Chapter 3

Vector Spaces

在這一章中, 我們利用大家熟悉的坐標平面中的向量, 將之推廣到所謂的 vector space (向量空間) 這一種有特定代數結構的系統, 是線性代數中主要的探討對象.

3.1. 坐標平面中的向量

本節針對對抽象數學論述不熟悉的同學, 想利用大家熟悉坐標平面的向量慢慢引導進入狀況.

在平面中的向量我們可以用幾何的方式規定向量的加法及其倍數關係. 相信大家對這種定法已相當熟悉, 在這裡我們不再重複. 我們可以將平面坐標化, 這就是所謂的坐標平面. 這種在坐標平面中的向量, 我們都可用 (a,b) 來表示, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ (我們用 $\mathbb{R}$ 來表示所有實數所成的集合, 所以 $a,b\in\mathbb{R}$ 表示 a,b 皆為實數).

用坐標來表示一個向量 (即用 (a,b) 這種方法) 有許多好處, 例如大家很容易理解: 當兩個向量 (a,b) 和 (c,d) 相等時 (即 $(a,b)=(c,d)$), 這表示 $a=c$ 且 $b=d$; 坐標表示法的另一個好處是很容易幫助我們定義向量的加法 (*addition*) 以及係數積 (*scalar multiplication*).

Definition 3.1.1. 令 $\mathbf{u}=(a_1,a_2),\mathbf{v}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ 以及 $r\in\mathbb{R}$. 我們定義

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_1+b_1,a_2+b_2)\quad\text{and}\quad r\mathbf{u}=(ra_1,ra_2).$$

這裡我們要強調, Definition 3.1.1 中所定義的加法及係數積, 和矩陣的加法及係數積是一致的. 基於符號的方便性, 當我們要用符號來表示一個向量時, 會用 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 這類的粗體字符號來表示. 一般來說我們用 $\mathbb{R}^2$ 來表示坐標平面上的向量所成的集合, 所以若我們說 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 就表示 $\mathbf{v}$ 是坐標平面上的一個向量, 也就是說可以找到 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}=(a,b)$.

一般來說有了定義之後, 我們就需依定義處理相關問題, 但通常直接依定義處理較繁複, 我們可已先依定義推導出一些性質, 利用這些性質簡化處理程序, 再處理更進一步的問題. 例如在微積分, 我們定義出一個函數在某一點的極限後, 若每次都得依定義處理極限問題論證起來很複雜; 但當我們利用定義推導出一些極限的性質後, 用這些性質處理極限問題就簡單方便多了. 所以在定義之後我們會有一些定理 (Proposition 或 Theorem) 來論證一些依

定義可得的性質, 以方便我們處理更進一步的問題. 以下就是要談向量加法及係數積有關的性質.

Proposition 3.1.2. 對於 $\mathbb{R}^2$ 上的向量, 我們有以下的性質:

(1) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(2) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

(3) 存在一向量 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(4) 對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in\mathbb{R}^2$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

(5) 對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

(7) 對任意 $r\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

(8) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

通常一個定理敘述完就要證明, 不過這幾項的證明都僅是一般制式的代數操作, 相信大家都很熟悉, 這裡就不再證明了. 對同學來說了解定理說些什麼比起證明來得重要. 在這裡我們就一一說明一下這個定理說些什麼.

(1) 敘述的是所謂向量加法的交換性. 它告訴我們在處理向量加法時可以依方便交換順序. 或許同學覺得這個很自然為何還要證明. 事實上只要是定義未提的事情都要證明, 不能因為覺得自然而不去處理. 在證明時會發現這個性質會成立主要是實數加法有交換性. 不過數學上是存在許多"抽象"的數系它的運算是不能交換的. 所以經由證明不只讓我們確認事情是對的, 也能幫助我們釐清事情是對的其背後的主要因素.

(2) 說的就是所謂的結合律, 它依然是因為實數加法的性質而成立. 這裡 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ 是說先將 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 相加後所得的向量再和 $\mathbf{w}$ 相加. 這樣所得的向量和先將 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 相加後再和 $\mathbf{u}$ 相加會是同樣的向量. 因為向量的加法是定義兩個向量的加法, 所以兩個以上的向量相加結合律就顯得重要了. 有了結合律, 我們就不必擔心哪兩個向量先加. 結合律雖然也是談向量加法的順序問題, 不過和 (1) 所談的順序是兩回事, 大家應該要分清楚.

(3) 談的就是所謂的零向量, 零向量的特點就是加上任何向量都不動. 為什麼要特別談零向量的存在性? 這就好比在實數上若沒有零的概念就沒有減法一樣, 在向量的運算上是相當重要的. 尤其以後要用抽象的方式談向量系統時零向量的存在性更不容忽視.

(4) 談的就是所謂的反向量, 要注意需有零向量的存在才能談反向量. 而且要區分清楚這裡的敘述是給了 $\mathbf{u}$ 後可找到 $\mathbf{u}'$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$. 這裡 $\mathbf{u}'$ 是會隨著 $\mathbf{u}$ 而改變, 而不是一個固定的向量和所有的向量加起來會是零向量. 數學的敘述要弄清楚否則差之毫釐失之千里.

(5) 指的是所有向量乘上 1 後仍不動. 這裡特別提出來其實和零向量意義很像, 唯有 1 的引入以後才能談係數的除法. 例如已知 $2\mathbf{u}=\mathbf{v}$, 就可利用 (6) 的性質兩邊乘上 $1/2$, 得

$$\mathbf{u}=1\mathbf{u}=\frac{1}{2}(2\mathbf{u})=\frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

(6),(7),(8) 談的是係數積的性質, 例如 $r(s\mathbf{u})$ 表示是先將 $\mathbf{u}$ 乘上 s 倍後所得的向量再乘上 r, 而 $(rs)\mathbf{u}$ 是表示先將 r,s 乘在一起得 rs 再乘上 $\mathbf{u}$. 這幾個性質也都和實數乘法性質息息相關, 雖然看起來不顯眼但在處理向量的運算時非常重要.

最後要強調一下: 這裡將這些性質列出, 並不是要求大家將這幾個性質背下來. 一來我們希望大家知道有些性質不能覺得理所當然就不去證明, 另一方面也讓大家知道以後在處理向量運算時可以放心且自然的使用這幾個性質. 這些性質也讓坐標平面上向量的系統享有許多豐富的性質.

Question 3.1. 利用 $\mathbb{R}^2$ 向量加法的定義, 試證明以下性質:

(1) $\mathbf{0}=(0,0)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中唯一的向量滿足對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(2) 給定 $\mathbf{u}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 試證明 $\mathbf{u}'=(-a,-b)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中唯一的向量滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

坐標平面上向量的運算也可推廣到坐標空間, 即 $\mathbb{R}^3$. 同樣的概念也可推廣到更一般的 $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. 這些系統中的運算都享有 Proposition 3.1.2 的 8 項性質, 而這些性質讓這些系統有著豐富的性質. 所以接下來我們將專注於有這 8 項性質的系統, 稱之為 vector space (向量空間).

3.2. Vector Space 的定義及其基本性質

我們曾經提過像 $\mathbb{R}^2$ 這樣, 裡面任意兩個向量相加仍在 $\mathbb{R}^2$ 中且向量乘上任意的實數後也仍在 $\mathbb{R}^2$, 而向量的運算又符合 Proposition 3.1.2 的 8 項規則, 我們便稱之為 vector space. 在這一節中我們將正式定義 vector space 並探討 vector space 相關性質.

給定一非空集合 V, 我們說 V 中有加法運算 (addition) $+$, 表示對於任意 V 中兩個元素 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 經由這個運算所得的結果 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 仍然是 V 中的元素 (此為加法封閉性). 至於係數積 (scaler multiplication) 我們要注意的是, 可以乘在向量上的數所在的數系必須像實數一樣有加法與乘法, 且加法, 乘法都是有交換律及結合律, 還有加法乘法之間要有分配律. 更重要的是這個數系裡非 0 的元素都有乘法反元素. 這樣的數系我們稱之為 *field* (體). 例如實數 $\mathbb{R}$ 和有理數 $\mathbb{Q}$ 在我們一般熟悉的加法, 乘法運算下都是 field, 但是整數 $\mathbb{Z}$ 就不是 field, 因為除了 ±1 以外其他的非 0 整數在 $\mathbb{Z}$ 中就無法找到乘法反元素. 由於以後我們談的向量空間, 向量前所乘的係數所在的數系只要是 field, 則我們所要探討的性質都會成立. 所以係數積我們都不會強調是哪一個 field, 而用 $\mathbb{F}$ 來表示. 不過由於我們給的例子大多是係數積為 $\mathbb{R}$ 的情況, 所以若對 field 的概念覺得陌生, 不妨就用 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 的情況來思考即可. 現若 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們說 $\mathbb{F}$ 對 V 有係數積表示對任意 $c\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{v}\in V$, 皆有 c 對 $\mathbf{v}$ 所得係數積 $c\mathbf{v}$ 仍然在 V 中 (此為係數積封閉性). 當一個集合 V 上有加法運算, 且 field $\mathbb{F}$ 對其有係數積, 則我們可以探討其是否為 vector space, 也就是說探討它是否符合以下之定義.

