

# 大學線性代數初步

李華介

國立台灣師範大學數學系

---

# 前言

本講義主要目的是針對數學系大一學生介紹有關線性代數基本的理論，大致上僅談論實係數的向量空間。

一般經驗上大一學生會覺得線性代數學習起來會比微積分吃力，主要是因素可能是在高中時期學習有關線性代數部分主要著重於操作而較少論證。這一點在大學線性代數中就較不同了。不過經驗上也告訴我們當學生到三大四時（因準備研究所考試）再重新溫習線性代數時，會覺得它不再那麼難以親近。由此可知大學時期的線性代數其理論並不難懂，較大的障礙是要開始學習數學的論證。這個障礙或許到三大四一些數學思維較成熟時稍可解除，不過對一些同學來說可能為時已晚，畢竟線性代數的理論或概念與其他課程都脫不了關係。基於這個原因寫下這份講義，希望藉由較平易近人的方式介紹線性代數也慢慢引導熟悉數學的論證方式。本講義希望以淺顯易懂為主旨，而不是生動有趣。畢竟有些事情要說明清楚就會顯得囉唆，當然就不有趣了。

研讀本講義的同學要有心理準備，本講義是針對數學系學生而寫，自然偏重於整個線性代數的理論架構。對於線性代數在其他領域的應用幾乎沒有著墨。我們依循一貫的原則就是理論清楚了，接下來的應用或推廣就不難了。所以對應用有興趣的同學應再參考其他的參考書籍。另外本講義並未提供習題，不過在某些概念講述之後有時會提供一些問題（Question）。這些問題幾乎是檢視觀念是否正確或是對內容是否了解，大部分問題若觀念已清楚應可以立即回答。所以這些問題的份量仍不及一般習題，對熟習線性代數所給予的訓練。針對這一點，請欲學習好線性代數的同學務必參閱一般線性代數書籍的習題，自行磨練。

本講義雖然主要以中文撰寫，不過當涉及定義或專有名詞時，為免翻譯的困擾將以英文取代。因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現，若有不便請見諒。

本講義編寫費時，編寫完後並未經過嚴謹的校對。疏漏在所難免，雖不至於有理論性上嚴重的錯誤，但讀者仍應注意不宜概括全收。若發現錯誤，歡迎提出寶貴的意見。

# Systems of Linear Equations

這一章要探討的是多元一次的聯立方程組。我們依然利用大家熟悉的加減消去法（或高斯消去法）來處理這類方程組。不過我們不再只關心如何解特定的聯立方程組，而會更著重於有系統地探討一般聯立方程組解的情況的理論。我們會用矩陣來表示一個聯立方程組，不過這裡的矩陣僅是為了方便起見而使用，不會涉及矩陣的性質。至於真正矩陣的運算及性質，我們留待下一章再詳述。

## 2.1. 解一次聯立方程組

所謂  $n$  元一次的方程式就是有  $n$  個未知數 (variable) 的一次方程式 (linear equation)。例如  $2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 1$  就是一個 4 元一次的聯立方程組（當然也可看成是 5 元或更高元）。 $n$  元一次的方程式抽象的表示法就是

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中這些  $a_1, \dots, a_n$  和  $b$  都是實數，而這些  $x_i$  表未知數。當我們有多個  $n$  元一次的方程式要討論它們的共同解時，就稱為解一次聯立方程組 (system of linear equations)。一般抽象的表示法

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

表示有  $m$  個  $n$  元一次方程式所成的方程組。這裡  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$  表示第一個方程式， $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$  表示第二個方程式，而當  $1 \leq i \leq m$  時，第  $i$  個方程式就是  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ ，所以最後一個（即第  $m$  個）方程式就是  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$ 。這裡  $a_{ij}, b_i$  皆為實數，這些實數才是真正影響到聯立方程組

的因素, 所以我們也可特別把它們標明出來, 令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

然後將上面的聯立方程組用  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  來表示. 矩陣  $A$  中的每一個  $a_{ij}$  稱為  $A$  的一個 *entry*. 因為  $A$  的每一個 entry 對應到聯立方程組中某個未知數的係數, 通常我們會稱矩陣  $A$  為此聯立方程式的係數矩陣. 一個矩陣的一個橫排稱為一個 row (列), 而一個豎排稱為一個 column (行). 我們算 row 時是從上而下來的, 也就是說最上面的一個 row 稱為第一個 row, 下一個 row 稱為第二個 row, 依此類推. 而算 column 是由左而右來數的, 也就是說最左邊的一個 column 稱為第一個 column, 再往右一個 column 稱為第二個 column, 依此類推. 大家可以看出矩陣  $A$  的 row 對應的就是此聯立方程組的方程式, 第一個 row 對應到第一個方程式, 第二個 row 對應到第二個方程式, 依此類推. 而 column 對應到的是方程組的未知數, 第一個 column 對應到的是未知數  $x_1$  的係數, 第二個 column 對應到的是未知數  $x_2$  的係數, 依此類推. 因為這裡是由  $m$  個方程式而且每個方程式有  $n$  個未知數所組成的聯立方程組, 所以  $A$  共有  $m$  個 row 以及  $n$  個 column, 我們稱這樣的矩陣為  $m \times n$  matrix. 注意這裡  $\mathbf{x}$  表示是一個未知的向量而且我們將向量  $\mathbf{x}, \mathbf{b}$  都寫成 column vector (行向量) 是為了配合將來矩陣乘法的寫法. 目前大家只要記住這也是聯立方程式的一種表示法即可.

例如解聯立方程組

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 9x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= 6 \end{aligned} \tag{2.1}$$

我們就可以表成

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

注意這裡係數矩陣多出  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  這個 column 因為  $x_3$  的係數為 0.

