大學線性代數初步

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

本講義主要目的是針對數學系大一學生介紹有關線性代數基本的理論, 大致上僅談論實係數的向量空間.

一般經驗上大一學生會覺得線性代數學習起來會比微積分吃力, 主要是因素可能是在高中時期學習有關線性代數部分主要著重於操作而較少論證. 這一點在大學線性代數中就較不同了. 不過經驗上也告訴我們當學生到大三大四時 (因準備研究所考試) 再重新溫習線性代數時, 會覺得它不再那麼難以親近. 由此可知大學時期的線性代數其理論並不難懂, 較大的障礙是要開始學習數學的論證. 這個障礙或許到大三大四一些數學思維較成熟時稍可解除, 不過對一些同學來說可能為時已晚, 畢竟線性代數的理論或概念與其他課程都脫不了關係. 基於這個原因寫下這份講義, 希望藉由較平易近人的方式介紹線性代數也慢慢引導熟悉數學的論證方式. 本講義希望以淺顯易懂為主旨, 而不是生動有趣. 畢竟有些事情要說明清楚就會顯得囉唆, 當然就不有趣了.

研讀本講義的同學要有心理準備, 本講義是針對數學系學生而寫, 自然偏重於整個線性代數的理論架構. 對於線性代數在其他領域的應用幾乎沒有著墨. 我們依循一貫的原則就是理論清楚了, 接下來的應用或推廣就不難了. 所以對應用有興趣的同學應再參考其他的參考書籍. 另外本講義並未提供習題, 不過在某些概念講述之後有時會提供一些問題 (Question). 這些問題幾乎是檢視觀念是否正確或是對內容是否了解, 大部分問題若觀念已清楚應可以立即回答. 所以這些問題的份量仍不及一般習題, 對熟習線性代數所給予的訓練. 針對這一點, 請欲學習好線性代數的同學務必參閱一般線性代數書籍的習題, 自行磨練.

本講義雖然主要以中文撰寫, 不過當涉及定義或專有名詞時, 為免翻譯的困擾將以英文取代. 因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現, 若有不便請見諒.

本講義編寫費時, 編寫完後並未經過嚴謹的校對. 疏漏在所難免, 雖不至於有理論性上嚴重的錯誤, 但讀者仍應注意不宜概括全收. 若發現錯誤, 歡迎提出寶貴的意見.

Chapter 4

Subspaces in $\mathbb{R}^m$

通常像 $\mathbb{R}^m$ 這樣, 裡面任意有限多個向量的線性組合仍在 $\mathbb{R}^m$ 中 (此稱為封閉性), 而向量的運算又符合 Proposition 1.2.3 的 8 項規則, 我們便稱之為 vector space. 在 $\mathbb{R}^m$ 中還有其他的 vector space, 我們稱之為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace. 在這一章中我們要探討 $\mathbb{R}^m$ 中 subspaces 的相關性質.

4.1. Subspace and basis

在這一節中, 我們將正式定義 subspace 並引進 basis 的概念.

$\mathbb{R}^m$ 中的非空子集 V, 由於它們裡面的向量仍在 $\mathbb{R}^m$ 中, Proposition 1.2.3 的 8 項規則中除了 (3), (4) 兩項外 (即 $\mathbf{O}\in V$ 以及若 $\mathbf{v}\in V$, 則 $-\mathbf{v}\in V$) 其他的性質皆會符合, 不過若再加上線性組合的封閉性 (即 V 中任意有限多個向量的線性組合仍在 V 中), 則對於 $\mathbf{v}\in V$, 我們便會有 $\mathbf{O}=0\mathbf{v}\in V$ 以及 $-\mathbf{v}=(-1)\mathbf{v}\in V$. 也就是說此時 V 不只有線性組合的封閉性而且向量的運算又符合 Proposition 1.2.3 的 8 項規則, 所以它就會像 $\mathbb{R}^m$ 一樣是一個 vector space 了. 我們有以下的定義.

Definition 4.1.1. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集. 若任意有限多個 V 中的向量之線性組合仍在 V 中 (即對任意 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 以及 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ 皆有 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in V$), 則稱 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的一個 *subspace* (子空間).

注意依此定義空集合 $\emptyset$ 不是 subspace. 不過 $\mathbb{R}^m$ 中的零向量所成的集合 $\{\mathbf{O}\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 而 $\mathbb{R}^m$ 本身也是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace.

回顧一下, 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 來表示 $\mathbb{R}^m$ 中 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的所有線性組合所成的集合 (參見 Definition 1.3.1), 亦即

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^m \mid r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_n\mathbf{v}_n,\ \text{ for some } r_1,\dots,r_n\in\mathbb{R}\}.$$

所以 V 是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 等同於對任意 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 皆有

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\subseteq V. \tag{4.1}$$

依定義要檢查 V 是否為 subspace, 我們必須考慮 V 中任意有限多個向量的線性組合是否仍在 V 中, 感覺起來很麻煩. 事實上, 下一個定理告訴我們, 只要檢查任兩個向量的線性組合即可.

Proposition 4.1.2. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的子集合, 則 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 *subspace* 若且唯若 $\mathbf{O}\in V$ 且對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in V$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 依定義 V 為非空集合, 故必存在一向量 $\mathbf{v}\in V$. 現考慮 $0\mathbf{v}=\mathbf{O}$, 依 subspace 的定義 $0\mathbf{v}\in V$, 故得證 $\mathbf{O}\in V$. 同樣的依 subspace 的定義, 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in V$.

$(\Leftarrow)$: 假設 $\mathbf{O}\in V$ 且對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in V$. 由 $\mathbf{O}\in V$, 我們知 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集. 接著利用式子 (4.1), 我們要證明對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$, 皆有 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)\subseteq V$. 我們對向量的個數 n 作數學歸納法. 首先考慮只有一個向量的情形 (即 $n=1$), 此時我們要證明若 $\mathbf{v}_1\in V$, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)\subseteq V$. 因為 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$ 中的元素皆為 $r\mathbf{v}_1$ 的形式, 我們要證明對任意 $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $r\mathbf{v}_1\in V$. 此時考慮 $\mathbf{u}=\mathbf{O}$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1$, 我們有 $r\mathbf{v}_1=\mathbf{O}+r\mathbf{v}_1=\mathbf{u}+r\mathbf{v}$. 依假設知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in V$, 得證 $n=1$ 的情形成立. 現假設 $n=k$ 時成立, 亦即對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$ 皆有 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)\subseteq V$. 我們要證明對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1}\in V$ 皆有 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1})\subseteq V$. 然而對任意 $\mathbf{w}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k+1})$, 我們知存在 $c_1,\ldots,c_k,c_{k+1}\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k+c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$. 此時令 $\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$, 依歸納假設我們知 $\mathbf{u}\in V$. 故考慮 $r=c_{k+1}\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{k+1}\in V$, 我們有 $\mathbf{w}=\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in V$, 得證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k+1})\subseteq V$. 故由數學歸納法知, 對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 皆有 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)\subseteq V$, 亦即 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace. $\square$

由 Proposition 4.1.2, 我們知道要檢查 V 是否為 subspace, 我們僅要檢查

(1) $\mathbf{O}\in V$

(2) $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{R}\Rightarrow\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in V$.

是否成立即可.

Example 4.1.3. 設 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 考慮 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid ax+by+cz=d\}$. 我們想找到 a,b,c,d 使得 S 為 $\mathbb{R}^3$ 的 subspace. 現若 S 為 subspace, 由於已知 $(x,y,z)=(0,0,0)=\mathbf{O}\in S$, 故知 $d=0$. 反之, 若 $d=0$ 且 $\mathbf{u}=(x,y,z)\in S$, $\mathbf{v}=(x',y',z')\in S$ 以及對任意 $r\in\mathbb{R}$, 則因 $ax+by+cz=0, ax'+by'+cz'=0$ 可得

$$a(x+rx')+b(y+ry')+c(z+rz')=(ax+by+cz)+r(ax'+by'+cz')=0,$$

得證 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}=(x+rx',y+ry',z+rz')\in S$. 由此知當 $d=0$ 且只有當 $d=0$ 時, S 為 $\mathbb{R}^3$ 的 subspace.

注意在 Example 4.1.3 中, 當 a,b,c,d 皆為 0 時 $S=\mathbb{R}^3$, 仍為 $\mathbb{R}^3$ 的 subspace.