Definition 3.2.1. 假設非空集合 V 中有加法運算 $+$, 以及 field $\mathbb{F}$ 對 V 的係數積. 若這兩種運算符合以下 8 項性質, 則稱 V 為一個 *vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(2) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

(3) 存在一向量 $\mathbf{0}\in V$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(4) 對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

(5) 對任意 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

(7) 對任意 $r\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

(8) 對任意 $r,s\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

在此要說明一下, 一般來說我們不能說一個集合是 vector space, 一定要附帶說明它的加法及係數積為何. 不過當我們談到一般抽象的 vector space 時, 我們說 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$ 時就隱含其中有加法運算且直接用 $+$ 表示, 同時也隱含 $\mathbb{F}$ 是一個 field 且 V 中有 $\mathbb{F}$ 的係數積, 而不再去強調其中有加法及係數積. 同樣的對於常見的 vector space, 例如 $\mathbb{R}^n$, 由於我們已經有常用的加法及係數積, 所以不會再次強調其加法及係數積為何. 不過當我們要介紹一個新的具體的 vector space 時, 就一定要說明如何定出其加法及係數積. 尤其要注意, 我們必須明確說是 over 哪一個 field 的 vector space (以後我們會看到例子, 同樣的集合看成 over 不同的 field 的 vector space 影響會很大).

接下來我們看一些有關 vector space 的例子.

Example 3.2.2. (A) 考慮 S 為所有次數等於 2 的有理係數多項式所成的集合. 對 S 中兩多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ 我們定義

$$f(x)+g(x)=(a+a')x^2+(b+b')x+(c+c').$$

S 在這加法定義下並無封閉性. 例如 $f(x)=x^2+2x+1\in S$ 且 $g(x)=-x^2\in S$, 但 $f(x)+g(x)=2x+1\not\in S$. 所以在此加法下 S 不是 vector space. 現考慮 $P_2(\mathbb{Q})$ 為次數小於等於 2 的有理係數多項式所成的集合. 利用剛才的加法定義, 我們可得這個加法對 $P_2(\mathbb{Q})$ 有封閉性. 另外若對任意實數 $r\in\mathbb{R}$, 我們定義 r 對 $f(x)=ax^2+bx+c\in P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積為 $r\cdot f(x)=(ra)x^2+(rb)x+(rc)$. 在此定義之下實數對 $P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積並無封閉性, 例如 $\sqrt{2}$ 乘上 $P_2(\mathbb{Q})$ 的元素 x^2+x+1 會是 $\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ 就不再是 $P_2(\mathbb{Q})$ 的元素, 所以在此定義之下 $P_2(\mathbb{Q})$ 也不是 over $\mathbb{R}$ 的 vector space. 不過若同樣的定義考慮有理數 $\mathbb{Q}$ 對 $P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積, 則會符合封閉性. 所以我們可以考慮 $P_2(\mathbb{Q})$ 是否是 vector space over $\mathbb{Q}$. 事實上我們很容易驗證此時的加法與係數積會符合 vector space 的 8 個性質, 所以在此定義之下 $P_2(\mathbb{Q})$ 確實是 vector space over $\mathbb{Q}$. 同樣的若 n 是正整數, 若令 $P_n(\mathbb{F})$ 為次數小於 n 且係數在 $\mathbb{F}$ 的多項式所成的集合, 利用上述加法及係數積的定義, 我們可得 $P_n(\mathbb{F})$ 是一個 over $\mathbb{F}$ 的 vector space.

(B) 對任意的 field $\mathbb{F}$, 考慮 $P(\mathbb{F})$ 為所有以 $\mathbb{F}$ 的元素為係數的多項式所成的集合. 利用如 (A) 中定義多項式的加法與係數積, 我們可以證明 $P(\mathbb{F})$ 為 vector space. 首先若 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\in P(\mathbb{F})$, 其中 $m\leq n$, 則我們可以將 $g(x)$ 寫成 $g(x)=b_nx^n+\cdots+b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$, 其中 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$. 為了方便

起見雖然多項式的次數可能不同, 以後我們都用這種方式將它們補成相同次數再相加. 所以我們可以將 $f(x)+g(x)$ 的定義寫成 $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$. 而對於 $r\in\mathbb{F}$, 係數積 $rf(x)$ 的定義為 $rf(x)=\sum_{i=0}^{n}(ra_i)x^i$. 利用這個定義以及 $\mathbb{F}$ 是 field 的假設, 我們知道在此定義之下加法和係數積確為 $P(\mathbb{F})$ 中的運算 (有封閉性). 接著我們要一一檢查是否符合 vectors space 的 8 項運算規則.

(1) 對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P(\mathbb{F})$ 我們有

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(b_i+a_i)x^i=g(x)+f(x).$$

(2) 對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i, h(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i\in P(\mathbb{F})$ 我們有

$$(f(x)+g(x))+h(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i+\sum_{i=0}^{n}c_ix^i=\sum_{i=0}^{n}((a_i+b_i)+c_i)x^i,$$

$$f(x)+(g(x)+h(x))=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}(b_i+c_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(a_i+(b_i+c_i))x^i.$$

由於 $(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i)$, 故得證 $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$.

(3) 考慮零多項式 $g(x)=0=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 其中 $b_i=0$, $\forall i=0,1,\ldots,n$. 此時對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 可得

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=f(x).$$

(4) 給定 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 我們考慮 $h(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i\in P(\mathbb{F})$, 則

$$f(x)+h(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}0x^i=0.$$

(5) 對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 皆有

$$1f(x)=\sum_{i=0}^{n}(1a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=f(x).$$

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 我們有

$$r(sf(x))=r(\sum_{i=0}^{n}(sa_i)x^i)=\sum_{i=0}^{n}(r(sa_i))x^i=\sum_{i=0}^{n}((rs)a_i)x^i=(rs)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=(rs)f(x).$$

(7) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 皆有

$$(r+s)f(x)=\sum_{i=0}^{n}((r+s)a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(ra_i+sa_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(ra_i)x^i+\sum_{i=0}^{n}(sa_i)x^i=rf(x)+sf(x).$$

(8) 對任意 $r\in\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P(\mathbb{F})$ 皆有

$$r(f(x)+g(x))=r(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i)=\sum_{i=0}^{n}(r(a_i+b_i))x^i=\sum_{i=0}^{n}(ra_i+rb_i)x^i=rf(x)+rg(x).$$

因為 $P(\mathbb{F})$ 的加法與 $\mathbb{F}$ 的係數積符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $P(\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$. 例如所有有理係數多項式所成的集合 $P(\mathbb{Q})$ 就是一個 over $\mathbb{Q}$ 的 vector space, 而實係數多項式所成的集合 $P(\mathbb{R})$ 就是一個 vector space over $\mathbb{R}$. 有趣的是 $P(\mathbb{R})$ 也是一個 vector space over $\mathbb{Q}$, 大家想想看為什麼.

(C) 給定任意 $n\in\mathbb{N}$, 以及一個 field $\mathbb{F}$. 我們令 $\mathbb{F}^n=\{(a_1,\ldots,a_n):a_i\in\mathbb{F}\}$. 我們沿用 $\mathbb{R}^2$ 中向量的加法及係數積來定義 $\mathbb{F}^n$ 中向量的加法以及係數積. 令 $\mathbf{u}=(a_1,\ldots,a_n),\mathbf{v}=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{F}^n$ 以及 $r\in\mathbb{F}$. 我們定義

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)\quad\text{and}\quad r\mathbf{u}=(ra_1,\ldots,ra_n).$$

依此定義我們很容易驗證此加法和係數積運算在 $\mathbb{F}^n$ 是封閉的, 而且符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $\mathbb{F}^n$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$. 同樣的考慮所有 entry 皆為 $\mathbb{F}$ 中元素的 $m\times n$ 矩陣所成的集合 $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 利用一般矩陣的加法及係數積, 我們也可利用之前談論矩陣加法性質 (Proposition 2.1.3) 一樣的方法驗證 $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$.

