到 $f(x)$ 這個 Y 中的元素, 再將 $f(x)$ 代入 g 得到的 Z 中元素 $g(f(x))$. 用圖示就是 $x\xmapsto{f} f(x)\xmapsto{g} g(f(x))$. 我們說明 $g\circ f:X\to Z$ 確實為 function. 首先檢查性質 (1): 對於任意 $x\in X$, 由於 $f:X\to Y$ 為 function 故存在 $y\in Y$ 使得 $f(x)=y$. 此時對此 y, 因 $g:Y\to Z$ 為 function, 故存在 $z\in Z$, 使得 $g(y)=z$. 因此取此 $z\in Z$, 我們有 $g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z$. 接著檢查性質 (2), 也就是說若 $x\in X$ 則存在唯一的 $z\in Z$ 滿足 $g\circ f(x)=z$. 然而因 $f:X\to Y$ 為 function, 對於任意 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in Y$ 使得 $f(x)=y$. 現若有不同的 $z,z'\in Z$ 皆滿足 $g\circ f(x)=z$ 以及 $g\circ f(x)=z'$, 由於 $g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)$, 此即表示 $z,z'\in Z$ 皆滿足 $g(y)=z$ 以及 $g(y)=z'$. 此與 $g:Y\to Z$ 為 function 之假設相矛盾, 故知 $z=z'$. 由於 $g\circ f:X\to Z$ 確實為函數, 我們稱此函數為 f 和 g 的 *composite function* (合成函數). 而形成合成函數的這個動作稱為 *composition*.

要注意, 合成函數在合成時, 必需開始的第一個函數所產生的元素要落在第二個函數的定義域中才能合成. 也就是說若第一個函數的對應域包含於第二個函數的定義域, 我們就可以將它們合成. 不過由於擴大對應域, 並不影響函數的取值, 所以在這裡為了方便起見, 我們設定第一個函數的對應域等於第二個函數的定義域. 另外要注意的是合成函數的寫法. 雖然我們寫字是從左至右, 但是寫函數代入的過程是從右到左. 例如將 x 代入 f 得 $f(x)$, 而將 $f(x)$ 代入 g 得 $g(f(x))$. 因此在書寫合成函數時是先動作的函數寫在右邊, 而後動作的寫在左邊, 不要弄錯了.

Example 5.1.4. 假設 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$, $Z=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. 若 $f:X\to Y$ 的定義為: $f(1)=a,f(2)=a,f(3)=c$ 且 $g:Y\to Z$ 的定義為: $g(a)=\gamma,g(b)=\beta,g(c)=\gamma,g(d)=\alpha$, 則 $g\circ f:X\to Z$ 的定義為: $g\circ f(1)=g(f(1))=g(a)=\gamma$, $g\circ f(2)=g(f(2))=g(a)=\gamma$, $g\circ f(3)=g(f(3))=g(c)=\gamma$.

回顧一下 identity function 就是將每個元素固定不變的函數, 所以它和其他的函數合成, 有個 “特殊的效果”, 就是保持原函數不變. 我們有以下的性質.

Lemma 5.1.5. 假設 $f:X\to Y$ 是一個 *function*. 對於 X 上的 *identity function* $\mathrm{id}_X:X\to X$ 以及 Y 上的 *identity function* $\mathrm{id}_Y:Y\to Y$, 我們有以下性質:

$$f\circ\mathrm{id}_X=f,\quad \mathrm{id}_Y\circ f=f.$$

Proof. 首先檢查 $f\circ\mathrm{id}_X$ 和 f 有相同的定義域以及相同的對應域. 由於 $\mathrm{id}_X:X\to X$ 而 $f:X\to Y$, 所以依合成函數的定義, 我們有 $f\circ\mathrm{id}_X:X\to Y$. 現對任意 $x\in X$, 我們有 $f\circ\mathrm{id}_X(x)=f(\mathrm{id}_X(x))=f(x)$. 得證 $f\circ\mathrm{id}_X=f$.