$\mathbb{R}^m$ 中有許多 subspaces, 例如利用 Proposition 1.3.2 我們知道若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace (事實上 $\mathbb{R}^m$ 中的 subspace 都可以寫成這種形式). 給定

一個 $m\times n$ matrix A. 我們可以考慮 A 的 column vectors 所展成的集合, 稱之為 A 的 *column space*. 即若 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\in\mathbb{R}^m$ 為 A 的 column vectors, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ 為 A 的 column space. 同樣的 A 的 row vectors 所展的的集合, 稱為 A 的 *row space*. 注意因 A 為 $m\times n$ matrix, 故其 column space 會是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 而 row space 會是 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace. 另外還有一個與矩陣 A 相關且重要的 subspace, 它就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 所有解所成的集合, 即 $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\mathbf{x}=\mathbf{O}\}$. 由於 $\mathbf{x}=\mathbf{O}\in\mathbb{R}^n$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的一組解. 又若 $\mathbf{x}=\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}=\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 皆為 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的解, 則對於任意 $r\in\mathbb{R}$, 我們有

$$A(\mathbf{u}+r\mathbf{v})=A\mathbf{u}+rA\mathbf{v}=\mathbf{O},$$

故知 $\mathbf{x}=\mathbf{u}+r\mathbf{v}$ 亦為 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的解. 由 proposition 4.1.2 知 $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\mathbf{x}=\mathbf{O}\}$ 會是 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace, 我們稱之為 A 的 *nullspace*.

在 $\mathbb{R}^m$ 中我們曾介紹過所謂 standard basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$, 這一組向量它的特點就是 $\mathbb{R}^m$ 的相量都可以寫成 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m$ 的線性組合, 而且寫法唯一. 因為這組 standard basis 的存在, 我們可以將 $\mathbb{R}^m$ 的向量坐標化, 而推得 $\mathbb{R}^m$ 上很多性質. 我們自然有興趣知道是否 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 中可找到類似的一組向量有同樣的性質, 因此我們有以下的定義.

Definition 4.1.4. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace. 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$, 且任意 $\mathbf{v}\in V$, 皆存在唯一的 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{v}$, 則稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis* (基底).

Definition 4.1.4 很容易讓我們了解定義 basis 的目的, 不過要直接利用這個定義找出 basis 會有困難, 所以我們必需找到和此定義等價卻又較容易處理的條件. 首先若考慮以 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$ 為 column vectors 的 $m\times n$ matrix A, 即

$$A=\begin{bmatrix}| & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & |\end{bmatrix}.$$

由於 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 等同於 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 是聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 的一組解, 所以對任意 $\mathbf{v}\in V$, 存在唯一的 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{v}$, 就等同於對任意 $\mathbf{v}\in V$ 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 皆有解且其解唯一. 所以我們馬上有以下的性質.

Proposition 4.1.5. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 *subspace* 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$. 令 A 為以 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *column vectors* 的 $m\times n$ *matrix.* 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 *basis* 若且唯若對任意 $\mathbf{v}\in V$, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 皆有解且其解唯一.

注意, 並不是只要一個 $m\times n$ matrix A 會滿足對任意 $\mathbf{v}\in V$, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 皆有解且解唯一, 則 A 的 column vectors 就會是 V 的一組 basis. 我們還需要 A 的 column vectors 皆在 V 內才行. 也就是說形成 V 的一組 basis 的 vectors 也都必須在 V 中才行. 否則若無此要求, V 中的所有向量都可以用 $\mathbb{R}^m$ 的 standard basis 唯一表示, 那麼 standard basis 會是 $\mathbb{R}^m$ 中所有 subspace 的 basis, 那麼談 basis 就沒甚麼意思了!

當我們實際上有一組向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 我們就可利用 Proposition 4.1.5 以及之前學過的聯立方程組有解且解唯一的等價條件來判斷 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是否為 V 的一組 basis. 不過這個方法

在處理抽象的一般情況就不好處理了, 所以我們還要另一個比較好處理的等價條件來判斷一組向量是否為 basis.

首先當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 由於 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n) \subseteq V$. 又當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis 時, 由於對任意 $\mathbf{v} \in V$ 皆存在 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, 亦即對任意 $\mathbf{v} \in V$ 皆滿足 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$. 依此得 $V \subseteq \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 故此時我們有 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$. 對於有這樣性質的 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 我們給它一個特殊名稱.

Definition 4.1.6. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace. 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ 滿足 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n) = V$, 我們稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *spanning vectors*.

注意若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 spanning vectors, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$. 這是因為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 故由 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$.

另一方面當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis 時, 由於任意 $\mathbf{v} \in V$ 皆存在唯一的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$, 而又因 V 為 subspace, 我們知 $\mathbf{O} \in V$, 故當 $\mathbf{v} = \mathbf{O}$ 時, 存在唯一的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$. 然而已知當 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 時 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$, 故由唯一性知, 不可能會有其他的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ 會使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$. 換言之, 只有當 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 才有可能滿足 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$. 對於有這樣性質的 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 我們給它一個特殊名稱.

Definition 4.1.7. 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$. 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 滿足只有當 $c_1 = \cdots = c_n = 0$ 才有可能使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$, 我們稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent*.

注意若令 A 為以 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 column vectors 的 $m \times n$ matrix, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 就表示 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ 沒有 nontrivial solution. 這是因為若存在 $x_1 = c_1,\ldots,x_n = c_n$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ 的 nontrivial solution, 表示 $c_1,\ldots,c_n$ 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{O}$, 此與 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 相矛盾.

關於 spanning vectors 以及 linear independence 的性質, 我們會在下一節更深入討論. 由上面的討論與定義, 我們知若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 為 V 的一組 basis, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的 spanning vectors 且為 linearly independent. 事實上這兩個條件和 basis 是等價的, 我們有以下的定理.

Proposition 4.1.8. *假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$. 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 basis 若且唯若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的 spanning vectors 且為 linearly independent.*

Proof. 我們僅剩下要證明若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的 spanning vectors 且為 linearly independent 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 basis. 我們想利用 Proposition 4.1.5, 也就是令 A 為以 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 column vectors 的 $m \times n$ matrix, 我們要證明對任意 $\mathbf{v} \in V$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 皆有解且其解唯一. 首先若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 spanning vectors, 我們知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 亦即 A 的 column vectors 皆在 V 中, 且由 Lemma 3.4.1 知 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 表示對所有 $\mathbf{v} \in V$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 皆有解. 再加上若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 表示 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 沒有 nontrivial solution. 因此由 Theorem 3.4.6 可得聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 的解唯一. 故由 Proposition 4.1.5 知此時 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis. □

Question 4.1. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 *subspace* 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$. 令 A 為以 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *column vectors* 的 $m\times n$ *matrix.* 若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis,* 則 A 的 *column space* 為何? A 的 *nullspace* 為何?

4.2. Spanning Vectors and Linear Dependence

我們介紹了 spanning vectors 以及 linear independence 的定義. 在這一節中, 我們將進一步探討它們的性質.

4.2.1. Spanning Vectors. 給定 $\mathbb{R}^m$ 中的一個 subspace V, 我們知道 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$, 要成為 V 的 spanning vectors 的先決條件就是 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$. 所以要找的 V 的 spanning vectors, 我們需要在 V 中找到合適的向量再一一加入.

一般來說, 當向量的個數不夠多時, 是無法形成 spanning vectors 的. 例如由 Corollary 3.4.4 我們知, 當 $n<m$ 時, $\mathbb{R}^m$ 中任意 n 個向量就無法形成 $\mathbb{R}^m$ 的 spanning vectors. 當原來的向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 個數不夠, 我們加入新的向量 $\mathbf{v}_{n+1}$ 後所形成的 subspace $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$ 當然會包含原來的 subspace $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 但並不一定會比它大, 下一個定理就是告訴我們如何可以將原來的 subspace 擴大.

Lemma 4.2.1. 假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\in\mathbb{R}^m$. 我們有 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$, 且 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\neq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$ 若且唯若 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$.

Proof. 首先 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 又 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$, 故由式子 (4.1) 知

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\subseteq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}).\tag{4.2}$$

同理若 $\mathbf{v}_{n+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 則由 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 以及 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 得知

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})\subseteq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n).\tag{4.3}$$

此時由式子 (4.2), (4.3) 知

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}).$$

故得證當 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\neq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$ 時必有 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$.