(D) 給定一非空集合 S 以及 field $\mathbb{F}$, 我們令 $F(S,\mathbb{F})$ 表示所有定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數所成的集合. 現若 $f,g\in F(S,\mathbb{F})$, 表示對任意 $s\in S$, $f(s),g(s)$ 都會是 $\mathbb{F}$ 中的元素. 所以我們定義 $f+g$ 為定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數, 其定義為 $f+g$ 在任意 $s\in S$ 的取值為 $f(s)+g(s)$. 亦即 $(f+g)(s)=f(s)+g(s),\forall s\in S$. 對任意 $c\in\mathbb{F}$ 我們也定義 cf 為定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數, 其定義為 cf 在任意 $s\in S$ 的取值為 $c\cdot f(s)$. 亦即 $(cf)(s)=c\cdot f(s),\forall s\in S$. 由於在此定義之下 $f+g$ 和 cf 仍然在 $F(S,\mathbb{F})$ 中, 所以此加法和係數積運算在 $F(S,\mathbb{F})$ 是封閉的. 我們可以驗證這兩種運算也符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $F(S,\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$.

Question 3.2. *依照 Example 3.2.2 (D) 的定義, 試說明 $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F(\mathbb{R},\mathbb{Q})$, $F(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ 以及 $F(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ 中那些是 vector space over $\mathbb{R}$? 哪些是 vector space over $\mathbb{Q}$?*

或許很多同學會疑惑, 為何在上一節和 Example 3.2.2中這 8 個性質要證明, 而一開始卻是定義不必證明呢? 要回答這個問題就要回歸到整個過程的演變. 上一節中我們定義了坐標平面向量加法及係數積, 然後驗證它們符合 Proposition 3.1.2 這 8 個性質. 而後由這些性質得到許多運算上很方便且豐富的性質. 事實上這些豐富的性質成立的原因, 主因並不是這些平面向量的加法和係數積是如何定義的, 而是由於它們符合 Proposition 3.1.2 這 8 個性質. 注意到這一點後, 我們專注於符合這 8 個性質的系統稱之為向量空間. 希望以後探討向量空間的問題, 可以不必用到它們真正的運算僅利用這 8 個性質就能得到向量空間所有的性質. 所以當我們想推導向量空間的性質時, 我們就可以直接套用定義中這 8 性質去推導, 這樣推導出來的結果便適用於所有的向量空間. 反過來說, 當我們遇到一個系統有加法, 有係數積, 只要我們能利用該系統的運算 "證明" 它符合這基本的 8 個性質, 那它就是向量空間. 因而所有向量空間的性質它都會符合了, 而不必再用該系統的運算一一去推導.

例如, 在 Question 3.1 中我們利用 $\mathbb{R}^2$ 加法的定義說明 vector space 性質 (3) 中 $\mathbf{0}$ 是唯一的而 (4) 中若給定 $\mathbf{u}$, 則反向量 $\mathbf{u}'$ 也是唯一的. 這兩個唯一性, 事實上不需要知道向量的加法如何定義, 直接用 vector space 的性質就可以證明, 也就是說這個結果對一般的 vector space 都成立. 首先我們看以下之定理.

Proposition 3.2.3. *假設 V 為 vector space, 且 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. 若 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.*

Proof. 利用 vector space 的性質 (4), 我們知道存在 $\mathbf{w}' \in V$ 滿足 $\mathbf{w}+\mathbf{w}'=\mathbf{0}$. 然而由 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 知 $(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'$. 左式由性質 (2),(3) 可得 $(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=\mathbf{u}+(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$. 同理右式可得 $(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=\mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$, 得證 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$. □

Proposition 3.2.3 告訴我們以後在 vector space 處理向量加法問題時, 可以自然地像處理實數一樣使用消去法. 利用這個結果, 我們可以用來處理上述零向量以及反向量的唯一性.

Corollary 3.2.4. 假設 V 為 *vector space,* 則在 V 中存在唯一的向量 $\mathbf{0}$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 另外, 給定 $\mathbf{u}\in V$, 存在唯一的 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

Proof. 首先證明 $\mathbf{0}$ 是唯一的. 假設 $\mathbf{0}'$ 也滿足 (3) 的性質, 即對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}'+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 因此任取 $\mathbf{u}\in V$, 我們有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}=\mathbf{0}'+\mathbf{u}$, 故由 Proposition 3.2.3 知 $\mathbf{0}=\mathbf{0}'$, 得證唯一性.

另一方面, 給定 $\mathbf{u}\in V$, 若 $\mathbf{u}',\mathbf{u}''$ 皆滿足 (4) 的性質, 即 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{u}+\mathbf{u}''=\mathbf{0}$. 故由 Proposition 3.2.3 知 $\mathbf{u}''=\mathbf{u}'$, 得證唯一性. □

既然 $\mathbf{0}$ 是唯一的, 以後就用 $\mathbf{0}$ 這個專屬的符號來表示 V 中唯一符合 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\forall\mathbf{u}\in V$ 的這個元素, 且稱之為 V 的 *additive identity* 或依慣例稱之為 *zero vector.* 又給定 $\mathbf{u}\in V$, 存在唯一的 $\mathbf{u}'$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$, 依慣例我們以後就用 $-\mathbf{u}$ 來表示這一個唯一的 $\mathbf{u}'$, 且稱之為 $\mathbf{u}$ 的 *additive inverse.* 而 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的 additive inverse $-\mathbf{v}$ 相加, 即 $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$, 我們就用 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ 來表示.

Question 3.3. 假設 V 為 *vector space.* 試證明對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $-(-\mathbf{v})=\mathbf{v}$.

接著我們要再強調的是, 雖然在性質 (3) 中提到 $\mathbf{0}$ 是必須滿足對所有 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 才可以 (事實上 Proposition 3.2.3 的證明需用到對所有 $\mathbf{u}$ 皆對才可以), 也就是說依定義要驗證對所有 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 才能確定 $\mathbf{w}$ 是零向量. 不過當我們確定 V 是 vector space 之後, 就可利用 Corollary 3.2.4, 知道只要有一個 $\mathbf{u}\in V$, 會使得 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 就可以認定 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ 了. 利用這一個唯一性, 我們可以推得許多有關於 $\mathbf{0}$ 的性質. 為了方便起見, 我們列出以下的結果.

Proposition 3.2.5. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 我們有以下之結果.

(1) 若對於 $\mathbf{w}\in V$ 存在 $\mathbf{u}\in V$ 使得 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 則 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$.

(2) 對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(3) 對任意 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $r\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) 對任意 $r\in\mathbb{F},\mathbf{v}\in V$ 皆有 $(-1)(r\mathbf{v})=-(r\mathbf{v})=r(-\mathbf{v})$.

Proof. (1) 由於 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{0}$ 皆滿足 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}=\mathbf{0}+\mathbf{u}$, 故利用 Proposition 3.2.3 推得 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$.

(2) 要證明 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 利用 (1), 我們只要檢查是否存在 $\mathbf{u}\in V$ 使得 $0\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 事實上, 若考慮 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ 的情形, 此時因 $\mathbf{v}=1\mathbf{v}$, 故 $0\mathbf{v}+\mathbf{v}=0\mathbf{v}+1\mathbf{v}=(0+1)\mathbf{v}=1\mathbf{v}=\mathbf{v}$. 故得證 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(3) 同理, 利用 (1), 我們考慮 $\mathbf{u}=r\mathbf{0}$ 的情況, 此時 $r\mathbf{0}+\mathbf{u}=r\mathbf{0}+r\mathbf{0}=r(\mathbf{0}+\mathbf{0})=r\mathbf{0}=\mathbf{u}$, 得證 $r\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) 這裡要證明的是 $(-1)(r\mathbf{v})$ 和 $r(-\mathbf{v})$ 都是 $r\mathbf{v}$ 的 additive inverse (反向量). 由 Corollary 3.2.4 我們知到只要驗證它們是否加上 $r\mathbf{v}$ 都會是 $\mathbf{0}$ 即可. 然而由 (2) 我們有

$$(-1)(r\mathbf{v})+r\mathbf{v}=(-1)(r\mathbf{v})+1(r\mathbf{v})=(-1+1)(r\mathbf{v})=0(r\mathbf{v})=\mathbf{0}.$$

由 (3) 我們有

$$r(-\mathbf{v})+r\mathbf{v}=r(-\mathbf{v})+r(\mathbf{v})=r(-\mathbf{v}+\mathbf{v})=r(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

因此得證 $(-1)(r\mathbf{v})=-(r\mathbf{v})=r(-\mathbf{v})$. □

由 Proposition 3.2.5 我們知當 $r=0$ 或 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 時會有 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 但若 $r\neq 0$ 且 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, 是否有可能 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 呢? 答案是不可能. 這是因為若 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 首先由 $r\neq 0$ 且 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們知道存在 $r'\in\mathbb{F}$ 滿足 $r'r=1$. 因此可以考慮 r' 乘上 $r\mathbf{v}$ 由 Proposition 3.2.5 (3) 得到 $r'(r\mathbf{v})=r'\mathbf{0}=\mathbf{0}$. 然而由 vector space 運算性質 (5), (6) 我們有 $r'(r\mathbf{v})=(rr')\mathbf{v}=1\mathbf{v}=\mathbf{v}$. 也就是說 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 此與假設 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ 相矛盾, 故知 $r\mathbf{v}$ 絕對不會是 $\mathbf{0}$.