為何要探討解多元一次聯立方程組呢? 事實上解多元一次聯立方程式和線性代數的許多問題息息相關. 例如在 1.3 節中我們提到 span 的概念. 若  $\mathbf{u} = (1, -1, 2, 2), \mathbf{v} = (3, 1, -1, 2)$  我們要問  $\mathbf{w} = (1, 0, 1, 0)$  是否在  $\text{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  中就等同於問是否存在  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  使得  $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$ . 利用向量相等的定義, 這表示

$$(1, 0, 1, 0) = c_1(1, -1, 2, 2) + c_2(3, 1, -1, 2).$$

亦即要解

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

這一聯立方程組. 又如要問哪些向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  會同時滿足  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$  且  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ , 就等同於要解聯立方程組

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

將來我們還會碰到許多和解聯立方程組有關的問題, 這裡我們就不再多談而將重點放在如何解一個多元一次聯立方程組.

過去學習解一次聯立方程組的方法不外加減消去法或高斯消去法, 它們的原理都是一樣的, 即利用以下三種基本方法:

- (1) 變換式子的順序
- (2) 將某一式乘上一非零實數
- (3) 將某一式乘上一實數後加到另一式上

利用這三種基本方法將方程式的某些變數消去, 最後求出解來. 當然這裡有些問題是要探討的: 第一就是要消到甚麼地步才可確認可求出解來? 第二就是為什麼經過這些過程所得的解就會是原方程組的解? 在本節中我們將先介紹一個較有系統的方法解聯立方程組的步驟, 讓大家知道何時就可確認此方程組有解或無解, 且有解時如何求解. 下一節我們再說明為何每一個聯立方程組都可以利用這個方式找到其解集合.

當我們要解

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

這一個聯立方程組時, 先寫出如下的 augmented matrix (增廣矩陣)

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

例如式子 (2.1) 中的聯立方程組所對應的 augmented matrix 為

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 6 \end{array} \right]$$

換言之, 若我們要解  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  這一個聯立方程組, 就要寫下  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$  這一個 matrix. 反之一個 augmented matrix  $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$  就對應到一個聯立方程組  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

接下來我們將如加減消去法的三種步驟, 利用所謂的 elementary row operation (基本列運算) 處理這個 augmented matrix. 所謂 elementary row operation 即表示對矩陣進行如下三種的列運算:

- (1) 將矩陣的某兩個 row 對調
- (2) 將矩陣的某一個 row 乘上一非零實數
- (3) 將矩陣的某一個 row 乘上一實數後加到另一個 row.

大家應很容易看出一個 augmented matrix 經過以上這三種列運算後所得的 augmented matrix 所對應的聯立方程組就是前面所提加減消去法的三種步驟所得的方程組。我們的目的是要將 augmented matrix  $[A | \mathbf{b}]$  中的係數矩陣  $A$  利用這三種 elementary row operation 化成所謂的 *echelon form*。

我們先解釋一下何謂 echelon form。首先我們將矩陣每一個 row 從左到右來看第一個不為 0 的項稱為這個 row 的 *leading entry*。因為係數矩陣中的每一個 entry 對應到聯立方程組中某個 variable 的係數，所以 leading entry 若是 variable  $x_i$  的係數，我們就說這個 leading entry 發生在  $x_i$  的位置。要注意，這也等同於這個 leading entry 是位於從左到右算來第  $i$  個 column。例如矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第一個 row 的 leading entry 為 1 不過因為第一個 row 還有其他位置 1，所以我們特別要說明第一個 row 的 leading entry 發生在  $x_1$  的位置，而第二個 row 和第三個 row 的 leading entry 分別為 5 和 1 且發生的位置皆在  $x_3$ 。

所謂一個矩陣是 echelon form 表示這個矩陣沒有 leading entry 的 row (即該 row 每一項皆為 0) 必需在最下方，而有 leading entry 的 row 其 leading entry 所在位置從上到下來看是往右移的。換言之，若上一個 row 的 leading entry 所在的位置是  $x_i$ ，而下一個 row 的 leading entry 是  $x_j$ ，則必需  $i < j$ 。例如上一個矩陣並非 echelon form，因為第 3 個 row 和第 2 個 row 的 leading entry 的位置皆為  $x_3$ ，並未右移。另外矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

都不是 echelon form，因為前一個矩陣全為 0 的 row 並未置於最下方，而後一個矩陣第 3 個 row 的 leading entry 在第 2 個 row 的 leading entry 的左方。至於矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

就是 echelon form。當一個矩陣是 echelon form 時，我們稱每一個 row 的 leading entry 為 *pivot*，而 pivot 所在的位置我們稱為 *pivot variable*。

當我們將 augmented matrix  $[A | \mathbf{b}]$  利用 elementary row operation 將之化成  $[A' | \mathbf{b}']$  且  $A'$  為 echelon form 後， $A'$  有兩種情形。一種情形為  $A'$  每一個 row 皆不全為 0；另一種為  $A'$  有些 row 全為 0。我們分別依這兩種情形來討論聯立方程組的解。

- (1)  $A'$  每一個 row 皆不全為 0：此時聯立方程組為 *consistent*，即一定有解。我們又可細分成兩種情況。

- (a) 第一種情況是每一個變數 (variable)  $x_i$  皆為 pivot variable. 亦即 pivot 的個數等於方程組未知數的個數 (即係數矩陣  $A$  的 column 個數). 例如

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

此時 echelon form 的 pivot variable 分別為  $x_1, x_2, x_3$  恰就是聯立方程組的未知數  $x_1, x_2, x_3$ . 在這種情況之下此聯立方程組會有唯一解, 而且我們可利用從下往上“代回”的方式求得解. 例如前面的 augmented matrix 所對應的聯立方程組為

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

所以我們從最下面的  $-x_3 = 1$  可得  $x_3 = -1$ . 再將  $x_3 = -1$  代入其上一式  $3x_2 + x_3 = 2$ , 得  $3x_2 - 1 = 2$ , 即  $x_2 = 1$ . 最後將  $x_3 = -1, x_2 = 1$  代入  $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ , 得  $x_1 = 2$ . 故得其解為  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$ .