反之, 若 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 則因 $\mathbf{v}_{n+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$, 得證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\neq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$. □

假設 V 為 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace. 當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 不是 V 的 spanning vectors 時, 由於 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\neq V$, 我們可以在 V 中選取 $\mathbf{v}_{n+1}$ 滿足 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$. 此時 Lemma 4.2.1 告訴我們, $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1})$ 會比 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 大, 所以我們有機會這樣一直下去, 而找到 V 的一組 spanning vectors.

4.2.2. Linear Dependence. 我們介紹過一組向量為 linearly independent 的定義, 而一組向量為 linearly dependent 的意思與 linear independent 的意思相反, 我們一般稱為“線性相關”.

一組向量為 linearly dependent, 指的是這一組向量之間有關係, 也就是說其中有一個向量是其他向量的線性組合. 例如假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 就表示其中有一個 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\dots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 每次要提有一個 $\mathbf{v}_i$ 是其他向量的線性組合有點麻煩. 不過若我們更進一步觀察, 此時 $\mathbf{v}_i = r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}+\cdots+r_n\mathbf{v}_n$, 其中這些 r_j 皆為實數. 所以我們得

$$r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_i+r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}+\cdots+r_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}.$$

也就是說我們找到一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$. 反之, 若存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$. 我們假設 $c_i\neq 0$, 此時得

$$\mathbf{v}_i=\frac{-c_1}{c_i}\mathbf{v}_1+\cdots+\frac{-c_{i-1}}{c_i}\mathbf{v}_{i-1}+\frac{-c_{i+1}}{c_i}\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+\frac{-c_n}{c_i}\mathbf{v}_n,$$

也就是說 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\dots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 由此可知, 存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$ 就等同於 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 這一組向量之間有關係. 由於這個方式來表達線性相關不必敘述其中哪一個向量是其他向量的線性組合, 較為簡潔. 一般就以這個方式來定義線性相關.

Definition 4.2.2. 假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$, 若存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O},$$

則稱 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent.*

當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$ 不符合 Definition 4.2.2, 即無法找到一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$, 此時表示 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 之間沒有任何的線性關係. 這也就是為何在 Definition 4.1.7 中將這個情形稱為 linearly independent 的原因. 可以看出 linearly independent 和 linear dependent 是完全相反的概念. 若令 A 為以 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 column vectors 的 $m\times n$ matrix. 我們知道 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 就等同於 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 沒有 nontrivial solution, 所以 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent 就等同於 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 有 nontrivial solution.

通常當我們要證明一組向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 我們有以下兩個方法: 第一個方法就是先設 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$, 再證明此時 $c_1,\dots,c_n$ 必全為 0. 第二種方法, 就是所謂的反證法, 亦即先假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent (也就是說假設存在不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$), 再推得矛盾. 第一個方法通常在有具體的向量時使用, 而處理抽象的情形大多使用第二種方法, 如下面的例子.

Example 4.2.3. 假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$ 為 linearly independent. 這表示 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 之間沒有線性關係. 因此可以理解若我們在 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 中移除 $\mathbf{v}_n$, 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1}$ 這一組向量應仍為 linearly independent. 要證明這一個事實, 若我們用第一個方法, 很難由 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{O}$ 推得 $c_1,\dots,c_{n-1}$ 必全為 0. 然而若利用第二個方法, 即假設存在不全為 0 的實

數 $c_1,\dots,c_{n-1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{O}$. 此時令 $c_n=0$, 我們得到一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+c_n\mathbf{v}_n=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{O}.$$

此與 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$ 為 linearly independent 的假設相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1}$ 為 linearly independent. 大家應可以看出, 我們其實是證明了當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1}\in\mathbb{R}^m$ 為 linearly dependent 時, 加入任意的 $\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^n$ 後, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n$ 也是 linearly dependent.

在 Example 4.2.3 中, 我們知道當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$ 這一組向量為 linearly independent 時, 在這一組向量中移除一些向量, 仍不會改變其 linearly independent 的性質. 但若加入新的向量情況可能改變. 下一個定理就是告訴我們何時加入新的向量仍會保持 linearly independent.

Lemma 4.2.4. 假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\in\mathbb{R}^m$. 若已知 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 *linearly independent* 若且唯若 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$.

Proof. 如果 $\mathbf{v}_{n+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 表示 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 之間有線性關係, 即為 linearly dependent. 故知若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent, 不可能會有 $\mathbf{v}_{n+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 的情形發生. 得證 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$.

反之, 假設 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 我們要證明 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. 利用反證法, 即設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly dependent, 也就是說存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\dots,c_n,c_{n+1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{O}$. 我們知此時 c_{n+1} 必為 0, 否則由

$$\mathbf{v}_{n+1}=\frac{-c_1}{c_{n+1}}\mathbf{v}_1+\cdots+\frac{-c_n}{c_{n+1}}\mathbf{v}_n,$$

會得到 $\mathbf{v}_{n+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 之矛盾. 故此時因 $c_{n+1}=0$, 得 $c_1,\dots,c_n$ 是一組不全為 0 的實數使得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{O},$$

亦即 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent. 這和已知的假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. $\square$

假設 V 為 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace, 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 linearly independent. 如果 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 不是 V 的 spanning vectors, 則我們可以在 V 中選取 $\mathbf{v}_{n+1}$ 滿足 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$. 此時 Lemma 4.2.1 告訴我們 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 仍保持 linearly independent.

一般來說, 當向量的個數太多時, 就不會是 linearly independent 了. 例如由 Corollary 3.4.8 我們知, 當 $n>m$ 時, $\mathbb{R}^m$ 中任意 n 個向量就一定會 linearly dependent. 我們可以將這個事實推廣到更一般的情況.

Lemma 4.2.5. 假設 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\in\mathbb{R}^m$. 若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k)$ 且 $n>k$, 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent.*

Proof. $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)$ 表示存在 a_{ij} 其中 $1\le i\le n$, $1\le j\le k$ 使得

$$\begin{array}{ccccccccc}\mathbf{v}_1 & = & a_{11}\mathbf{w}_1 & + & a_{12}\mathbf{w}_2 & + & \cdots & + & a_{1k}\mathbf{w}_k\\ & \vdots & & & & & & & \\ \mathbf{v}_n & = & a_{n1}\mathbf{w}_1 & + & a_{n2}\mathbf{w}_2 & + & \cdots & + & a_{nk}\mathbf{w}_k.\end{array}$$

因此對於 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ 我們有

$$\begin{array}{ccccccccc}c_1\mathbf{v}_1 & = & c_1a_{11}\mathbf{w}_1 & + & c_1a_{12}\mathbf{w}_2 & + & \cdots & + & c_1a_{1k}\mathbf{w}_k\\ & \vdots & & & & & & & \\ c_n\mathbf{v}_n & = & c_na_{n1}\mathbf{w}_1 & + & c_na_{n2}\mathbf{w}_2 & + & \cdots & + & c_na_{nk}\mathbf{w}_k.\end{array}$$

因此, 若考慮 $n\times k$ matrix $A=[a_{ij}]$ 且令 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=b_1\mathbf{w}_1+\cdots+b_k\mathbf{w}_k$ 則

$$\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_k\end{bmatrix},\ \text{亦即 } A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_k\end{bmatrix}.$$

由於 A^{T} 為 $k\times n$ matrix 且 $n>k$, 故由 Corollary 3.4.7 知 homogeneous linear system $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 有 nontrivial solution. 也就是說存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ 不全為 0, 使得 $A^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$, 亦即 $\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$. 也因此這些不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_k$ 會滿足

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=0\mathbf{w}_1+\cdots+0\mathbf{w}_k=\mathbf{O}.$$

得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent. □

Question 4.2. 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent.* 若 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 且 $k<n$, 試證明 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\neq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

4.3. Dimension of subspace

我們定義過什麼是一個 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 的 basis, 但還不知道它是否存在. 在這一節中我們將證明只要是 $\mathbb{R}^m$ 中 nonzero subspace 都會有 basis. 並證明形成一個 subspace 的 basis 之向量個數是固定的, 因而定義此個數為這個 subspace 的 dimension. 接著我們會探討一些與 dimension 相關的性質.