Question 3.4. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 已知 $\mathbf{v}\in V$ 且 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. 試證明若 $r,s\in\mathbb{F}$ 且 $r\mathbf{v}=s\mathbf{v}$, 則 $r=s$.

(2) 已知 $r\in\mathbb{F}$ 且 $r\neq 0$. 試證明若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 且 $r\mathbf{u}=r\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

利用以上結果證明若 V 是 *vector space over* $\mathbb{R}$ 且 V 中有非零元素, 則 V 有無窮多個元素.

總而言之, vector space 中所要求加法及係數積的 8 項性質, 就是要確保一個 vector space 中的元素運算都可像實數一般處理. 例如, 我們可以如實數一樣引用“減法”的符號, 也就是說將 $\mathbf{w}+(-\mathbf{v})$ 寫成 $\mathbf{w}-\mathbf{v}$. 如此一來以後我們在一些等式的推演時就直接沿用大家習慣的「移項」的說法. 例如 $2\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$, 我們就直接移項且乘以 1/2 得 $\mathbf{u}=\frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{v})$.

3.3. Subspaces

在這一節, 我們介紹 subspace 的概念, 簡單地說, 對於一個 vector space 的非空子集合, 如果在此 vector space 的加法及係數積運算之下這個子集合亦為 vector space, 則稱為此 vector space 的 *subspace*.

Definition 3.3.1. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的 nonempty subset. 若對 W 的元素利用原先 V 的加法及 $\mathbb{F}$ 係數積運算之下 W 亦為 vector space, 則稱 W 為 V 的 *subspace*.

雖然一個 vector space 的 subspace 仍為 vector space, 但要檢查是否為 subspace 不必像檢查 vector space 一樣要去檢查 8 項的運算規則. 這是因為原本 vector space 的 8 項運算規則中除了 (3)(4) 兩項會和所在的集合有關外, 其他各項僅是元素間的運算規則, 和所在的集合無關. 以下的定理告訴我們要辨認是否為 subspace, 只要檢查封閉性即可.

Proposition 3.3.2. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的非空子集合. 則 W 為 V 的 *subspace* 若且唯若對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 且 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\mathbf{u}\in W$.

Proof. 首先假設 W 為 V 的 subspace. 由於 vector space 的首要條件就是加法與係數積的封閉性, 因此依 subspace 的定義 W 在 V 的加法以及係數積之下應有封閉性, 亦即對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 且 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\mathbf{u}\in W$.

反之, 若 W 在 V 的加法以及係數積之下應有封閉性, 則依定義若此加法及係數積符合 vector space 的 8 項性質, 則 W 就是 over $\mathbb{F}$ 的 vector space, 因此依定義就是 V 的 subspace. 然而這 8 項性質中除了 (3), (4) 兩項外, 其餘了性質由於在 V 中的元素皆成立, 所以當然限制在 W 上依然成立. 因此我們僅要驗證 (3), (4) 兩項即可.

性質 (3) 要求的是在 W 中存在一元素 $\mathbf{w}\in W$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in W$ 皆有 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 然而由於這些元素皆在 V 中, 而 Proposition 3.2.5 (1) 告訴我們此 $\mathbf{w}$ 就是 V 的 zero vector $\mathbf{0}$. 所以我們要檢查的是 $\mathbf{0}\in W$. 現因 W 不是空集合, 所以必定存在 $\mathbf{u}\in W$, 此時因 $0\in\mathbb{F}$ 且由封閉性 $0\mathbf{u}\in W$, 因此由 Proposition 3.2.5 (2) 得證 $\mathbf{0}=0\mathbf{u}\in W$.

性質 (4) 要求的是對任意 W 中的元素 $\mathbf{u}\in W$ 皆存在 $\mathbf{u}'\in W$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$. 由於 $W\subseteq V$, $\mathbf{u}$ 亦在 V 中, 故由 additive inverse 的唯一性 (Proposition 3.2.4知 $\mathbf{u}'=-\mathbf{u}$ 再由 Proposition 3.2.5 (4) 知 $-\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}$. 因此由 $-1\in\mathbb{F}$ 以及係數積的封閉性知 $-\mathbf{u}\in W$. □

注意在這個證明裡, 我們僅利用係數積的封閉性證明 (3), (4) 成立, 不過在驗證 subspace 時一定還要驗證加法的封閉性, 否則無加法封閉性根本沒資格成為 vector space.

一個 vector space V 中有兩個 trivial subspace, 即 V 和 $\{\mathbf{0}\}$. 其中 $\{\mathbf{0}\}$ 稱為 *zero subspace* of V, 以後我們用 $\mathbf{O}$ 來表示. 例外要注意 subspace 不能是空集合, 又因為 $\mathbf{0}$ 一定在其中, 所以以後檢查 V 中的子集合是否為 subspace, 我們可以先檢查 $\mathbf{0}$ 是否在其中. 一來可以知道它是不是空集合, 而且若 $\mathbf{0}$ 不在其中就可以斷定它不是 subspace, 真是一舉兩得啊! 以下我們寫下一個檢查是否為 subspace 更簡明的方法.

Corollary 3.3.3. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的子集合. 則 W 為 V 的 *subspace* 若且唯若 $\mathbf{0}\in W$ 且對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 依 subspace 的定義, 加法及係數積皆有封閉性, 故對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{F}$ 由係數積的封閉性得 $r\mathbf{v}\in W$ 再由加法封閉性得 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$. 又依定義 W 為非空集合, 故必存在一向量 $\mathbf{w}\in W$. 現考慮 $0\mathbf{w}$, 依封閉性 $0\mathbf{w}\in W$. 又因 V 為 vector space, 我們知 $0\mathbf{w}=\mathbf{0}$ (Proposition 3.2.5(2)). 故得證 $\mathbf{0}=0\mathbf{w}\in W$.

$(\Leftarrow)$: 由 $\mathbf{0}\in W$, 我們知 W 為 V 的非空子集合. 故由 Proposition 3.3.2, 我們僅要證明 W 有加法和係數積的封閉性. 我們要用對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$ 這個假設證明封閉性. 因 $1\in\mathbb{F}$, 故對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 考慮 $r=1$ 的情形可得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$, 證得加法封閉性. 又若 $\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\in\mathbb{F}$, 因為已知 $\mathbf{0}\in W$, 故考慮 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 的情形得證 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}+r\mathbf{y}\in W$. □

由 Corollary 3.3.2, 我們知道要檢查一個 vector space V 中的子集合 W 是否為 V 的 subspace, 我們僅要檢查

(1) $\mathbf{0} \in W$

(2) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $r \in \mathbb{F} \Rightarrow \mathbf{u} + r\mathbf{v} \in W$.

是否成立即可. 我們看以下的例子.

Example 3.3.4. (A) 考慮 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 即所有 entries 在 $\mathbb{F}$ 中的 $m \times n$ matrices 所成的 vector space. 所謂 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *upper triangular* matrix 表示當 $i > j$ 時該矩陣第 (i, j)-th entry 為 0. 我們要證明 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 upper triangular matrix 所成的集合是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先觀察 $m \times n$ 階零矩陣, 由於其任意 entry 皆為 0, 當然 (i, j)-th entry 當 $i > j$ 時亦為 0, 因此零矩陣是 upper triangular. 現考慮 $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 皆為 upper triangular, 設 a_{ij}, b_{ij} 分別表示 A, B 的 (i, j)-th entry. 對任意 $r \in \mathbb{F}$, 我們有 $A + rB$ 的 (i, j)-th entry 為 $a_{ij} + rb_{ij}$. 現當 $i > j$ 時 $a_{ij} = b_{ij} = 0$, 故得 $a_{ij} + rb_{ij} = 0$. 證得 $A + rB$ 亦為 upper triangular. 因此得證 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 upper triangular matrix 所成的集合是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace.