- (b) 第二種情況是有些 variable  $x_i$  不是 pivot variable. 也就是方程組未知數的個數多於 pivot 的個數. 例如

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

此時 echelon form 的 pivot variable 分別為  $x_1, x_2, x_4$  少於立方程組的未知數  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . 在此情形之下此聯立方程組會有無窮多解. 要得到這種方程組所有的解, 首先我們要找到 *free variables*. 所謂 free variable 指的是方程組不是 pivot variable 的 variable. 例如前面這個例子,  $x_3$  就是 free variable. Free variable 意指它可以任意取值, 所以找到 free variables 後你可以給它們任意的參數, 然後再利用如上一情況中由下往上代回的方式找到聯立方程組所有的解. 例如上一個 augmented matrix 所對應的聯立方程組為

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned}$$

首先令 free variable  $x_3$  為一參數  $t$  (表示它可以是任意實數  $t \in \mathbb{R}$ ). 接著我們從最下面的  $-x_4 = 1$  可得  $x_4 = -1$ . 再將  $x_3 = t, x_4 = -1$  代入其上一式  $3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$ , 得  $3x_2 + 3t - 1 = 2$ , 即  $x_2 = 1 - t$ . 最後將  $x_2 = 1 - t, x_3 = t, x_4 = -1$  代入  $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$ , 得  $x_1 = 2 - t$ . 故得其解為  $x_1 = 2 - t, x_2 = 1 - t, x_3 = t, x_4 = -1$ , 其中  $t$  為任意實數. 因為  $t$  可以是任意實數, 由此我們也知此方程組有無窮多解.

- (2)  $A'$  有些 row 全為 0: 此時聯立方程組可能無解, 我們分成兩種情況:

(a)  $A'$  有一個 row 全為 0 但  $\mathbf{b}'$  在該 row 不為 0. 例如

$$[A' | \mathbf{b}'] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$A'$  最後一個 row 皆為 0, 但  $\mathbf{b}'$  在該 row 的位置為 1. 在此情形之下聯立方程組為 *inconsistent*, 即無解. 例如上一個 augmented matrix 其最後一個 row 所對應的方程式為

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

但不管  $x_1, x_2, x_3$  代任何的實數都無法滿足  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ , 所以此方程組無解.

(b)  $A'$  全為 0 的 row,  $\mathbf{b}'$  在該 row 亦為 0. 例如

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & \\ 0 & 3 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

這兩個 augmented matrices 皆為這種情形. 在此情形之下聯立方程組一定是 consistent. 事實上在此情形我們可以忽略全為 0 的 row, 例如前兩個 augmented matrices 所對應的方程組和

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & \\ 0 & 3 & 2 & \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

所對應的方程組一樣. 所以我們可依前面 (1)  $A'$  每一個 row 皆不全為 0 的情況找出聯立方程組所有的解.

我們要強調, 絕不會有 pivot 的個數多於方程組 variables (未知數) 的個數的情形發生. 這是因為當係數矩陣  $A$  是 echelon form 時, 每一個 column 最多僅能有一個 pivot (因為不能有兩個 leading term 在同一個位置), 所以 pivot 的個數不能多於 column 的個數. 而  $A$  的 column 個數表示的就是此聯立方程組 variables 的個數, 因此 pivot 的個數不會多於 variables 的個數. 另一方面依定義每一個 row 最多僅能有一個 pivot, 所以 pivot 的個數也不會多於該方程組的方程式個數 (即係數矩陣 row 的個數).

**Question 2.1.** 考慮一個由  $n$  個 variables 的  $m$  個方程式所組成的聯立方程組. 試說明前面討論 (1)(a) 的情形只有在  $m = n$  的時候才有可能發生; 而 (1)(b) 的情形只有在  $m < n$  的情形才有可能發生;

在這一節中我們介紹解一次聯立方程組  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的步驟. 也就是先將 augmented matrix  $[A | \mathbf{b}]$  利用 elementary row operations 化成  $[A' | \mathbf{b}']$  其中  $A'$  為 echelon form 的情形. 再利用上面談論的情況找出聯立方程組的解. 下一節中我們將說明為何可利用 elementary row operations 將  $A$  變成 echelon form  $A'$ , 且要說明為何這樣所得的解便是原方程組的解.



## 2.2. Elementary Row Operations

前一節中我們知道要解一個聯立方程組  $Ax = b$ , 可以先將 augmented matrix  $[A | b]$  經由一系列的 elementary row operations 化成  $[A' | b']$  其中  $A'$  為 echelon form 後再求解. 在本節中我們要說明為何經由 elementary row operations 我們可以將一個矩陣化為 echelon form 且解釋為何經由 elementary row operations 後所對應的聯立方程組與原方程組會有相同的解集合.