假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace. 若 $V=\{\mathbf{O}\}$, 此時 $\mathbf{O}$ 為 V 中唯一的元素, 所以 $\mathbf{O}$ 會是 V 的 spanning vector. 但是 $\mathbf{O}$ 本身不是 linearly independent, 這是因為我們可以找到 $c\neq 0$ 使得 $c\mathbf{O}=\mathbf{O}$. 所以此時 V 是沒有 basis 的. 而當 $V\neq\{\mathbf{O}\}$ 時, 表示存在 $\mathbf{v}_1\in V$ 且 $\mathbf{v}_1\neq\mathbf{O}$. 此時考慮 $V_1=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$. 若 $V_1=V$, 則知 $\mathbf{v}_1$ 為 V 的 spanning vector, 又 $\mathbf{v}_1$ 本身是 linearly independent, 所以知 $\mathbf{v}_1$ 是 V 的 basis. 而若 $V_1\neq V$, 表示存在 $\mathbf{v}_2\in V$ 且 $\mathbf{v}_2\notin V_1=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$. 此時考慮 $V_2=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. 注意由 Lemma 4.2.1, 我們知 $V_1\subseteq V_2$ 且 $V_1\neq V_2$, 也就是說 V_2 比 V_1 大. 另一方面 Lemma 4.2.4 也告訴我們 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent. 現若 $V_2=V$, 則知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 V 的 spanning vectors, 再加上它們為 linearly independent, 我們得 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就是 V 的一組 basis. 而若 $V_2\neq V$, 則繼續上面的步驟, 因此我們有以下的定理.

Theorem 4.3.1. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 *subspace* 且 $V \neq \{\mathbf{O}\}$, 則存在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 其中 $n \leq m$, 為 V 的一組 *basis.*

Proof. 我們延續前面的符號, 當 $V_2 \neq V$ 時, 繼續處理下去. 當然了, 因為 m 不知有多大, 我們不可能如前這樣一步一步講下去, 這裡就可以用數學歸納法了. 我們必須說明按照前面的方法繼續下去, 在第 i 次時找出的 vectors $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i$ 皆為 linearly independent, 而且這個步驟一定會停止, 也就是說一直下去一定會有一個 n 滿足 $n \leq m$ 且 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n) = V$.

利用數學歸納法, 現假設第 k 次時所得的 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 linearly independent (別忘了我們知 $k=1$ 成立). 令 $V_k = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$. 若 $V_k = V$, 表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 V 的 spanning vectors, 再加上它們為 linearly independent, 得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 V 的一組 basis. 而若 $V_k \neq V$, 則由 $V_k \subseteq V$ 知必存在 $\mathbf{v}_{k+1} \in V$ 且 $\mathbf{v}_{k+1} \not\in V_k$. 此時考慮 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1}$, 由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 linearly independent 且 $\mathbf{v}_{K+1} \not\in V_k$ 利用 Lemma 4.2.4 得知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1}$ 為 linearly independent. 我們用數學歸納法證得了用這個步驟所得的 vectors 為 linearly independent.

接著我們要證明, 依這個步驟一定會有 $n \leq m$, 使得 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n) = V$. 現假設到第 m 次時, 仍無法得 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m) = V$, 依前面數學歸納法我們知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ 為 linearly independent. 此時存在 $\mathbf{v}_{m+1} \in V$ 且 $\mathbf{v}_{m+1} \not\in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m)$, 故再次由 Lemma 4.2.4 知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1}$ 為 linearly independent. 然而 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{m+1} \in V$ 所以當然 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{m+1} \in \mathbb{R}^m$, 因此由 Corollary 3.4.8 知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{m+1}$ 這 $m+1$ 個向量必為 linearly dependent. 此與 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1}$ 為 linearly independent 相矛盾. 矛盾發生的原因在於我們假設到第 m 次時仍無法得 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m) = V$, 因此知一定存在 $n \leq m$ 使得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 spanning vectors. 再加上已證得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis. □

從 Theorem 4.3.1 的證明我們也知道, 若 $\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k \in V$ 且為 linearly independent, 則我們可以將 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 擴大成 V 的一組 basis. 也就是說若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 不是 V 的 spanning vectors, 我們便可利用前述的方法, 找到 $\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis.

Theorem 4.3.1 告訴我們的是 basis 的存在性, 接下來我們要探討的是和 basis 有關的唯一性. 當然了我們很容易看出一個 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 其 basis 是不唯一的. 例如

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

都是 $\mathbb{R}^2$ 的 basis.

不過若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一組 basis, 由 Corollary 3.4.4 知如果 $n < m$, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不可能是 $\mathbb{R}^m$ 的 spanning vectors, 故得 $n \geq m$. 然而若 $n > m$, 由 Corollary 3.4.8 知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不可能為 linearly independent, 故知 $n = m$. 也就是說所有 $\mathbb{R}^m$ 的 basis 皆由 m 個向量所組成. 我們可以將此結果推廣成以下之定理.

Theorem 4.3.2. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 *subspace.* 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k$ 皆為 V 的 *basis,* 則 $n = k$.

Proof. 我們利用反證法, 假設 $n \neq k$. 不失一般性, 我們假設 $n > k$. 此時由於 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 為 V 的 spanning vectors, 故 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$. 因為 $n > k$ 利用 Lemma 4.2.5 得 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent. 此與 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的 basis 相矛盾. 矛盾發生於我們假設 $n \neq k$, 故得證 $n = k$. □

Theorem 4.3.2 告訴我們組成 V 的一組 basis 的向量個數是固定的. 也就是說若找到 n 個向量形成 V 的 basis, 則 V 其他的 basis 一定也會是由 n 個向量所組成. 由於這個重要的結果我們有以下的定義.

Definition 4.3.3. 假設 V 是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace. 組成 V 的一組 basis 的向量個數稱為 V 的 *dimension* (維度), 用 $\dim(V)$ 來表示.

例如 $\mathbb{R}^m$ 的 basis 皆由 m 個向量所組成, 所以我們有 $\dim(\mathbb{R}^m) = m$.

我們曾提過由 Theorem 4.3.1 的證明, 我們知道 V 中任一組 linearly independent 的向量都可以依保持 linearly independent 的方式一個一個加入向量直至形成 spanning vectors 為止. 另一方面, V 中的任一組 spanning vectors, 我們也可以依保持 spanning vectors 的方式一個一個將不需要的向量移除直至它們為 linearly independent 為止. 利用這樣的概念, 我們有以下的定理.

Proposition 4.3.4. 假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 *subspace* 且 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$.

(1) 若 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的 *spanning vectors,* 則 $\dim(V) \leq n$. 特別的, 若此時 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent,* 則 $\dim(V) < n$.

(2) 若 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則 $\dim(V) \geq n$. 特別的, 若此時 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 不是 V 的 *spanning vectors,* 則 $\dim(V) > n$.

Proof. 假設 $\dim(V) = k$, 且令 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 為 V 的一組 basis.

(1) 若 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的 spanning vectors, 表示 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V$. 由於 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 為 V 的一組 basis, 故有 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 且 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 為 linearly independent. 現若 $k > n$, 則 Lemma 4.2.5 告訴我們 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 為 linearly dependent. 造成矛盾, 故得證 $\dim(V) = k \leq n$. 現若 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 表示 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 中有一個向量是其他向量的線性組合. 不失一般性我們假設此向量為 $\mathbf{v}_n$, 亦即 $\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$. 此時 Lemma 4.2.1 告訴我們 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n) = V$, 亦即 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ 為 V 的 spanning vectors. 套用剛才已證的結果知 $\dim(V) \leq n-1$, 故得證 $\dim(V) < n$.

(2) 假設 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ 為 linearly independent. 因 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ 為 V 的一組 basis, 故有 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = V$, 亦即 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$. 現若 $n > k$, 由 Lemma 4.2.5 會得到 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ 為 linearly dependent 之矛盾. 故得證 $n \leq k = \dim(V)$. 現若 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 不是 V 的 spanning vectors, 表示存在 $\mathbf{v}_{n+1} \in V$ 但 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ 此時 Lemma 4.2.4 告訴我們 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ 仍為 linearly independent. 套用剛才已證的結果知 $\dim(V) \geq n+1$, 故得證 $\dim(V) > n$. □

當我們要說明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 依定義我們必須檢查 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 spanning vectors 以及它們是 linearly independent 這兩個條件. 不過若我們知道 $\dim(V)$ 恰好是 n, 下一個定理告訴我們僅要檢查 spanning vectors 或 linearly independent 其中一項就可.