(B) 考慮 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 即所有 entries 在 $\mathbb{F}$ 中的 $n \times n$ 方陣所成的 vector space. 我們想知道 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 symmetric matrices (對稱矩陣) 所成的集合是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先回顧, 對一個 $m \times n$ matrix A, 我們定義 A 的 *transpose* 為一個 $n \times m$ matrix, 記為 A^{t}, 滿足對任意 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, A^{t} 的 (i, j)-th entry 為 A 的 (j, i)-th entry. 利用矩陣加法及係數積運算, 我們很容易驗證對任意 $m \times n$ 矩陣 A, B 以及 $r \in \mathbb{F}$ 皆滿足 $(A + rB)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + (rB)^{\mathrm{t}} = A + rB$. 現回到對稱矩陣的定義, 對於 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 我們稱 A 為 symmetric matrix, 表示 $A^{\mathrm{t}} = A$. 很明顯的 $n \times n$ 階零矩陣 $\mathbf{0}$ 為 symmetric matrix. 而若 $A, B \in \mathscr{M}_{n\times n}$ 滿足 $A^{\mathrm{t}} = A, B^{\mathrm{t}} = B$, 則對任意 $r \in \mathbb{R}$, 利用 $A^{\mathrm{t}} = A, B^{\mathrm{t}} = B$, 我們有 $(A + rB)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + (rB)^{\mathrm{t}} = A + rB = A + rB$. 亦即 $A + rB$ 亦為 symmetric matrix, 得證 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 symmetric matrices 所成的集合為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace.

$M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 invertible matrices (可逆矩陣) 所成的集合是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace 呢? 答案是否定的. 很明顯的零矩陣 $\mathbf{0}$ 就不是 invertible, 所以由 $\mathbf{0}$ 不在其中就可得 $\mathscr{M}_{n\times n}$ 中所有的 invertible matrices 所成的集合不是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 其實即使我們考慮 invertible matrices 所成的集合與 $\{\mathbf{0}\}$ 的聯集, 仍不會是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 因為即使此時 $\mathbf{0}$ 在其中, 但仍有可能兩個 invertible matrices 相加後就不是 invertible. 例如在 2×2 的情形, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 皆為 invertible, 但是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 不是 invertible.

(C) 考慮 $P(\mathbb{F})$, 即所有以 $\mathbb{F}$ 的元素為係數的多項式所成的 vector space. 給定一自然數 $n \in \mathbb{N}$, 我們說明所有次數小於等於 n 的多項式所成的集合 $P_n(\mathbb{F})$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先我們可以將 $P_n(\mathbb{F})$ 寫成 $P_n(\mathbb{F}) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{F}\}$. 很明顯的零多項式屬於 $P_n(\mathbb{R})$ (注意一般數學上定義零多項式的次數為 $-\infty$, 而不是 0. 這個部分以後代數課程會去談論, 這裡就不多談). 又若 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in P_n(\mathbb{R})$, 則對任意 $r \in \mathbb{R}$, 我們有 $f(x) + rg(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + rb_i) x^i \in P_n(\mathbb{R})$. 故知 $P_n(\mathbb{F})$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace. 要注意, 若僅考慮次數等於 n 的多項式所成的集合, 那麼就不會是 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace 了. 很明顯的零多項式就不會在裡面. 又即使加入零多項式, 但仍有可能兩個次數為 n 的多項式相加之後其次數變小

了, 例如 $(x^2+x+1)+(-x^2+x+1)=2x+2$. 也就是說在這情況之下加法是不封閉的, 所以無法成為一個 vector space.

(D) 對一非空集合 S 以及 field $\mathbb{F}$, 考慮 $F(S,\mathbb{F})$ 為所有從 S 映射到 $\mathbb{F}$ 的函數所成的 vector space. 現假設 T 是 S 的一個非空子集合, 考慮 $N_T=\{f\in F(S,\mathbb{F}):f(t)=0,\forall t\in T\}$, 亦即 N_T 為 S 到 $\mathbb{F}$ 的函數, 但將 T 中的元素都映射到 0. 我們要說明 N_T 是 $F(S,\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先 $F(S,\mathbb{F})$ 中的 zero vector $\mathbf{0}$ 就是零函數, 也就是把 S 中的元素都映射到 0 的函數. 現由於 $T\subseteq S$, 所以此零函數當然把 T 中的元素都映射到 0. 得證 $\mathbf{0}\in N_T$. 現若 $f,g\in N_T$ 且 $r\in\mathbb{F}$. 依定義 $(f+rg)(s)=f(s)+rg(s)$, $\forall s\in S$, 故由 $f,g\in N_T$ 的假設知對任意 $t\in T$, $(f+rg)(t)=f(t)+rg(t)=0+0=0$, 得證 $f+rg\in N_T$, 也因此證明了 N_T 是 $F(S,\mathbb{F})$ 的 subspace.

Question 3.5. 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 這個 *vector space* 中, 考慮在固定的特定位置 (例如對角線位置) 為 0 的矩陣所成的集合, (例如對角線位置皆為 0 的矩陣所成的集合). 試問這樣的集合是否為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *subspace?* 又若考慮在固定的特定位置皆不是 0 的矩陣所成的集合, 是否為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *subspace?*

Subspace 是 vector space 中特殊的子集合, 所以我們當然希望能利用已知的 subspace "製造" 出新的 subspace. 這裡我們介紹兩種常見的方法.

Proposition 3.3.5. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1,W_2 為 V 的 *subspace,* 則 $W_1\cap W_2$ 亦為 V 的 *subspace.*

Proof. 首先 W_1,W_2 為 subspace, 故 $\mathbf{0}\in W_1$ 且 $\mathbf{0}\in W_2$, 故得 $\mathbf{0}\in W_1\cap W_2$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_1\cap W_2$ 且 $r\in\mathbb{F}$, 由於 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 皆屬於 W_1 且 W_1 是 subspace, 故知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W_1$, 同理可得 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W_2$, 故得證 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W_1\cap W_2$. □

Question 3.6. 證明任意多個 V 的 *subspace* 的交集依然是 V 的 *subspace.* (注意不要用數學歸納法, 數學歸納法僅能證明有限多個的情況)

雖然兩個 subspaces 的交集仍為 subspace, 但他們的聯集就未必是 subspace 了. 當然了, 當 W_1,W_2 為 V 的 subspace, 若 $W_1\subseteq W_2$, 則 $W_1\cup W_2=W_2$ 當然就是 V 的 subspace. 同樣的, 若 $W_2\subseteq W_1$, 則 $W_1\cup W_2=W_1$ 當然也是 V 的 subspace. 下一個定理就是告訴我們, 除了這兩個明顯的情況外, 兩個 subspaces 的聯集不會是 subspace.

Proposition 3.3.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1,W_2 為 V 的 *subspace.* 若 $W_1\not\subseteq W_2$ 且 $W_2\not\subseteq W_1$, 則 $W_1\cup W_2$ 不是 V 的 *subspace.*

Proof. 依假設 $W_1\not\subseteq W_2$ 表示存在一個元素在 W_1 中但不在 W_2, 我們假設 $\mathbf{w}_1\in W_1$ 但 $\mathbf{w}_1\not\in W_2$, 同理由 $W_2\not\subseteq W_1$, 我們假設 $\mathbf{w}_2\in W_2$ 但 $\mathbf{w}_2\not\in W_1$. 當然了, 依定義我們有 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W_1\cup W_2$, 我們要利用 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ 這兩個 $W_1\cup W_2$ 中的元素說明 $W_1\cup W_2$ 在加法之下沒有封閉性, 因此得證 $W_1\cup W_2$ 不是 V 的 subspace.

我們用反證法，假設 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W_1\cup W_2$. 這表示 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W_1$ 或 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W_2$. 若 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W_1$, 由 $\mathbf{w}_1\in W_1$ 以及 W_1 為 vector space, 得 $\mathbf{w}_2=(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)-\mathbf{w}_1\in W_1$. 此與 $\mathbf{w}_2\not\in W_1$ 相矛盾. 同理若 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W_2$, 我們也會推得 $\mathbf{w}_1\in W_2$ 的矛盾. 因此知 $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\not\in W_1\cup W_2$, 得證 $W_1\cup W_2$ 不是 V 的 subspace. □

從 Proposition 3.3.6 的證明中, 我們發現 $W_1\cup W_2$ 不是 vector space 最主要的原因是沒有加法封閉性 (它有係數積的封閉性), 我們可以考慮以下的集合故意收集加法所得的元素讓它有加法封閉性.

Definition 3.3.7. 假設 V 為 vector space W_1,W_2 為其 subspace, 定義集合

$$W_1+W_2=\{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\mid \mathbf{w}_1\in W_1,\mathbf{w}_2\in W_2\}$$

並稱之為 the *sum* of W_1 and W_2.

對任意 $\mathbf{w}_1\in W_1$, 由於 $\mathbf{w}_1=\mathbf{w}_1+\mathbf{0}$, 且 $\mathbf{0}\in W_2$ (因 W_2 為 subspace), 我們有 $\mathbf{w}_1\in W_1+W_2$, 亦即 $W_1\subseteq W_1+W_2$. 同理可得 $W_2\subseteq W_1+W_2$. 以下定理告訴我們 W_1+W_2 也會是 V 的 subspace, 事實上它是包含 W_1 和 W_2 最小的 subspace.