$\mathrm{id}_Y\circ f$ 和 f 也有相同的定義域以及相同的對應域. 這是因為 $f:X\to Y$ 而 $\mathrm{id}_Y:Y\to Y$, 所以依合成函數的定義, 我們有 $\mathrm{id}_Y\circ f:X\to Y$. 現對任意 $x\in X$, 我們有 $\mathrm{id}_Y\circ f(x)=\mathrm{id}_Y(f(x))$. 因為 $f(x)\in Y$, 故有 $\mathrm{id}_Y(f(x))=f(x)$. 得證 $\mathrm{id}_Y\circ f=f$. $\square$

要注意 composition 並沒有交換性. 也就是說若 $f:X\to Y$ 且 $g:Y\to Z$ 為 functions, 則 $g\circ f$ 並不一定會等於 $f\circ g$. 當然了, 當 $Z\neq X$ 時, $f\circ g$ 根本就沒有定義 (不能合成), 所以它們不相等. 不過即使在 $Z=X$ 情形 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 仍有可能不相等.

Question 5.2. 考慮 $X=\{1,2\}$, 試舉例 $f:X\to X$, $g:X\to X$ 會使得 $g\circ f\neq f\circ g$.

雖然 composition 沒有交換律, 不過重要的是 composition 有所謂的結合律. 我們有以下的性質.

Proposition 5.1.6. 假設 X,Y,Z,W 皆為 *nonempty sets.* 若 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 以及 $h:Z\to W$ 為 *functions,* 則

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

Proof. 首先檢查 $h\circ(g\circ f)$ 和 $(h\circ g)\circ f$ 是否有相同的定義域和相同的對應域. 依定義 $g\circ f:X\to Z$, 所以 $h\circ(g\circ f):X\to W$. 得知 $h\circ(g\circ f)$ 的定義域為 X, 對應域為 W. 而 $h\circ g:Y\to W$, 所以 $(h\circ g)\circ f:X\to W$. 得知 $(h\circ g)\circ f$ 的定義域為 X, 對應域為 W.

接著就是說明, 對所有 $x\in X$ 皆有 $h\circ(g\circ f)(x)=(h\circ g)\circ f(x)$. 依定義 $h\circ(g\circ f)(x)$ 為將 $g\circ f(x)$ 代入 h 所得的元素 $h((g\circ f)(x))$. 然而 $g\circ f(x)=g(f(x))$, 故有

$$h\circ(g\circ f)(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x))).$$

也就是說 $h\circ(g\circ f)(x)$ 就是將 x 代入 f 所得的元素 $f(x)$, 再代入 g 後所得的元素 $g(f(x))$, 最後再代入 h 得 $h(g(f(x)))$. 同理 $(h\circ g)\circ f(x)$ 為將 $f(x)$ 代入 $h\circ g$ 所得的元素 $(h\circ g)(f(x))$. 然而 $(h\circ g)(f(x))$ 為將 $f(x)$ 代入 g 後所得的元素 $g(f(x))$ 再代入 h, 故有

$$(h\circ g)\circ f(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x))).$$

得證 $h\circ(g\circ f)$ 和 $(h\circ g)\circ f$ 為相同的函數. □

合成函數有結合律, 這在我們以後處理函數的合成問題時相當重要, 大家千萬要記住.

5.2. Image and Inverse Image

前面提過一個函數的對應域並沒有明確的指出該函數所能產生的元素有哪些, 所以我們有興趣知道該函數所產生的元素有哪些. 同樣的我們也有興趣知道函數限制在某個非空子集所能產生的元素, 所以引進了 image 的概念. 反過來說, 對於對應域的非空子集, 我們也對於定義域裡有哪些元素可以產生此子集的元素有興趣, 因此引進了 inverse image 的概念. 在以後的數學課程裡, image 和 inverse image 都是用來了解一個函數經常討論的課題.

簡單來說, 給定一個 function $f:X\to Y$ 以及 X 的 subset A, 所謂 A 在 f 的作用之下所得 image 就是收集 A 中的元素代入 f 後所得元素的集合. 我們有以下的定義.

Definition 5.2.1. 假設 $f:X\to Y$ 為 function 且 $A\subseteq X$. 定義 $f(A)=\{f(a):a\in A\}$, 且稱 $f(A)$ 為 the *image* of A under f. 特別的, the image of X under f, 即 $f(X)$ 稱為 f 的 *range* (值域).