Corollary 4.3.5. *假設 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$. 下列的敘述為等價.*

(1) $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis.*

(2) $\dim(V)=n$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 *spanning vectors.*

(3) $\dim(V)=n$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 我們知 V 的 basis 需由 n 個向量所組成, 故得 $\dim(V)=n$. 又組成 basis 的向量需為 spanning vectors, 故 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 spanning vectors. 得證 (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): 因 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 spanning vectors, 所以由 Proposition 4.3.4 (1) 知 $\dim(V)\leq n$. 現若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不是 linearly independent, 則再由 Proposition 4.3.4 (1) 會得到 $\dim(V)<n$. 此與假設 $\dim(V)=n$ 矛盾, 故知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent. 得證 (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): 因 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 所以由 Proposition 4.3.4 (2) 知 $\dim(V)\geq n$. 現若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不是 V 的 spanning vectors, 則再由 Proposition 4.3.4 (2) 會得到 $\dim(V)>n$. 此與假設 $\dim(V)=n$ 矛盾, 故知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 spanning vectors. 得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 故知 (3) $\Rightarrow$ (1). □

回顧 Theorem 4.3.1 告訴我們若 V 為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 則組成 V 的 basis 的向量個數會小於等於 m, 所以我們有 $\dim(V)\leq m$, 也就是說 $\dim(V)\leq\dim(\mathbb{R}^m)$. 這個結果可以推廣到以下更一般的狀況.

Corollary 4.3.6. *假設 V,W 皆為 $\mathbb{R}^m$ 的 subspaces 且 $V\subseteq W$, 則 $\dim(V)\leq\dim(W)$. 此時 $\dim(V)=\dim(W)$ 若且唯若 $V=W$.*

Proof. 假設 $\dim(V)=n$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的 basis. 由於 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 且 $V\subseteq W$, 我們得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in W$. 現因 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in W$ 為 linearly independent 故由 Proposition 4.3.4 (2) 得 $\dim(V)=n\leq\dim(W)$.

如果 $V=W$, 自然由 dimension 的唯一性知 $\dim(V)=\dim(W)$. 反之, 若 $\dim(V)=\dim(W)$ 但 $V\neq W$. 此時表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in W$ 為 linearly independent 但不是 W 的 spanning vectors, 故由 Proposition 4.3.4 (2) 得 $\dim(V)=n<\dim(W)$. 此與假設 $\dim(V)=\dim(W)$ 不合, 得證 $V=W$. □

注意一般來說 $\dim(V)=\dim(W)$ 並不代表 $V=W$. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中若 $\mathbf{v}\neq\mathbf{O}$, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 就是 dimension 為 1 的 subspace. 然而只要 $\mathbf{w}\neq\mathbf{O}$ 且和 $\mathbf{v}$ 不平行, 就會有 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})\neq\mathrm{Span}(\mathbf{w})$,

但它們皆為 dimension 1 的 subspace. 所以 Corollary 4.3.6 中我們需要 $V \subseteq W$ 這個前提才能由 $\dim(V) = \dim(W)$ 得到 $V = W$.

4.4. Column Space and Nullspace

我們將介紹如何找到一個矩陣的 column space, row space 以及 nullspace 的 basis. 我們會發現 column space 和 row space 的 dimension 皆相同且等於矩陣的 rank. 最後我們再探討如何得到一般 subspace 的 basis.

給定一個矩陣, 它的 column space 和 nullspace 和以該矩陣為係數矩陣所形成的聯立方程組是否有解以及解是否唯一息息相關. 由於 column space 和 nullspace 的重要性, 我們將之正式定義如下:

Definition 4.4.1. 假設 $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ 為以 $\mathbb{R}^m$ 中的向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 為 column vectors 的 $m \times n$ matrix.

(1) 我們稱 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ 為 A 的 *column space*, 且用 $C(A)$ 來表示 A 的 column space.

(2) 我們稱 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ 所有解所成的集合為 A 的 *nullspace* 且用 $N(A)$ 表示 A 的 nullspace. 即 $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{O}\}$.

利用 Lemma 3.4.1 以及 Theorem 3.4.6 我們馬上有以下的結果.

Proposition 4.4.2. *假設 A 為 $m \times n$ matrix 且 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 考慮聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

(1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解若且唯若 $\mathbf{b} \in C(A)$.

(2) 假設 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解則其解唯一若且唯若 $N(A) = \{\mathbf{O}\}$.

接下來我們就是要找到一個矩陣的 column space 以及 nullspace 這兩個重要的 subspaces 的 basis. 一般來說要找到 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace V 的一組 basis, 我們會先找 V 的一組 spanning vectors. 然後在其中再挑出仍保持為 spanning vectors 且為 linearly independent 的一組向量. 當只有兩個向量時, 我們可以馬上由它們是否為平行來判斷是否為 linearly independent. 不過通常有三個以上的向量時, 並不容易直接看出哪些向量會 linearly independent, 除非如以下的例子.

Example 4.4.3. 考慮

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

要說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent, 我們必須說明只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時, 才會使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{O}$. 然而

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=c_1\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\-5\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\7\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c_2\\3c_1-5c_2+7c_3\\-c_3\\c_1\end{bmatrix}.$$

所以要使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{O}$, 就必須讓 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$ 的 1-st entry $2c_2$, 3-rd entry $-c_3$ 以及 4-th entry c_1 皆為 0, 即 $c_1=c_2=c_3=0$. 得證只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時, 才會使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{O}$, 故知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent.

從 Example 4.4.3 我們可以看出來, 當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 中每一個向量 $\mathbf{v}_i$ 都可以找到一個 entry 不為 0, 而其他向量在該 entry 皆為 0, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent. (例如 Example 4.4.3 中 $\mathbf{v}_1$ 的 4-th entry 為 1, 而 $\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的 4-th entry 為 0; $\mathbf{v}_2$ 的 1-st entry 為 2, 而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3$ 的 1-st entry 為 0; $\mathbf{v}_3$ 的 3-rd entry 為 -1, 而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 的 3-th entry 為 0, 就符合這個條件). 此時假設每個 $\mathbf{v}_i$ 的那個非 0 的特殊 entry 為 a_i, 由於 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 在該位置的 entry 為 c_ia_i, 所以若 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{O}$, 則必 $c_ia_i=0$, 得每一個 c_i 皆為 0. 因此 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent.

當 A 為 $m\times n$ matrix, A 的 nullspace $N(A)$ 就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的所有解所成的集合. 由於我們已經知道如何找到 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的解, 所以我們就從如何找 nullspace 的 basis 開始.

回顧我們找 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的解集合的方法為, 利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form (或 reduced echelon form) A'. 此時 $A'\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的解集合就是 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的解集合, 也就是說 A 和 A' 有相同的 nullspace. 接著我們找出 free variable, 再將每個 free variable 代入任意的實數, 從下往上推得出一組解. 注意在這個過程中, pivot variable 的值會由 free variables 的值所決定, 所以只要定出 free variable 的值, 就可以得到一組解. 現假設 free variables 為 $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$. 對每一個 $j=1,\ldots,k$, 我們考慮 $x_{i_j}=1$, 其他 free variable 為 0 的情形, 令這樣推得出來的解為 $\mathbf{v}_j$. 由於 $\mathbf{v}_j$ 的 i_j-th entry 為 1, 而其他 $\mathbf{v}_{i_{j'}}$ 的 i_j-th entry 為 0, 由前討論知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 linearly independent. 而對於任意 $r_1,\ldots,r_k\in\mathbb{R}$, $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_k\mathbf{v}_k$ 就等同於是將每個 free variables $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ 分別代 $x_{i_1}=r_1,\ldots,x_{i_k}=r_k$ 所得的解. 換言之每個解都可以寫成 $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_k\mathbf{v}_k$ 的形式, 也就是說 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 是 A 的 nullspace 的一組 spanning vectors. 我們證明了 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 就是 A 的 nullspace 的一組 basis, 也因此得知 A 的 nullspace 的 dimension 為 free variables 的個數, 亦即 A 的 column 的個數減去 pivot 的個數, 因此有以下之結果.