Proposition 3.3.8. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1,W_2 為 V 的 *subspace,* 則 W_1+W_2 也是 V 的 *subspace.* 特別若 W 是 V 的 *subspace* 且滿足 $W_1\subseteq W$ 以及 $W_2\subseteq W$, 則 $W_1+W_2\subseteq W$.

Proof. 首先因 $\mathbf{0}\in W_1$ 且 $\mathbf{0}\in W_2$, 故由 $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{0}\in W_1+W_2$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_1+W_2$ 且 $r\in\mathbb{F}$, 此時由 $\mathbf{u}\in W_1+W_2$, 知存在 $\mathbf{u}_1\in W_1$ 以及 $\mathbf{u}_2\in W_2$ 使得 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$, 同理存在 $\mathbf{v}_1\in W_1$ 以及 $\mathbf{v}_2\in W_2$ 使得 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. 因此 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)+r(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=(\mathbf{u}_1+r\mathbf{v}_1)+(\mathbf{u}_2+r\mathbf{v}_2)$. 然而 W_1 是 subspace, 由 $\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1\in W_1$ 以及 $r\in\mathbb{F}$ 知 $\mathbf{u}_1+r\mathbf{v}_1\in W_1$. 同理知 $\mathbf{u}_2+r\mathbf{v}_2\in W_2$, 故得 W_1+W_2 是 V 的 subspace.

現對任意 $\mathbf{u}\in W_1+W_2$, 因為存在 $\mathbf{w}_1\in W_1,\mathbf{w}_2\in W_2$ 滿足 $\mathbf{u}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$, 故由 $W_1\subseteq W$ 以及 $W_2\subseteq W$ 知 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W$, 因此由 W 是 subspace 知 $\mathbf{u}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\in W$, 得證 $W_1+W_2\subseteq W$. □

Question 3.7. 假設 $n\geq 3$, $W_1,W_2,\ldots,W_n$ 皆為 *vector space* V 的 *subspaces.* 學習 *Definition 3.3.7* 的定義方法, 你覺得要如何定義 $W_1+W_2+\cdots+W_n$ 才能讓它為包含 $W_1,W_2,\ldots,W_n$ 最小的 *subspace* 呢?

3.4. Linear Combination and Span of Vectors

在這一節中, 我們將介紹線性組合的概念.

當 V 是 vector space over $\mathbb{F}$, 要如何得到 V 的 subspace 呢? 我們可以在 V 中先找到一個 $\mathbf{v}\in V$ 然後找包含 $\mathbf{v}$ 的集合使其為包含 $\mathbf{v}$ 最小的 subspace. 首先這個集合必須包含所有 $\mathbb{F}$ 中的元素與 $\mathbf{v}$ 的係數積, 如此方可保證係數積的封閉性. 所以我們考慮集合 $\{r\mathbf{v}\mid r\in\mathbb{F}\}$. 這個集合不只對 $\mathbb{F}$ 的係數積有封閉性, 而且有加法的封閉性, 事實上它就是包含 $\mathbf{v}$ 最小的 subspace 了. 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 來表示它, 意即 $\mathbf{v}$ 所 *span* (展成) 的向量空間. 我們來驗證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 確為 V 的 subspace. 首先由於 $\mathbf{0}=0\mathbf{v}$, 所以的確有 $\mathbf{0}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v})$.

接著, 若 $\mathbf{u},\mathbf{w}\in \mathrm{Span}(V)$, 表示存在 $s,t\in\mathbb{F}$ 滿足 $\mathbf{u}=s\mathbf{v}$ 且 $\mathbf{w}=t\mathbf{v}$, 因此對任意 $r\in\mathbb{F}$, 我們有 $\mathbf{u}+r\mathbf{w}=(s\mathbf{v})+r(t\mathbf{v})=(s+rt)\mathbf{v}$. 由於 $s+rt\in\mathbb{F}$, 我們有 $(s+rt)\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v})$, 亦即 $\mathbf{u}+r\mathbf{w}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v})$. 得證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 為 V 的 subspace.

現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 既然 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}),\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 為 V 的 subspace, 由上一節 subspace 的 sum 的概念, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{u})+\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 亦為 V 的 subspace. 依定義

$$\mathrm{Span}(\mathbf{u})+\mathrm{Span}(\mathbf{v})=\{r\mathbf{u}+s\mathbf{v}\mid r,s\in\mathbb{F}\}.$$

由於它是包含 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 最小的 subspace, 我們視之為由 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所展成的 subspace, 故一般用 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 來表示. 而 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 中的元素, $r\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ 就稱之為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 的 *linear combination* (線性組合). 這個概念可以推廣到一般有限多個向量的情況, 我們有以下的定義.

Definition 3.4.1. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$, 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$. 對於任意 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$, 我們稱 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 為 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 *linear combination*. 所有 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination 所成的集合, 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 來表示, 亦即

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=\{\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{v}_i\mid c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}\}.$$

我們可以直接驗證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 會是 V 的 subspace (或是利用 sum 的概念, 參見 Question 3.7). 事實上它是包含 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 最小的 subspace. 這是因為若 W 是 V 的 subspace 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in W$, 則由 W 的加法與係數積的封閉性得 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\subseteq W$.

其實我們不只談論有限多個 V 中的向量所展成的 subspace, 我們也可談論 V 中任意的非空子集合所展成的 subspace. 不過這裡要注意的是, 我們每次只能處理有限多個向量的加法, 所以線性組合也僅能是有限多個向量的線性組合. 因此當 V 中的子集合 S 有無窮多個元素時, S 的 span 是由 S 中有限多個向量的線性組合所組成的. 我們有以下的定義.

Definition 3.4.2. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 S 是 V 的非空子集. 則定義

$$\mathrm{Span}(S)=\{\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{v}_i\mid n\in\mathbb{N},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in S,c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}\}.$$

要提醒大家注意, 在 Definition 3.4.1 中 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 的定義, 由於涉及 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 這 n 個給定的向量, 所以在此我們用集合表示法說明 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 的元素時不必提及 n 和 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是什麼. 然而在 Definition 3.4.2 中當我們用集合表示法說明 $\mathrm{Span}(S)$ 的元素時, 我們是在 S 中任選 n 個元素 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, 這 n 和 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是變動的, 所以必須寫下表示 n 是任意可能的正整數, 而 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是 S 中任意可能的向量.

事實上 $\mathrm{Span}(S)$ 也會是 V 的 subspace. 首先 S 不是空集合, 所以存在 $\mathbf{v}\in S$, 此時考慮 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 由 $\mathrm{Span}(S)$ 的定義 (取 $n=1$, $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}$, $c_1=0$), 知 $\mathbf{0}\in\mathrm{Span}(S)$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$ 且 $r\in\mathbb{F}$, 則由於 $\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\in S$ 且 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{v}=c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_m\mathbf{v}_m$, 其中 $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\in S$ 且 $c'_1,\dots,c'_m\in\mathbb{F}$, 我們有

$$\mathbf{u}+r\mathbf{v}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n+rc'_1\mathbf{v}_1+\cdots+rc'_m\mathbf{v}_m,$$

仍符合 $\mathrm{Span}(S)$ 中元素之定義, 故知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$ 得證 $\mathrm{Span}(S)$ 為 V 的 subspace.

在我們寫下一些向量的線性組合時, 前面乘的係數若是 0, 通常我們的省略不寫. 例如 $2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+0\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的一個線性組合, 不過我們通常寫成 $2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$. 基於這個原因再加上我們希望任何集合的 span 皆為 vector space, 因此當 S 是空集合 (用 $\emptyset$ 表示), 我們定義 $\mathrm{Span}(S)=\mathrm{Span}(\emptyset)=\{\mathbf{0}\}$ 這一個 zero subspace.

給定一個 vector space V, 若能找到一個 subset S 使得 $\mathrm{Span}(S)=V$, 這當然很好, 表示我們可以用較小的集合 S 就能描述 V. 特別的, 若 S 是有限個元素的集合那就更好, 表示僅需有限多個元素就能 "掌握" V 中所有的元素.

Definition 3.4.3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $S\subseteq V$. 若 $\mathrm{Span}(S)=V$, 則稱 S 為 V 的一組 *spanning set*. 此時我們說 S generates (或 spans V). 特別的, 若能找到 finite set (即僅有有限個元素的集合) S 滿足 $\mathrm{Span}(S)=V$, 此時我們稱 V 為 *finitely generated vector space*.

為何特別稱之為 finitely generated vector space 呢? 這表示此 vector space 中所有的元素都可表示成固定有限多個元素的線性組合. 一般的 vector space, 有可能不是 finitely generated, 所以要區分出來, 我們看以下的例子.