我們利用數學歸納法來說明為何一定可以將一個矩陣化為 echelon form. 或許有些人會對這裡數學歸納法處理的方式覺得奇怪, 不過若能仔細體會其真意, 會發現這是最好的處理方式. 我們是對矩陣的 row 的個數作數學歸納法. 先說明所有只有一個 row 的矩陣一定是 echelon form, 然後利用這件事實證明所有有兩個 row 的矩陣皆可利用 elementary row operations 化為 echelon form. 再利用兩個 row 的矩陣會成立的事實證明有 3 個 row 的矩陣也可利用 elementary row operations 化為 echelon form, 如此一直下去我們可證得有 4, 5, 6, ... 個 row 的矩陣會成立. 不過這樣的方法我們可以證得有特定個數的 row 的矩陣會成立 (例如 10 個 row), 但無法證得一般的情形 (即任意個數的 row). 此時數學歸納法是最好的論證工具了. 若我們能知道有  $k$  個 row 的矩陣一定能利用 elementary row operations 化為 echelon form 這個事實且利用這個事實證得有  $k+1$  個 row 的矩陣一定能利用 elementary row operations 化為 echelon form, 這就表示當我們知道有一個 row 的矩陣能利用 elementary row operations 化為 echelon form 就能推得有兩個 row 的矩陣能利用 elementary row operations 化為 echelon form, 也進而推得有 3 個 row 的矩陣亦成立, 再進而推得有 4 個 row 的矩陣亦成立, 如此一直下去當然可知任意的矩陣皆能利用 elementary row operations 化為 echelon form.

由於這裡的論證不容易說明清楚, 我們先由一個例子來說明. 考慮一個有 3 個 row 的矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

要將之化為 echelon form 首先第一個 row 必需是 leading entry 的位置在最左邊, 所以我們利用將第一, 二兩個 row 交換的 elementary row operation 將此矩陣變換為

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由於第三個 row 的 leading entry 位置與第一個 row 相同所以須將此位置的數消掉. 利用第一個 row 乘上  $-2$  加到第三個 row 的 elementary row operation 將此矩陣變換為

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

如此一來第一個 row 以下的各 row 的 leading entry 所在位置都在第一個 row 的 leading entry 所在位置的右方. 接下來我們可以不再管第一個 row 而處理第一個 row 以下的部份.

此部份是一個僅有兩個 row 的矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

若我們知道變換兩個 row 的矩陣成 echelon 的方法, 直接套用就可以完成了. 事實上我們就是將上面的方法再處理一遍, 將第一個 row 乘以 2 加到第二個 row 即可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

這一個 echelon form. 要注意我們故意忽略原來矩陣的第一個 row 的原因就是為了能套用數學歸納法的假設 (即將 row 的個數變少). 事實上若用原來的矩陣, 我們是將矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

的第二個 row 乘以 2 加到第三個 row 得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

這一個 echelon form.

接下來我們處理一般的情形. 首先我們來看只有一個 row 的矩陣. 此時由於沒有任何的 row 在其下方所以依定義自然是 echelon form. 接著看有兩個 row 的矩陣. 首先注意依定義一個 echelon form 的第一個 row 其 leading entry (若有的話) 必在所有其他 row 的 leading entry 所在位置的左方. 所以我們在此有兩個 row 的矩陣挑出 leading entry 在最左方的一個 row (若兩個 row 的 leading entry 所在位置相同就任取一個 row) 利用 row 交換的 row operation 將之置於第一個 row. 接下來注意依定義下一個 row 的 leading entry 所在位置需在第一個 row 的 leading entry 的右方. 現若第二個 row 的 leading entry 所在位置和第一個 row 不同, 則因已知第一個 row 的 leading entry 所在位置在最左方, 第二個 row 的 leading entry 所在位置一定在第一個 row 的 leading entry 的右方, 故依定義此時已為 echelon form. 而若第二個 row 的 leading entry 所在位置和第一個 row 相同, 我們可將第一個 row 乘以  $-b/a$ , 其中  $a$  為第一個 row 的 leading entry 而  $b$  為第二個 row 的 leading entry, 再添加到第二個 row 上. 如此一來第二個 row 原本的 leading entry 所在位置變為 0, 故其 leading entry 所在位置往右移了, 依定義此時為 echelon form.

我們可以如法泡製處理有 3 個 row 的矩陣, 但由於要使用數學歸納法, 此時我們可直接假設我們已處理到有  $k$  個 row 的矩陣了, 亦即有  $k$  個 row 的矩陣皆可利用 elementary row operation 化為 echelon form. 現在我們要處理有  $k+1$  個 row 的矩陣. 如前面的方法, 首先我們將 leading entry 的位置在最左邊的那個 row 利用兩 row 互換的 row operation 將之置於第一個 row. 假設此時第一個 row 的 leading entry 為  $a$ . 接下來我們將 leading entry 的位置與第一個 row 的 leading entry 位置一樣的 row 挑出, 若該 row 的 leading entry 為  $b$ , 我們便將第一個 row 乘上  $-b/a$  後加到該 row 上. 如此一來該 row 的 leading entry 所在位置便往右移了. 一直重複此步驟, 直到第一個 row 以外的 row 其 leading entry 所在位置皆與第一個 row 的 leading entry 所在位置相異. 注意, 此時第一個 row 以下的各 row 其

leading entry 所在位置皆在第一個 row 的 leading entry 所在位置的右方. 若我們不看第一個 row, 所剩下的是一個有  $k$  個 row 的矩陣, 所以利用前面已知有  $k$  個 row 的矩陣皆可利用 elementary row operations 化為 echelon form, 我們可以利用 elementary row operations 將此矩陣第一個 row 以下的部份化為 echelon form. 但此時因各個 row 的 leading entry 所在位置皆在第一個 row 的 leading entry 所在位置的右方, 所以整個矩陣亦為 echelon form. 故得證所有矩陣皆可利用 elementary row operations 化為 echelon form. 大家或許注意到我們在化成 echelon form 的過程皆沒有用到將某個 row 乘上一非 0 實數這一個 elementary row operation. 事實上在化成 echelon form 的過程確實不需要這一種 row operation, 不過它在以後要談的化為 “reduced” echelon form 的過程是需要的, 留待以後再談.