Proposition 4.4.4. *假設 A 為 $m\times n$ matrix. 若利用 row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 nullspace 的 dimension 為 $n-r$. 假設 $A'\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的 free variables 為 $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$. 對每一個 $j=1,\ldots,k$, 我們取 $x_{i_j}=1$, 其他 free variable 為 0, 令這樣推得出來的解為 $\mathbf{v}_j$. 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 為 A 的 nullspace 的一組 basis.*

由於一個矩陣的 nullspace 不會因為其化為 echelon form 的不同而改變, 而且 nullspace 的 dimension 是固定的, 所以 Proposition 4.4.4 也證明了過去我們一直沒有證明的 "不管一個矩陣利用 elementary row operations 所化得的 echelon form 為何, 其 pivot 的個數必相同". 也因此 Definition 2.3.1 有關於 rank 的定義是 well-defined.

Example 4.4.5. 考慮 A 的 nullspace, 其中

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

將 A 的 2-nd row 分別乘上 -2, -1, -1 加至 1-st, 3-rd 和 4-th row, 然後再將 1-st, 2-nd rows 交換得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

接著將 2-nd row 分別乘上 $-1,-2$ 加至 3-rd 和 4-th row 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

最後將 3-rd row 乘上 -1 加至 4-th row, 得 echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我們就是要找到 homogeneous linear system

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & & +x_4 & & & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & & & = & 0 \\ & & & +x_4 & +x_5 & +2x_6 & = & 0 \end{array}$$

所有的解. 由 echelon form 看出 x_1,x_2,x_4 為 pivot variable, x_3,x_5,x_6 為 free variable. 現令 $x_6=1,x_5=0,x_3=0$, 解出 $x_4=-2$, $x_2=-4$, $x_1=2$, 而令 $x_6=0,x_5=1,x_3=0$ 解出 $x_4=-1$, $x_2=-2$, $x_1=1$, 最後令 $x_6=0,x_5=0,x_3=1$ 解出 $x_4=0$, $x_2=-1$, $x_1=0$. 故得

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

為 A 的 nullspace 的一組 basis. 事實上, 若令 x_6,x_5,x_3 分別為任意的實數 r,s,t, 則可得 $x_4=-2r-s$, $x_2=-4r-2s-t$, $x_1=2r+s$. 也就是說 A 的 nullspace 中的向量都可以寫成

$$\begin{bmatrix} 2r+s \\ -4r-2s-t \\ t \\ -2r-s \\ s \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r\mathbf{v}_1+s\mathbf{v}_2+t\mathbf{v}_3.$$

故知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 A 的 nullspace 的 spanning vectors, 又很容易看出 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 $N(A)$ 的一組 basis.

Question 4.3. *試將 Example 4.4.5 中的 A 化為 reduced echelon form. 是否更容易看出 $N(A)$ 的一組 basis 呢?*

接下來我們來看如何找 matrix A 的 column space $C(A)$ 的 basis. 首先一個直接的想法就是 A 的 column space, 就是使得聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 有解的 $\mathbf{v}$ 所成的集合. 所以我們只要找出這些 $\mathbf{v}$, 就可以得到 A 的 column space. 過去我們曾介紹過以 A 為係數矩陣的聯立方程組的 constrain equations 就可以找到這些 $\mathbf{v}$. 不過這個方法有點麻煩, 等一下我們會給一個更好的方法, 這裡就僅用例子回顧一下這個方法.

Example 4.4.6. 考慮 Example 4.4.5 中的 4×6 matrix A. 我們要找出 A 的 column vectors 的一組 basis. 假設 $\mathbf{b}$ 為 A 的 column space 裡的一個向量, 我們知道此時 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 因此令

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

我們要找到 b_1,b_2,b_3,b_4 的條件使得以下聯立方程組有解.

$$\begin{array}{rrrrrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = & b_1 \\ x_1 & & & +x_4 & & & = & b_2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & +2x_6 & = & b_3 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +x_5 & +2x_6 & = & b_4 \end{array}$$

考慮 augmented matrix $[A\,|\,\mathbf{b}]$, 利用 Example 4.4.5 相同的 elementary row operations 我們得

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & b_3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & b_3-b_2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 2 & b_4-b_2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_3+b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_4+3b_2-2b_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_3+b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_3+2b_2-b_1 \end{array}\right].$$

由解聯立方程組的方法 (即 2.1 節 (2)(a)(b) 的情形) 知, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解若且唯若 $b_4-b_3+2b_2-b_1=0$. 換言之, 由所有 $b_1-2b_2+b_3-b_4=0$ 的解, 所得的 $\mathbf{b}$ 所成的

集合便是 A 的 column space. 所以我們回到求矩陣 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的 nullspace. 由於 x_1 為 pivot variable, x_2,x_3,x_4 為 free variable. 利用前面求 nullspace 的 basis 的方法, 令 $x_4=1,x_3=0,x_2=0$ 解出 $x_1=1$, 而令 $x_4=0,x_3=1,x_2=0$ 解出 $x_1=-1$, 最後令 $x_4=0,x_3=0,x_2=1$ 解出 $x_1=2$. 故得

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

為 B 的 nullspace 的一組 basis, 也就是 A 的 column space 的一組 basis..

注意用這個方法, 若 $m\times n$ matrix A 化成 echelon form 後沒有一個 row 全為 0, 就表示所有的 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 皆會使聯立方程組有解, 故此時 A 的 column space 為 $\mathbb{R}^m$.

Example 4.4.6 找 column space 所用的方法缺點就是當我們找出 constrain equations 後, 還要再求另一個矩陣的 nullspace 才能找到 column space 的 basis. 接下來我們介紹一個更簡捷的方法.

首先注意當我們利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 和 $A'\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 有相同的解集合. 現假設 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 A 的 column vectors, 而 $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$ 為 A' 的 column vectors. 若 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 為 $A'\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的一組解, 表示 $c_1\mathbf{a}'_1+\cdots+c_n\mathbf{a}'_n=\mathbf{O}$, 此時由於 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 亦為 $A\mathbf{x}=\mathbf{O}$ 的一組解故我們亦有 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{O}$. 同理若 $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{O}$, 我們亦會有 $c_1\mathbf{a}'_1+\cdots+c_n\mathbf{a}'_n=\mathbf{O}$. 這告訴我們存在不全為 0 的 c_i 使得 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{O}$ 若且唯若存在不全為 0 的 c_i 使得 $c_1\mathbf{a}'_1+\cdots+c_n\mathbf{a}'_n=\mathbf{O}$. 換言之, $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 linearly dependent 若且唯若 $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$ 為 linearly dependent. 這也等價於 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 linearly independent 若且唯若 $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$ 為 linearly independent. 簡單來說當我們利用 elementary row operations 將一個矩陣變換到另一個矩陣, 兩個矩陣 column vectors 之間的線性關係是會被保持的. 我們看以下的例子.

Example 4.4.7. 考慮 Example 4.4.5 中的 4×6 matrix A, 且利用 elementary row operation 將之化為 reduced echelon form A'. 也就是將 Example 4.4.5 中的 echelon form 的 3-rd row 乘上 2 加到 echelon form 的 2-nd row, 再將 echelon form 的 3-rd row 乘上 -1 加到 echelon form 的 1-st row 得

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&2\\1&2&2&-2&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim A'=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&-2\\0&1&1&0&2&4\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我們很容易看出 A' 的 3 個 pivot 所在的 column vectors $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,\mathbf{a}'_4$ 為 linearly independent. 事實上 $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,\mathbf{a}'_4$ 每一個都符合有一個非 0 entry (即 pivot 之 entry) 而其他向量在該 entry 為 0. 我們考慮相對應到 A 的 column vectors $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$. 它們也會是 linearly independent. 這是因為若我們考慮新的 4×3 matrix $[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_4]$ 經由將 A 換成 A' 一樣步驟的 elementary row operation 我們會得到 $[\mathbf{a}'_1\quad\mathbf{a}'_2\quad\mathbf{a}'_4]$. 所以依前面的討論知, 因為 $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,\mathbf{a}'_4$ 為 linearly independent, 所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ 也會是 linearly independent. 另一方面, 在 A' 中我們很容易看出 $\mathbf{a}'_3=\mathbf{a}'_2$, $\mathbf{a}'_5=-\mathbf{a}'_1+2\mathbf{a}'_2+\mathbf{a}'_4$ 以及 $\mathbf{a}'_6=-2\mathbf{a}'_1+4\mathbf{a}'_2+2\mathbf{a}'_4$. 所以和剛才同樣理由, 依 elementary row operations 保持線性關係的性質, 我們有 $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5=-\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4$ 以及 $\mathbf{a}_6=-2\mathbf{a}_1+4\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_4$. 事實上直接檢查得

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\quad -\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4=-\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{a}_5,$$

$$-2\mathbf{a}_1+4\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_4=-2\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\\2\end{bmatrix}=\mathbf{a}_6.$$

換言之, $\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6\in\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4)$. 故由 Lemma 4.2.1 知 A 的 column space 為

$$\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6)=\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4).$$

再加上 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ 是 A 的 column space 的一組 basis.