從 $f(A)$ 的定義, 我們知道 $f(A)$ 是對應域 Y 的 subset. 這個定義很直接, 很容易讓人理解這個元素的組成元素. 不過它卻不容易掌握, 主要是很難描繪其元素 (請參閱以下 Example 5.2.2). 另外要注意的是, 有的同學可能會誤解 $f(a) \in f(A)$ 表示 $a \in A$. 其實這在邏輯上是錯誤的, 因為有可能有元素 $b \notin A$ 但是 $f(b) \in f(A)$. 一個比較好的寫法是, 直接將 $f(A)$ 裡的元素看成是 Y 中的元素. 也就是考慮 $y \in f(A)$, 表示存在 $a \in A$ 使得 $y = f(a)$. 反之, 若 $y \in A$ 且存在 $a \in A$ 使得 $y = f(a)$ 依定義就表示 $y \in f(A)$. 所以 $f(A)$ 有另一個等價的定義是

$$f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A, y = f(a)\}.$$

這個定義感覺較不自然, 不過反而比較容易讓我們掌握 $f(A)$ 的元素. 我們看以下的例子.

Example 5.2.2. 令 $X = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, 且 $f : X \to \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = (x+1)/(x-3)$, $\forall x \in X$. 很容易檢查, f 為 well-defined function. 我們要找出 f 的 range, 即 $f(X)$. 若直接用定義, 我們有 $f(X) = \{(x+1)/(x-3) : x \in X\}$, 很難讓我們知道 $f(X)$ 中到底有那些元素. 不過若用另一個等價定義, 對於任意 $y \in f(X)$, 表示 $y \in \mathbb{R}$ 且存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x) = (x+1)/(x-3)$. 也就是說 y 這個實數, 會使得方程式 $y = (x+1)/(x-3)$ 在 X 中有解. 注意此時 y 是實數, x 是未知數, 所以利用 $y(x-3) = x+1$ 可得 $(y-1)x = 3y+1$, 解得 $x = (3y+1)/(y-1)$. 要注意, 這個推演過程告訴我們的是, 若 $y \in \mathbb{R}$ 且存在 $x \in X$ 使得 $y = (x+1)/(x-3)$, 則 $x = (3y+1)/(y-1)$. 所以它僅告訴我們 x 可能的值, 並不保證 x 必定存在. 因此我們須代回驗證這樣的 x 確實可得 $f(x) = y$.

首先由 $x = (3y+1)/(y-1)$, 我們可知 $y \neq 1$. 事實上如果 $y = 1$, 則由假設存在 $x \in X$ 滿足 $1 = (x+1)/(x-3)$, 會得到 $x+1 = x-3$, 即 $1 = -3$ 之矛盾. 現假設 $y \neq 1$, 則當 $x = (3y+1)/(y-1)$, 我們有

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{\frac{3y+1}{y-1}+1}{\frac{3y+1}{y-1}-3} = \frac{\frac{4y}{y-1}}{\frac{4}{y-1}} = \frac{4y}{4} = y.$$

也就是說, 當 $y \neq 1$ 時, 確實存在 $x = (3y+1)/(y-1) \in \mathbb{R}$ 使得 $(x+1)/(x-3) = y$. 我們要確認此時 $x \neq 3$, 才能確定 $x \in X$. 然而若 $x = (3y+1)/(y-1) = 3$, 表示 $3y+1 = 3y-3$, 即得 $1 = -3$ 之矛盾, 故知 $x \in X$. 我們證得了, 當 $y \neq 1$ 時, 存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$. 又知當 $y = 1$ 時不可能找到 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$. 因此得 $f(X) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

接下來, 我們探討有關 image 的性質.

Lemma 5.2.3. 假設 $f : X \to Y$ 為 *function* 且 A, B 為 X 的 *subsets.* 若 $A \subseteq B$, 則 $f(A) \subseteq f(B)$.

Proof. 依定義, 若 $y \in f(A)$, 表示存在 $a \in A$, 使得 $y = f(a)$. 此時因 $A \subseteq B$, 我們有 $a \in B$. 也就是此時考慮 $a \in B$ 會使得 $y = f(a)$, 故 $y \in f(B)$. 得證 $f(A) \subseteq f(B)$. □

現若考慮 X 任意兩個 subsets A, B, 我們有 $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$. 故利用 Lemma 5.2.3, 可得 $f(A) \subseteq f(A \cup B)$ 且 $f(B) \subseteq f(A \cup B)$. 因此由 Corollary 3.2.4, 得 $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. 反之, 若 $y \in f(A \cup B)$, 表示存在 $x \in A \cup B$, 使得 $y = f(x)$. 此時, 若 $x \in A$, 則得 $y = f(x) \in f(A)$,