既然每一個矩陣都能用 elementary row operations 化為 echelon form, 接下來我們要說明的是利用 elementary row operation 處理後的聯立方程組其解集合不會改變. 要注意這裡指的是將 augmented matrix 用 elementary row operations 變換後的 augmented matrix 其對應的聯立方程組其解集合不會改變. 亦即聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  所對應的 augmented matrix  $[A \mid \mathbf{b}]$  若經一些 elementary row operations 後變換成  $[A' \mid \mathbf{b}']$ , 那麼其對應的聯立方程組  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  和原方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有相同的解集合. 不要誤以為是將係數矩陣  $A$  利用 elementary row operations 變換成  $A'$  後聯立方程組  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解集合和原方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解集合相同.

首先觀察若將一聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的 augmented matrix  $[A \mid \mathbf{b}]$  利用三種 elementary row operation 的任一種變換成  $[A' \mid \mathbf{b}']$  表示將原方程組利用加減消去法的三個基本方法之一將之變成方程組  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ . 然而方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  若利用加減消去法的三種方法 (即將兩式子對調順序或將某一式乘上某個非 0 實數或將一個式子乘上某個實數加到另一個式子) 變換成方程組  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ , 原來滿足  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一組解仍會滿足  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ . 換句話說  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解集合會包含於  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  的解集合. 不過加減消去法的三個基本方法是可以還原回去的, 也就是說方程組  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  也可以用加減消去法的三種方法還原回原方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . 因此  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  的解集合也會包含於  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解集合. 因此得證  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  和  $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$  會有相同的解集合. 我們證得了  $[A \mid \mathbf{b}]$  若經由一個 elementary row operation 後得  $[A' \mid \mathbf{b}']$ , 則它們所對應的聯立方程組會有相同的解集合. 因此若  $[A \mid \mathbf{b}]$  經由好幾次的 elementary row operation 變換成  $[A' \mid \mathbf{b}']$ , 它們所對應的聯立方程組當然也會有相同的解集合.

**Example 2.2.1.** Solve the linear system

$$\begin{array}{rcl} x_2 & -3x_3 & = -5 \\ 2x_1 & +3x_2 & -1x_3 = 7 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 = 10. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array} \right].$$

由於第二, 三 row 的 leading entry 在最左端. 但第二 row 的 leading entry 的值較小, 為了計算方便, 我們將之置於第一個 row, 即將一, 二 row 交換得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array} \right].$$

接下來由於第三 row 的 leading entry 也在  $x_1$  的位置需要消去, 所以將第一 row 乘上  $-2$  加到第三 row 得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right].$$

此時係數矩陣仍不是 echelon form, 需將第三 row 的  $x_2$  位置的 entry 消去. 故將第二 row 加至第三 row 得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right].$$

這是 echelon form. 由於係數矩陣沒有全為 0 的 row, 我們知此 linear system 為 consistent. 而又 pivot 的個數等於 variable 的個數, 故知此 linear system 的解唯一. 事實上, 最下面第三 row 表示  $-3x_3 = -9$ , 得  $x_3 = 3$ . 代入第二 row 表示的  $x_2 - 3x_3 = -5$ , 得  $x_2 = 4$ . 最後代入第一 row 表示的  $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ , 得  $x_1 = -1$ . 故知此 linear system 的解為  $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 4, 3)$ .

**Example 2.2.2.** Solve the linear system

$$\begin{array}{cccc} x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -1x_3 & -3x_4 & = & 7. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 7 \end{array} \right].$$

第二, 三 row 的 leading entry 需被消去. 故將第一 row 分別乘上  $-2, -1$  加到第二, 三 row 得

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & 5 \end{array} \right].$$

接下來由於第三 row 的 leading entry 需要消去, 所以將第二 row 乘上  $-1$  加到第三 row 得

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right].$$

這是 echelon form. 由於第三 row 表示  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 8$ , 知此 linear system 為 inconsistent.

**Example 2.2.3.** Solve the linear system

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 3 \\ -x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 5. \end{aligned}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 5 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right].$$

第二, 三, 四 row 的 leading entry 需被消去. 故將第一 row 分別乘上  $-2, -3, 1$  加到第二, 三, 四 row 得

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 9 \end{array} \right].$$

接下來第三, 四 row 的 leading entry 需要消去, 所以將第二 row 分別乘上  $-1, 1$  加到第三, 四 row 得

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

這是 echelon form. 由於係數矩陣全為 0 的第三, 四 row 全為 0, 知此 linear system 為 consistent.

事實上此 linear system 的 pivot variables 為  $x_1, x_2$ , 而 free variables 為  $x_3, x_4$ . 我們可以令  $x_4 = r, x_3 = s$ , 代入第二 row 表示的  $x_2 + 2x_3 - x_4 = -9$ , 得  $x_2 = -9 + r - 2s$ . 再代入第一 row 表示的  $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$ , 得  $x_1 = -14 + 3r - 5s$ . 故知此 linear system 的解為

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-14 + 3r - 5s, -9 + r - 2s, s, r), r, s \in \mathbb{R}.$$

通常我們習慣寫成 row vector 且將  $r, s$  提出. 故將解寫成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r, s \in \mathbb{R}.$$

在解 linear system 的過程中還可以進一步將 echelon form 化為所謂的 *reduced echelon form*. Reduced echelon form 事實上仍為 echelon form, 不過再加上兩個限制. 第一個限制是每一個 pivot 需為 1. 另一個限制為 pivot 的位置上方全為 0. 要注意, 依定義 echelon form 的 pivot 位置下方已全為 0 所以 reduced echelon form 每一個 pivot 所在的 column, 除了自己需為 1 外其他部分皆為 0. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

都不是 reduced echelon form 但是

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

就是 reduced echelon form. 每一個 echelon form 皆可利用 elementary row operations 換為 reduced echelon form. 這是因為, 若有一個 row 的 pivot 為  $a$  (注意依定義  $a \neq 0$ ), 我們只要將該 row 乘上  $1/a$ , 則該 row 的 pivot 便是 1 了. 例如上面  $A$  這一個 echelon form 若將第二個 row 乘上  $1/3$ , 就可得  $A'$  這一個 reduced echelon form. 當我們將每個 pivot 都變為 1 後, 就可利用將該 row 乘上某一實數加到另一個 row 的方法將 pivot 所在的 column 的其他部分化為 0. 例如上面  $B$  這一個 echelon form 若將第三個 row 分別乘上  $-3, -1$  加到第一個 row 和第二個 row, 得  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ . 再將第二個 row 乘上  $-1$  加到第一個 row, 就可得  $B'$  這一個 reduced echelon form. 注意一般我們都是從上而下將矩陣換成 echelon form, 不過得到 echelon form 後是從下而上將 echelon form 換成 reduced echelon form 較為方便.