注意在 Example 4.4.7 中我們為了方便說明將 A 化為 reduced echelon form. 事實上既然我們知道 column space 的 basis 是由對應到 pivot 所在位置 A 的 column vectors 所組成, 所以化成 echelon form 知道 pivot 在那些 column 就可以找到 basis 了. 因此除非我們想要將 A 的其他 column vectors 用這組 basis 來表示, 一般是不需要進一步化成 reduced echelon form. 另外我們要強調的是 column space 的 basis 是要回到 A 的 column vectors 所組成, 而不是由 A 的 echelon form (或 reduced echelon form) pivot 所在的 column vectors 所組成. 這是因為一般我們在做 elementary row operations 已將 column vectors 各個 entry 做了調動, 所以 echelon form 的 column space 已不再是原來 A 的 column space 了.

我們將這個求 column space 的 basis 的方法做一個總結. 首先將 $m\times n$ matrix A 利用 elementary row operation 化為 echelon form A'. 假設 A' 的 pivot variables 為 $x_{i_1},\ldots,x_{i_r}$, 則由於 A' 的 pivot 所在的 column vectors $\mathbf{a}'_{i_1},\ldots,\mathbf{a}'_{i_r}$ 為 linearly independent 且 elementary row operations 會保持各 column vectors 之間的線性關係, 我們知對應到 A 的 column vectors $\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_r}$ 亦為 linearly independent. 同理, 由於 A' 的其他 column vectors $\mathbf{a}'_j$ 皆符合 $\mathbf{a}'_j\in\mathrm{Span}(\mathbf{a}'_{i_1},\ldots,\mathbf{a}'_{i_r})$, 我們得 A 的其他 column vectors $\mathbf{a}_j$ 也符合 $\mathbf{a}_j\in\mathrm{Span}(\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_r})$. 因此得 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)=\mathrm{Span}(\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_r})$. 我們證得了 $\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的 spanning vectors 且為 linearly independent, 故 $\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的一組 basis. 我們有以下的定理.

Proposition 4.4.8. *假設 A 為 $m\times n$ matrix 且 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\in\mathbb{R}^m$ 為 A 的 column vectors. 若利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 column space 的 dimension 為 r. 假設 A' 的 pivot variables 為 $x_{i_1},\ldots,x_{i_r}$, 則 $\mathbf{a}_{i_1},\ldots,\mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的一組 basis.*

接著我們看 row space 的 basis. 回顧一下, 若 $A=\begin{bmatrix} — & {}_1\mathbf{a} & — \\ & \vdots & \\ — & {}_m\mathbf{a} & — \end{bmatrix}$ 為 $m\times n$, 則 A 的 row space 為 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 要求 A 的 row space 的 basis, 我們可以考慮 A 的 transpose A^{T}. 因為 A^{T} 的 column vectors 就是 A 的 row vectors, 求出 A^{T} 的 column space 的 basis 就等同於求 A 的 row space 的 basis. 所以我們可以用求 column space 的 basis 方法求出 A^{T} 的 column space 的 basis, 便得到 A 的 row space 的 basis. 不過這個方法有個缺點, 因為我們是換了一個矩陣 A^{T} 做 row operations, 因此就無法得到和原來 A 的 column space 之間的關係了. 以下介紹的方法, 便是直接對 A 做 elementary row operations 來求得 A 的 row space 的 basis, 所以我們可以得到 A 的 row space 和 column space 之間的關係.

這個方法的主要概念是 A 經過 elementary row operations 變換成 A' 後, A 和 A' 的 row space 是相同的. 這是因為若 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 為 A 的 row vectors, ${}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}'$ 為 A' 的 row vectors, 則每個 ${}_i\mathbf{a}'$ 其實是 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 中的向量互相交換, 或是乘上某個非 0 實數, 或是乘上某個實數後加到另一個向量. 也就是說每個 ${}_i\mathbf{a}'$ 其實是 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 的線性組合, 所以對所有 $i=1,\ldots,m$ 皆有 ${}_i\mathbf{a}'\in\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 因此由 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 知 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 同理, 因 elementary row operation 是可以還原的, A' 也可經由 elementary row operations 換成 A, 所以我們也有 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')$. 得證 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})=\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')$, 亦即 A 和 A' 有相同的 row space. 我們看以下的例子.

Example 4.4.9. 考慮 Example 4.4.5 中的 4×6 matrix A, 且利用 elementary row operation 將之化為 reduced echelon form A' (參見 Example 4.4.7), 令 ${}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a}$ 為 A 的 row vectors, ${}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}'$ 為 A' 的 row vectors. 亦即

$${}_1\mathbf{a}=[2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0],{}_2\mathbf{a}=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0],{}_3\mathbf{a}=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2],{}_4\mathbf{a}=[1\ \ 2\ \ 2\ \ -2\ \ 1\ \ 2],$$

$${}_1\mathbf{a}'=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ -2],{}_2\mathbf{a}'=[0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 2\ \ 4],{}_3\mathbf{a}'=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 2],{}_4\mathbf{a}'=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0].$$

利用 Example 4.4.5 的 elementary row operations, 我們知 A' 的 3-rd row ${}_3\mathbf{a}'$ 是由 A 的 3-rd row 減去 A 的 2-nd row 後再減去 A 的 2-nd row 乘上 -2 加到 1-st row 的向量, 亦即

$$({}_3\mathbf{a}-{}_2\mathbf{a})-({}_1\mathbf{a}-2\,{}_2\mathbf{a})={}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a}=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2]+[1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]-[2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]={}_3\mathbf{a}'.$$

而利用 Example 4.4.7 的 elementary row operations, A' 的 2-rd row ${}_2\mathbf{a}'$ 是由 A 的 2-nd row 乘上 -2 加到 A 的 1-st row 後再加上 2 倍的 A' 的 3-rd row 的向量, 亦即

$$({}_1\mathbf{a}-2\,{}_2\mathbf{a})+2({}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a})=2\,{}_3\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a}=[2\ \ 2\ \ 2\ \ 0\ \ 2\ \ 4]-[2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]={}_2\mathbf{a}'.$$

而 A' 的 1-st row ${}_1\mathbf{a}'$ 是由 A 的 2-nd row 減去 A' 的 3-rd row 的向量, 亦即

$${}_2\mathbf{a}-({}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a})={}_1\mathbf{a}-{}_3\mathbf{a}=[2\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]-[1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2]={}_1\mathbf{a}'.$$

從這裡我們得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})$. 同理得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')$ (此處略去不檢查了). 故得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})=\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')$, 亦即 ${}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的 spanning vectors. 在 echelon form 中, 沒有 pivot 的 row 必為零向量. 現 A' 的 pivot 個數為 3, 即 pivot 發生於前 3 個 row ${}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}'$, 而

${}_4\mathbf{a}'$ 為零向量, 所以僅 pivot 所在的 row ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 就可以成為 A 的 row space 的 spanning vectors. 現又由於 A' 為 reduced echelon form, 每一個 row 中 pivot 所在的位置其他的 row 在該位置皆為 0, 所以 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 為 linearly independent. 得證 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的一組 basis.