Example 3.4.4. 我們討論前面提的一些 vector space 哪些是 finitely generated vector space.

(A) $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 finitely generated. 因為考慮 $E_{ij}\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 表示 (i,j)-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的 $m\times n$ matrix. 很容易看出所有的 $m\times n$ matrix 皆可寫成 E_{ij} 其中 $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ 的 linear combination. 所以 $\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n\}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 spanning set, 也因此 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 finitely generated vector space.

(B) $P(\mathbb{F})$ 不是 finitely generated vector space. 這是因為如果 $\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set, 假設 $f_1(x),\dots,f_n(x)$ 的最高次為 m, 則任何 $f_1(x),\dots,f_n(x)$ 的 linear combination $c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)$ 的次數皆不可能大於 m. 也就是說 $\mathrm{Span}(f_1(x),\dots,f_n(x))$ 不可能包含次數大於 m 的多項式. 此與 $\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set 明顯不合, 故知 $P(\mathbb{R})$ 不可能是 finitely generated. 不過次數小於等於 n 的多項式所成的集合 $P_n(\mathbb{F})$ 就是 finitely generated vector space. 很容易看出 $\{x^n,\dots,x,1\}$ 就是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 spanning set.

大家或許直覺會認為 finite generated vector space 的 subspace 一定也是 finitely generated. 這是對的, 不過證明卻不是如直覺那麼簡單 (大家不妨現在試著證明看看). 它的證明等到介紹完 linearly independence 的概念, 我們就可以處理.

談到 $\mathrm{Span}(S)$, 我們自然會需要探討那些元素會是 $\mathrm{Span}(S)$ 的元素. 我們看以下的例子.

Example 3.4.5. 在 $P_3(\mathbb{R})$ 中考慮 $\mathbf{u}=x^3-2x^2-5x-3$ and $\mathbf{v}=3x^3-5x^2-4x-9$. 我們要檢查 $2x^3-2x^2+12x-6$ 和 $3x^3-2x^2+7x+8$ 是否屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. 首先檢查是否存在 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $2x^3-2x^2+12x-6=a\mathbf{u}+b\mathbf{v}=a(x^3-2x^2-5x-3)+b(3x^3-5x^2-4x-9)$ 比較係數後我

們發現 a,b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a+3b &= 2 \\ -2a-5b &= -2 \\ -5a-4b &= 12 \\ -3a-9b &= -6 \end{cases}$$

利用上一章解聯立方程組的方法, 我們解得 $a=-4, b=2$, 因此得到 $2x^3-2x^2+12x-6 \in \mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. 同樣的我們要檢查是否存在 $a,b \in \mathbb{R}$ 使得 $3x^3-2x^2+7x+8 = a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = a(x^3-2x^2-5x-3)+b(3x^3-5x^2-4x-9)$ 比較係數後我們發現 a,b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a+3b &= 3 \\ -2a-5b &= -2 \\ -5a-4b &= 7 \\ -3a-9b &= 8 \end{cases}$$

結果發現此聯立方程組無解, 因此知 $3x^3-2x^2+7x+8 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

我們可以討論更一般的情形, 即探討何時 $f(x) = c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$ 會屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. 依定義, 這表示存在 $a,b \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4 = a(x^3-2x^2-5x-3)+b(3x^3-5x^2-4x-9)$ 比較係數後我們發現 a,b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a+3b &= c_1 \\ -2a-5b &= c_2 \\ -5a-4b &= c_3 \\ -3a-9b &= c_4 \end{cases}$$

利用 elementary row operation 我們將 augmented matrix

$$\left[\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & c_1 \\ -2 & -5 & c_2 \\ -5 & -4 & c_3 \\ -3 & -9 & c_4 \end{array}\right].$$

轉換得 reduced echelon form

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -5c_1-3c_2 \\ 0 & 1 & 2c_1+c_2 \\ 0 & 0 & -17c_1-11c_2+c_3 \\ 0 & 0 & 3c_1+c_4 \end{array}\right].$$

這告訴我們此聯立方程組有解若且唯若 $-17c_1-11c_2+c_3=0$ 且 $3c_1+c_4=0$ 且有解時其解為 $a=-5c_1-3c_2, b=2c_1+c_2$. 也就是說當 $-17c_1-11c_2+c_3=0$ 且 $3c_1+c_4=0$ 時, 多項式 $f(x)=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$ 會屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 且此時 $f(x) = (-5c_1-3c_2)\mathbf{u}+(2c_1+c_2)\mathbf{v}$.

在這一節最後, 我們列下一些有關 $\mathrm{Span}(S)$ 的性質.

Lemma 3.4.6. *假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $S \subseteq V$, 則 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 中包含 S 最小的 subspace. 換句話說, 若 W 是 V 的 subspace 且 $S \subseteq W$, 則 $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$.*

Proof. 依定義 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$ 且我們已知 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 的 subspace. 現假設 W 是 V 的 subspace 且 $S \subseteq W$, 我們要說明 $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$. 對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$, 我們知存在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in S$ 以及 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i$. 現因 $S \subseteq W$, 我們有 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in W$, 故由 W 是 subspace, 得證 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i \in W$. □

利用 Lemma 3.4.6, 我們馬上可知若 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 這當然可直接用定義來證明, 不過利用 Lemma 3.4.6, 我們就可以直接套用, 而省去許多繁瑣的論證. 這是因為 $\mathrm{Span}(S_2)$ 是 V 的 subspace 又 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$, 故套用 Lemma 3.4.6 (考慮 $S = S_1$, $W = \mathrm{Span}(S_2)$ 的情形) 得證 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 利用這個概念我們也可以很快的處理 Span 對兩集合交集及聯集的影響.

當 S_1, S_2 是 V 的 subsets, 我們可以考慮 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2)$ 和 $\mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$ 的關係. 由於 $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$, 我們有 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1)$. 同理 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 由於 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2)$ 同時包含於 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 可推得 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$. 不過反向 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \supseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$ 就不一定成立, 主要原因是取集合的交集遠比 Span 後再取交集小的多. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 上考慮 $S_1 = \{(1,1)\}$, $S_2 = \{(2,2)\}$. 我們有 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 所以 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) = \mathrm{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$; 不過 $\mathrm{Span}(S_1) = \{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(S_2)$, 所以 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) = \{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$.

接下來我們看聯集的情況. 因為 $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$, 我們有 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 以及 $\mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$, 所以當然 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$. 不過 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2)$ 比起 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 太小了, 事實上我們知道 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2)$ 在大多數的情況甚至不是 subspace (Proposition 3.3.6). 不過 Proposition 3.3.8 告訴我們 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 是包含 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 最小的 subspace, 因此由 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 包含 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 且是 subspace 得 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$. 另一方面 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 是包含 $S_1 \cup S_2$ 最小的 subspace, 然而 $S_1 \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 且 $S_2 \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$, 再加上 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 是 subspace, 所以我們也有 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$. 因此證得 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$. 我們總結以上的結果如下.

Proposition 3.4.7. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 S_1, S_2 皆為 V 的 *subsets.*

(1) 若 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$.

(2) $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$.

(3) $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$.

3.5. Linearly Dependence and Independence

Spanning set 的概念是處理 linear combination 的存在性, 也就是了解一個向量可不可以寫成一些特定向量的線性組合; 而 linear independence 的概念便是處理 linear combination 的唯一性, 也就是說寫成線性組合的方法是否唯一. 這一節中便是探討 linearly independent 的概念.

考慮 over $\mathbb{F}$ 的 vector space V. 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, 我們知道 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ 為 V 中包含 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 以及 $\mathbf{v}_3$ 最小的 subspace. 這個 subspace 很容易掌握, 因為每個元素都是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的線性組合, 我們只要了解 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 就可以瞭解這個 subspace. 當然了, 若能用較少的元素就能掌握整個 subspace 就更好, 所以我們自然會問這裡 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 有沒有多餘, 不必要的呢? 這是有可能的, 例如若 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 所以此時僅要了

解 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就夠了. 當 $\mathbf{v}_3\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 表示存在 $r_1,r_2\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}_3=r_1\mathbf{v}_1+r_2\mathbf{v}_2$, 此時表示 $\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$, 是有關係的, 我們稱 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是 *linearly dependent* (線性相依或線性相關). 不過要注意 $\mathbf{v}_3\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 並不表示 $\mathbf{v}_1\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. 我們看以下的例子.

Example 3.5.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中考慮 $\mathbf{v}_1=(1,0)$, $\mathbf{v}_2=(1,1)$, $\mathbf{v}_3=(2,2)$. 我們有 $\mathbf{v}_3\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, 因為 $\mathbf{v}_3=(2,2)=0(1,0)+2(1,1)=0\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. 不過 $\mathbf{v}_1\not\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, 因為 $(1,0)$ 無法寫成 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 的線性組合.