既然每一個矩陣都可以經由 elementary row operations 化為 reduced echelon form, 所以我們可以利用這個方法求出聯立方程組的解. 化成 reduced echelon form 後由於每一個 row 除了該 row 的 pivot 外, 只剩 free variables (其他的 pivot variable 所在的 entry 皆為 0), 所以可以很快地看出解的形式. 例如方程組  $B'\mathbf{x} = \mathbf{0}$  為

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

因僅  $x_4$  為 free variable, 令  $x_4 = t$ , 代入第三 row 得  $x_3 = t$ . 代入第二 row 得  $x_2 = -3t$ . 最後由第一 row 得  $x_1 = 0$ . 故知解為  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -3t, t, t) = t(0, -3, 1, 1), t \in \mathbb{R}$ .

化成 reduced echelon form 雖然在最後可以很快地看出解的形式, 但一般來說化為 reduced echelon form 比僅化為 echelon form 所需的步驟多了許多, 所以利用 echelon form 來求解還是會比較快. 利用 echelon form 求解的方法一般稱為 *Gauss method*, 而用 reduced echelon form 求解一般稱為 *Gauss-Jordan method*.

**Example 2.2.4.** Example 2.2.1 的 linear system, 化成 echelon form 後為

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right].$$

將第三 row 乘以  $-1/3$  得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

再將第三 row 分別乘以 3, 1 加到第二, 第一 row 得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

接著將第二 row 乘以  $-3$  加到第一 row 得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

最後將第一 row 乘以  $1/2$  得 reduced echelon form

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right],$$

且馬上看出解為  $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 4, 3)$ .

Example 2.2.3 的 linear system, 化成 echelon form 後為

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

將第二 row 乘以  $2$  加到第一 row 得 reduced echelon form

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

因  $x_4, x_3$  為 free variables, 令  $x_4 = r, x_3 = s$ , 代入第二 row 得  $x_2 = -9 + r - 2s$ . 再代入第一 row 得  $x_1 = -14 + 3r - 5s$ .

## 2.3. The Rank of a Matrix

一個矩陣經由 elementary row operations 化為 echelon form 之後, 其中不全為 0 的 row 的個數 (即 pivot 的個數) 是固定的, 我們稱之為此矩陣的 rank. 其實一個一次聯立方程組其係數矩陣的 rank 可以提供我們有關此聯立方程組是否有解以及解是否唯一等訊息. 在本節中我們便是要探討這個課題.

雖然一個矩陣化為 echelon form 的方法不唯一, 其 echelon form 也不唯一, 不過同一個矩陣不管其化成的 echelon form 為何, 它的 pivot 的個數是固定的. 這個事實等到我們介紹好對的概念便會清楚了. 不過這裡我們先接受這個事實, 而給出以下的定義.

**Definition 2.3.1.** 假設  $A$  為一矩陣. 若  $A$  利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數為  $r$ , 我們稱  $r$  為  $A$  的 rank. 用  $\text{rank}(A) = r$  來表示.

考慮一次聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 其中  $A$  為  $m \times n$  matrix 且  $\text{rank}(A) = r$ . 現若  $r = m$ , 表示將  $A$  利用 elementary row operations 化為 echelon form 後每一個 row 皆不全為 0, 此即 2.1 節 (1) 的情形. 因此此時不管  $\mathbf{b}$  為何,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 consistent, 亦即聯立方程組必有解. 但若  $r < m$  (回顧一下  $r > m$  不可能發生) 會怎樣呢? 此時  $A$  利用 elementary row operations 化為 echelon form  $A'$  後, 有些 row 是全為 0 的. 因此有可能存在  $\mathbf{b}$  使得增廣矩陣  $[A | \mathbf{b}]$  利用 elementary row operations 化為  $[A' | \mathbf{b}']$  後,  $\mathbf{b}'$  對應到 echelon form  $A'$  中某個全為 0 的

row 的位置不是 0 (即 2.1 節 (2)(a) 的情形), 此時  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 inconsistent, 亦即聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  無解. 事實上只要任取一個  $\mathbf{b}'$  使得  $\mathbf{b}'$  對應到 echelon form  $A'$  中某個全為 0 的 row 的位置不是 0, 然後利用 elementary row operations 逆推回去所得的  $\mathbf{b}$  就會使得聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  無解. 也就是說當  $r < m$  時一定存在  $\mathbf{b}$  使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  無解. 所以我們有興趣於探討那些  $\mathbf{b}$  可以使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解, 那些會使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  無解.

給定  $m \times n$  matrix  $A$ , 如何決定哪些  $\mathbf{b}$  會使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解, 那些會使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  無解呢?

我們可以將  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$  視為  $\mathbb{R}^m$  中的未知向量, 然後考慮  $[A \mid \mathbf{b}]$  這一個增廣矩陣. 此時利用 elementary row operations 將  $A$  化成 echelon form  $A'$ , 同時便把  $[A \mid \mathbf{b}]$  化成了  $[A' \mid \mathbf{b}']$ .