注意在 Example 4.4.9 中我們為了方便說明將 A 化為 reduced echelon form. 事實上既然 A 的 echelon form 和 reduced echelon form 有相同的 row space, 而它們 pivot 的個數又相同, 所以由 dimension 的性質 (即 Corollary 4.3.5), 知 echelon form 中 pivot 所在的 row vectors 也會是 A 的 row space 的一組 basis. 化成 reduced echelon form 的好處是比較容易讓我們將 row space 中的向量寫成這組 basis 的線性組合. 因此因此除非我們想要將 A 的 row space 中的 vectors 用這組 basis 來表示, 若僅想找到 row space 的 basis 一般是不需要進一步化成 reduced echelon form. 另外我們要強調的是 row space 的 basis 不可以回到 A 的 row vectors 去找. 這是因為一般我們在做 elementary row operations 已將 row vectors 所在的位置做了調動, 所以 row operation 並沒有保持 row vectors 之間的線性關係.

我們將這個求 row space 的 basis 的方法做一個總結. 首先將 $m \times n$ matrix A 利用 elementary row operation 化為 echelon form A'. 假設 A' 的 pivot 個數為 r, 則由於 A' 為 echelon form, A' 前 r 個 row vectors ${}_1\mathbf{a}', \ldots, {}_r\mathbf{a}'$ 為 nonzero vectors. A' 其餘的 row vectors 皆為 zero vectors. 由於 elementary row operations 會保持 row space, 我們得 ${}_1\mathbf{a}', \ldots, {}_r\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的 spanning vectors. 又由化為 reduced echelon form 的情形我們知 A 的 row space 的 dimension 為 r, 故由 Corollary 4.3.5 知 ${}_1\mathbf{a}', \ldots, {}_r\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的一組 basis. 我們有以下的定理.

Proposition 4.4.10. *假設 A 為 $m \times n$ matrix. 若利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 row space 的 dimension 為 r 且 A' 的前 r 個 row vectors ${}_1\mathbf{a}', \ldots, {}_r\mathbf{a}'$ (即 A' 中的 nonzero row vectors) 為 A 的 row space 的一組 basis.*

我們可以利用找 column space 和 row space 的 basis 的方法找一般 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace V 的 basis. 首先我們先找出 V 的一組 spanning vectors $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, 然後造一個以 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 為 column vectors 的矩陣 $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. 然後再利用找 A 的 column space 的 basis 的方法得到 V 的一組 basis. 我們也可造一個以 $\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}$ 為 row vectors 的 $n \times m$ matrix $B = \begin{bmatrix} — & \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}} & — \end{bmatrix}$ 然後再利用找 B 的 row space 的 basis 的方法得到 V 的一組 basis. 兩種方法都有它們的好處. 利用 column vectors 的方法, 由於最後找出的 basis 是從原來的 spanning vectors $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 中的向量所組成, 所以適合處理希望 basis 的 vectors 是由原來 spanning vectors 中選出的問題. 而利用 row vectors 的方法, 由於可以化為 reduced echelon form, 而 basis 是由此 reduced echelon form 中的 nonzero vectors 所組成, 所以雖然和來的

spanning vectors 無關, 不過很適合拿來判斷哪些向量在此 subspace 以及處理將 subspace 中的向量用此 basis 表示的問題. 例如以下的例子.

Example 4.4.11. 考慮 $\mathbb{R}^6$ 中的向量

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-2\\1\\2\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\3\\-2\\4\end{bmatrix}.$$

令 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$, 試找出 V 的一組 basis, 並用之判斷 $\mathbf{w}$ 是否在 V 中.

依前面的討論我們知此問題適合用 row space 的方式處理, 所以考慮以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ 為 row vectors 的矩陣 A. 此時 A 就是 Example 4.4.9 中的矩陣 A. 利用 Example 4.4.9 的結果, 我們得

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\\-2\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\2\\4\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$

為 V 的一組 basis. 注意因為原來 V 中的向量為 column vector 的形式, 為了一致性這裡我們將 A 的 row space 的 basis 寫回成 column vectors. 依此我們知 $\mathbf{w}\in V$ 若且唯若存在 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$. 然而

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_2\\c_3\\-c_1+2c_2+c_3\\-2c_1+4c_2+2c_3\end{bmatrix},$$

我們發現要使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$, 在 1-st, 2-nd 和 3-rd entry 的地方 (這些地方就是 reduced echelon form 的 pivot 的位置) 需有 $c_1=1,c_2=-2,c_3=3$. 故將 $c_1=1,c_2=-2,c_3=3$ 代入, 發現每個 entry 皆吻合, 故有 $\mathbf{w}=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3$, 得知 $\mathbf{w}\in V$.

當我們對要找的 basis 沒有特殊要求時, 我們可以選擇兩種方法中可以使得矩陣的 row 的個數較少的那一種方法處理. 因為如此所需的 elementary row operations 相對起來會較少, 可以較快找到一組 basis. 例如前一個例子 Example 4.4.11 中的 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ 若考慮成 column vectors, 所得的矩陣為 6×4 matrix, 而考慮成 row vectors, 所得的矩陣為 4×6 matrix. 所以此時若僅想找出 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$ 的一組 basis, 用 row vectors 的情況處理會比較快.

給定一個矩陣 A, 從 Proposition 4.4.8 和 Proposition 4.4.10 我們知道 A 的 column space 和 row space 有相同的 dimension, 亦即 A 利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數, 即 A 的 rank. A 的 column space 的維度就是 A 的 rank, 至於 A 的 nullspace 的維度, 我們也給予一特殊的名稱, 即以下的定義.

Definition 4.4.12. 假設 A 為 $m \times n$ matrix. A 的 nullspace 的 dimension 稱為 A 的 *nullity*, 記為 $\mathrm{null}(A)$, 亦即 $\mathrm{null}(A) = \dim(N(A))$.

依此定義, 由 Proposition 4.4.8 和 Proposition 4.4.10 我們知道 $\mathrm{rank}(A)$ 即為 A 利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數, 而由 Proposition 4.4.4 我們知道 $\mathrm{null}(A)$ 就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ 的 free variables 的個數, 即 A 的 column 個數減去 echelon form 的 pivot 個數, 因此我們有以下的 *Dimension Theorem* (或稱為 *rank equation*).

Theorem 4.4.13 (Dimension Theorem)**.** 假設 A 為 $m \times n$ *matrix.* 則

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{null}(A) = n.$$

Question 4.4. 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix.* 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{null}(A)$.

Question 4.5. 假設 A 為 $m \times n$ *matrix.*

(1) 若對於任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 皆有解, 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{null}(A)$.

(2) 若存在 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ 使得聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 有唯一解, 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{null}(A)$.

考慮矩陣 A 的 transpose A^{T}. 由於 A 的 column space 就是 A^{T} 的 row space, 而 A 的 row space 就是 A^{T} 的 column space, 所以我們有以下的性質.

Proposition 4.4.14. 假設 A 為 $m \times n$ *matrix.* 則

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}).$$

亦即利用 *elementary row operations* 將 A 以及 A^{T} 化為 *echelon form* 後, 它們的 *pivot* 個數相同.

注意, 若要直接證明利用 elementary row operations 將 A 以及 A^{T} 化為 echelon form 後, 它們的 pivot 個數相同, 會有相當的困難度. 但將這個問題轉為 column space 以及 row space 的 dimension 問題, 就很容易解決. 其實許多數學問題都是這樣, 有時只要換個角度看問題就能迎刃而解. 這也是當我們介紹一個新的概念後常常會去探討這個概念還有甚麼等價的條件的原因.

Question 4.6. 假設 A 為 $m \times n$ *matrix.* 試證明 $\mathrm{null}(A^{\mathrm{T}}) = m - \mathrm{rank}(A)$.

4.5. 結論

在本章中我們了解了 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace 以及其 basis 的意義. 一組 vectors 要成為一個 R^m 的 subspace 的 basis 的充要條件就是這組 vectors 必須是此 subspace 的 spanning vectors 以及必須為 linearly independent. 利用 spanning vectors 以及 linearly independent 相互間

的關係, 我們知道了一個 R^m 的 subspace 其 basis 是存在的, 而且組成 basis 的向量個數是唯一的. 因此有了 dimension (維度) 的概念. 最後我們由求一個矩陣的 column space, row space 以及 nullspace 的 basis 的方法, 得知 column space 和 row space 的 dimension 會相等, 即為此矩陣化為 echelon form 後, 其 pivot 個數, 也就是此矩陣的 rank. 而且定義 nullspace 的 dimension 為此矩陣的 nullity, 並因此推得了 Dimension Theorem.