注意由於我們是利用 elementary row operations, 此時  $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}$  上每一個位置  $b'_i$  都是以  $b_1, \dots, b_m$  為未知數的一次多項式. 由於假設  $\text{rank}(A) = r$ , echelon form  $A'$  的前  $r$  個 row 皆不全為 0, 而  $A'$  最後  $m - r$  個 row 皆全為 0. 因此要使得聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解, 由 2.1 節 (2) 的情形知, 等同於  $\mathbf{b}'$  最後  $m - r$  個位置  $b'_{r+1}, \dots, b'_m$  應為 0. 也就是說要使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

有解, 就等同於  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$  會滿足  $b'_{r+1}, \dots, b'_m$  所代表的  $m - r$  個以  $b_1, \dots, b_m$  為未知數的一次多項式皆為 0. 換言之, 使得聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解的  $\mathbf{b}$  必須滿足一組有  $m - r$  個以  $b_1, \dots, b_m$  為未知數的  $m$  元一次方程組. 我們有以下的結論.

**Proposition 2.3.2.** 給定一  $m \times n$  matrix  $A$  且假設  $\text{rank}(A) = r$ . 考慮以  $A$  為係數矩陣的聯立方程組.

- (1)  $r = m$  若且唯若對任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , 聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  一定有解.
- (2) 若  $r < m$ , 則存在一個  $(m - r) \times m$  的 matrix  $B$ , 使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解若且唯若  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$  為  $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$  的一組解.

由於在 Proposition 2.3.2 (2) 中的聯立方程組  $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$  的一組解  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$  會使得聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解, 反之當  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解時,  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$  就會是聯立方程組  $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$  的一組解. 因此我們稱此聯立方程組  $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$  為以  $A$  為係數矩陣的聯立方程組的 *constrain equations*. 要注意給定  $A$  其所對應的聯立方程組的 *constrain equations* 並不唯一, 但是不管是哪一組 *constrain equations*, 它們的解集合都會相同, 就是那些可以使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 consistent 的  $\mathbf{b}$  所成的集合.

**Example 2.3.3.** 考慮  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$  我們要找到以  $A$  為係數矩陣的聯立方程組的

*constrain equations*. 利用 elementary row operation, 我們可以得到  $\text{rank}(A) = 2$ , 所以  $A$  的 *constrain equations* 是一個  $(4 - 2) \times 2$  的矩陣所形成的聯立方程組.



首先考慮 augmented matrix  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 3 & 2 & -1 & b_2 \\ 1 & 4 & -3 & b_3 \\ 3 & -3 & 3 & b_4 \end{array} \right]$ . 將 1-st row 分別乘上  $-3, -1, -3$  加到 2-nd, 3-rd, 4-th rows 得  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 5 & -4 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 5 & -4 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 3b_1 \end{array} \right]$ . 最後將 2-nd row 乘上  $-1$  加到 3-rd row 得  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 5 & -4 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 3b_1 \end{array} \right]$ . 由此知  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$  會使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 consistent 若且唯若  $b_1, b_2, b_3, b_4$  會滿足 constrain equations

$$\begin{array}{cccc} 2b_1 & -b_2 & +b_3 & = 0 \\ -3b_1 & & & +b_4 = 0 \end{array}$$

所以令  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 此  $2 \times 4$  matrix 所形成的聯立方程式  $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$  就是以  $A$  為係數矩陣的聯立方程組的 constrain equations.

我們可以再解  $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$  得其解集合為  $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ . 也就是說會使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 consistent 的  $\mathbf{b}$  所成的集合為

$$\text{Span} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

**Question 2.2.** 假設  $A$  為  $m \times n$  matrix. 試說明當  $n < m$  時, 一定存在  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  使得聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 *inconsistent*. 也就是當未知數個數少於方程式個數時, 一定存在  $\mathbf{b}$  使得  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  無解.

接下來我們探討 rank 和解的個數的關係. 假設  $A$  為  $m \times n$  matrix 且  $\text{rank}(A) = r$ . 當  $r = n$  時, 表示  $x_1, \dots, x_n$  這  $n$  個 variable 皆為 pivot variable. 此時  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  是可能無解的 (即 2.1 節 (2)(a) 的情形); 不過若  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解, 則由於沒有 free variable,  $x_1, \dots, x_n$  的取值都是固定的, 所以  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解便會是唯一. 反之當  $r < n$ , 由於有  $n - r$  個 free variables, 當  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 consistent 時, 這些 free variables 任意取值都能得到一組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解, 故知有無窮多解. 由此我們可得以下的結果.

**Proposition 2.3.4.** 給定一  $m \times n$  matrix  $A$ . 假設  $\text{rank}(A) = r$  且假設聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 *consistent*.

- (1) 若  $r = n$ , 則聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有唯一解.
- (2) 若  $r < n$ , 則聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有無窮多解.

**Question 2.3.** 假設  $A$  為  $m \times n$  matrix. 試說明當  $n > m$  時, 對於  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  不可能僅有唯一解. 也就是當未知數個數多於方程式個數時, 聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  要不然無解; 要不然會有無窮多解.

有一種特殊形式的聯立方程組一定是 consistent, 就是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  這樣的 linear system. 因為  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  就是它的一組解. 我們特別稱  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  這樣的 linear system 為 *homogeneous system*. 我們有以下的結果.

**Corollary 2.3.5.** 給定一  $m \times n$  matrix  $A$ . 則  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有唯一解  $x_1 = \dots = x_n = 0$  若且唯若  $\text{rank}(A) = n$ .

一個 homogeneous system  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  一定有  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  這一組解, 我們稱這組解為  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的 *trivial solution*. 而除了  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  以外  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  若還有其他的解, 我們便稱那些解為  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的 *nontrivial solution*. 所以  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解唯一就等同於它沒有 nontrivial solution; 而解不唯一就等同於它有 nontrivial solution.

**Question 2.4.** 假設  $A$  為  $m \times n$  matrix. 試說明  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有 *nontrivial solution* 若且唯若  $\text{rank}(A) \neq n$ .

事實上當  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  是 consistent 時,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解和  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解是息息相關的. 具體來說, 若  $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$  和  $x_1 = c'_1, \dots, x_n = c'_n$  皆為聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一組解. 則由

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + \dots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + \dots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} a_{11}c'_1 + \dots + a_{1n}c'_n = b_1 \\ a_{21}c'_1 + \dots + a_{2n}c'_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c'_1 + \dots + a_{mn}c'_n = b_m \end{cases}$$

將相對應的式子相減得

$$\begin{aligned} a_{11}(c_1 - c'_1) + \dots + a_{1n}(c_n - c'_n) &= 0 \\ a_{21}(c_1 - c'_1) + \dots + a_{2n}(c_n - c'_n) &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}(c_1 - c'_1) + \dots + a_{mn}(c_n - c'_n) &= 0 \end{aligned}$$

也就是說  $x_1 = c_1 - c'_1, \dots, x_n = c_n - c'_n$  就會是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一組解. 同樣的道理, 若  $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$  為  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一組解而  $x_1 = u_1, \dots, x_n = u_n$  為  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一組解, 則  $x_1 = c_1 + u_1, \dots, x_n = c_n + u_n$  也會是  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一組解. 因此我們有以下的結論.

**Proposition 2.3.6.** 假設聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 *consistent* 且  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$  為其一組解. 則  $\mathbf{x} = \mathbf{c}'$  為  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一組解若且唯若  $\mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{c}'$  為  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一組解.

利用 Proposition 2.3.6, 我們馬上有以下之結果.

**Corollary 2.3.7.** 假設  $A$  為  $m \times n$  matrix. 下列敘述是等價的.

- (1) 若聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  為 *consistent* 則  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解唯一.
- (2)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  沒有 *nontrivial solution*.

$$(3) \text{ rank}(A) = n.$$

**Proof.** 要證明一系列 (多於兩個) 的敘述是等價, 我們不必證明每兩個敘述皆為等價. 只要證明 (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3) 以及 (3)  $\Rightarrow$  (1) 即可. 這並沒有少證到其他部分, 例如 (2)  $\Rightarrow$  (1) 就可由 (2)  $\Rightarrow$  (3) 以及 (3)  $\Rightarrow$  (1) 推得. 這是一個相當簡便的方法來證明一系列的 statement 是等價的, 也是在數學證明中常用的技巧.

(1)  $\Rightarrow$  (2): 利用反證法, 假設  $x_1 = u_1, \dots, x_n = u_n$  為  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的一組 nontrivial solution 而  $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$  為  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的一組解, 則由 Proposition 2.3.6 知  $x_1 = c_1 + u_1, \dots, x_n = c_n + u_n$  會是  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的另一組解. 此與  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解唯一相矛盾, 故知  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  沒有 nontrivial solution.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  沒有 nontrivial solution, 表示  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解唯一, 故由 Corollary 2.3.5 知  $\text{rank}(A) = n$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): 此為 Proposition 2.3.4 (1). □

最後我們綜合上面的結果處理當  $A$  為  $n \times n$  的方陣的情形.

**Corollary 2.3.8.** 假設  $A$  為  $n \times n$  square matrix. 下列敘述是等價的.

- (1) 對於任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  一定有解.
- (2) 對於任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  一定有解且解唯一.
- (3)  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  沒有 nontrivial solution.
- (4)  $\text{rank}(A) = n$ .

**Proof.** 要證明一系列的敘述是等價, 不一定要按照定理敘述的順序證明. 也時可以挑選較易證明的順序來證明. 不過要注意證明的路徑一定要形成一個回圈這樣證明才完整. 這裡我們要證明的路徑為 (1)  $\Rightarrow$  (4), (4)  $\Leftrightarrow$  (3), (4)  $\Rightarrow$  (2) 以及 (2)  $\Rightarrow$  (1).

(1)  $\Rightarrow$  (4): 由 Proposition 2.3.2 (1), 我們知對於任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  一定有解表示  $\text{rank}(A)$  等於  $A$  的 row 的個數, 故得  $\text{rank}(A) = n$ .

(4)  $\Leftrightarrow$  (3): 此為 Corollary 2.3.7 (3)  $\Leftrightarrow$  (2) 的情形.

(4)  $\Rightarrow$  (2): 當  $\text{rank}(A) = n$  表示  $\text{rank}(A)$  等於  $A$  的 row 的個數, 故由 Proposition 2.3.2 (1) 知對於任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  一定有解. 再利用 Corollary 2.3.7 (3)  $\Rightarrow$  (1) 得證其解唯一.

(2)  $\Rightarrow$  (1): (2) 的條件比 (1) 強, 此敘述當然成立. □

一般我們會將符合 Corollary 2.3.8 的  $n \times n$  matrix (即  $\text{rank}$  為  $n$ ) 稱為 nonsingular matrix, 而  $\text{rank}$  小於  $n$  的  $n \times n$  matrix 稱為 singular matrix.

## 2.4. 結論

在本章中我們學習解聯立方程組的技巧. 利用 elementary row operations 將 augmented matrix 中的係數矩陣化為 echelon form 後, 我們很快的可以知道此聯立方程組是否有解, 而有解時也可利用此 echelon form 完整的得到此聯立方程組所有的解. 由 echelon form 的解

法我們了解到 pivot 對聯立方程組是否有解以及解是否唯一有著重要的關連。在下一章，我們將介紹矩陣的運算，這些運算都可以和解聯立方程組的問題相連結。所以本章中有關聯立方程組的理論對後面理論的建立影響深遠，千萬不要以為會解具體的聯立方程組就可以了，而忽視這些理論。