因此當我們要檢查 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 之間是否有線性關係, 不能只檢查是否 $\mathbf{v}_3\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 還要檢查是否 $\mathbf{v}_1\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 以及 $\mathbf{v}_2\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$. 不過分開檢查這三種情況有點麻煩. 我們再深入看一下這三種情況代表甚麼. 當 $\mathbf{v}_1\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, 表示存在 $r,s\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}_1=r\mathbf{v}_2+s\mathbf{v}_3$, 也就是說 $1\mathbf{v}_1+(-r)\mathbf{v}_2+(-s)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. 同理, $\mathbf{v}_2\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$ 和 $\mathbf{v}_3\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 分別表示存在 $r',s'\in\mathbb{F}$ 和 $r'',s''\in\mathbb{F}$ 分別使得 $\mathbf{v}_2=r'\mathbf{v}_1+s'\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_3=r''\mathbf{v}_1+s''\mathbf{v}_2$. 也就是說當 (1) $\mathbf{v}_1\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, (2) $\mathbf{v}_2\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$ 或 (3) $\mathbf{v}_3\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 其中有一個發生時, 我們會有相對應的

$$\begin{array}{rcrcrcll} 1\mathbf{v}_1 & + & (-r)\mathbf{v}_2 & + & (-s)\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \qquad (1)\\ (-r')\mathbf{v}_1 & + & 1\mathbf{v}_2 & + & (-s')\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \qquad (2)\\ (-r'')\mathbf{v}_1 & + & (-s'')\mathbf{v}_2 & + & 1\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \qquad (3) \end{array}$$

這三種可能的情況發生, 其中 $r,s,r',s',r'',s''\in\mathbb{F}$. 不過不管 (1), (2), (3) 哪一種情況發生, 總有一個 $\mathbf{v}_i$ 其前面的係數是 1, 不為 0. 也就是說我們可找到不全為 0 的 c_1,c_2,c_3 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. 反之若能找到 c_1,c_2,c_3 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 我們就可將前面係數 c_i 不等於 0 的 $\mathbf{v}_i$ 寫成另兩個向量的線性組合. 例如若 $c_1\neq 0$, 則可得 $\mathbf{v}_1=(-c_1'c_2)\mathbf{v}_2+(-c_1'c_3)\mathbf{v}_3$, 其中 c_1' 為 c_1 的乘法反元素 (因 $c_1\neq 0$). 由此可知, 存在 c_1,c_2,c_3 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ 和前面所提 (1), (2), (3) 三種情況是等價的, 因此我們用此方法來定義 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly dependent.

讓我們把以上概念推廣到任意多個向量的情況. 我們稱一組向量為 linearly dependent, 指的是這一組向量之間有關係, 也就是說其中有一個向量是其他向量的線性組合. 例如假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 就表示其中有一個 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 每次要提有一個 $\mathbf{v}_i$ 是其他向量的線性組合有點麻煩. 不過若我們更進一步觀察, 此時 $\mathbf{v}_i=r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}+\cdots+r_n\mathbf{v}_n$, 其中這些 r_j 皆為實數. 所以我們得

$$r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+(-1)\mathbf{v}_i+r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}+\cdots+r_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}.$$

也就是說我們找到一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. 反之, 若存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. 我們假設 $c_i\neq 0$, 此時令 c_i' 為 c_i 的乘法反元素 (即 $c_ic_i'=1$), 可得

$$\mathbf{v}_i=(-c_1c_i')\mathbf{v}_1+\cdots+(-c_{i-1}c_i')\mathbf{v}_{i-1}+(-c_{i+1}c_i')\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+(-c_nc_i')\mathbf{v}_n,$$

也就是說 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 由此可知, 存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ 就等同於 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 這一組向量之間有關係. 由於這

個方式來表達線性相關不必敘述其中哪一個向量是其他向量的線性組合, 較為簡潔. 一般就以這個方式來定義線性相關.

Definition 3.5.2. 假設 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$, 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 若存在一組不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得
$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$
則稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent* (線性相依或線性相關). 反之, 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不是 linearly dependent, 則稱為 *linearly independent* (線性獨立).

這個定義可以推廣到 V 的任意子集合. 若 $S\subseteq V$, 且 S 中存在相異 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in S$ 使得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 則稱集合 S 為 linearly dependent; 反之, 若 S 不是 linearly dependent, 表示任意的一組相異向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in S$ 皆為 linearly independent, 則稱 S 為 linearly independent. 在此定義之下空集合 $\emptyset$ 是 linearly independent, 因為我們無法在 $\emptyset$ 中找到任何 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 linearly dependent. 另一方面, 若 $\mathbf{0}\in S$, 則 S 一定是 linearly dependent. 因為 $\mathbf{0}$ 本身一個元素就是 linearly dependent. 原因是 $1\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 所以我們找到一個係數不為 0 的 $\mathbf{0}$ 的線性組合. 因此依定義 S 為 linearly dependent.

一般來說, 除了上述 $S=\emptyset$ 和 $\mathbf{0}\in S$ 這兩種情況外, 要說明 S 是否為 linearly independent 並不是馬上能看出來的. 通常當我們要證明一組向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 我們有以下兩個方法: 第一個方法就是先設 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, 再證明此時 $c_1,\ldots,c_n$ 必全為 0. 第二種方法, 就是所謂的反證法, 亦即先假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent (也就是說假設存在不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$), 再推得矛盾. 第一個方法通常在有具體的向量時使用, 而處理抽象的情形大多使用第二種方法, 如下面的例子.

Example 3.5.3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 linearly independent. 這表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 之間沒有線性關係. 因此可以理解若我們在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 中移除 $\mathbf{v}_n$, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$ 這一組向量應仍為 linearly independent. 要證明這一個事實, 若我們用第一個方法, 很難由 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{0}$ 推得 $c_1,\ldots,c_{n-1}$ 必全為 0. 然而若利用第二個方法, 即假設存在不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_{n-1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{0}$. 此時令 $c_n=0$, 我們得到一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得
$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}+c_n\mathbf{v}_n=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{0}.$$
此與 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^m$ 為 linearly independent 的假設相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$ 為 linearly independent. 大家應可以看出, 我們其實是證明了當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}\in\mathbb{R}^m$ 為 linearly dependent 時, 加入任意的 $\mathbf{v}_n\in\mathbb{R}^n$ 後, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n$ 也是 linearly dependent.

Question 3.8. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $S\subseteq S'\subseteq V$. 試說明以下的對錯.

(1) 若 S 為 *linearly independent,* 則 S' 為 *linearly independent.*

(2) 若 S 為 *linearly dependent,* 則 S' 為 *linearly dependent.*

(3) 若 S' 為 *linearly independent,* 則 S 為 *linearly independent.*

(4) 若 S' 為 *linearly dependent,* 則 S 為 *linearly dependent.*

在 Example 3.5.3 中, 我們知道當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 這一組向量為 linearly independent 時, 在這一組向量中移除一些向量, 仍不會改變其 linearly independent 的性質. 但若加入新的向量情況可能改變. 下一個定理就是告訴我們何時加入新的向量仍會保持 linearly independent.

Lemma 3.5.4. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1} \in V$. 若已知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 *linearly independent* 若且唯若 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

Proof. 如果 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 之間有線性關係, 即為 linearly dependent. 故知若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent, 不可能會有 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 的情形發生. 得證 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

反之, 假設 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 我們要證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. 利用反證法, 即設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly dependent, 也就是說存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n,c_{n+1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{0}$. 我們知此時 c_{n+1} 必為 0, 否則由 $c_{n+1}\neq 0$ 知存在 $c'_{n+1}\in\mathbb{F}$ 使得 $c_{n+1}c'_{n+1}=1$ 此時

$$\mathbf{v}_{n+1}=(-c_1c'_{n+1})\mathbf{v}_1+\cdots+(-c_nc'_{n+1})\mathbf{v}_n,$$

會得到 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 之矛盾. 因此由 $c_{n+1}=0$, 得 $c_1,\ldots,c_n$ 不全為 0 且使得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

亦即 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent. 這和已知的假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. □

我們常常看到一個 vector space 中, 若一個集合中向量的個數太多時, 就不會是 linearly independent 了. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中任意 3 個向量 $\mathbf{v}_1=(a_1,b_1),\mathbf{v}_2=(a_2,b_2),\mathbf{v}_3=(a_3,b_3)$ 就一定會 linearly dependent. 這事實的原因便是我們要找到 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 就等同於解

$$x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3=x_1(a_1,b_1)+x_2(a_2,b_2)+x_3(a_3,b_3)=(0,0),$$

亦即解聯立方程組

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 &=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 &=0 \end{cases}$$

這是有三個未知數 x_1,x_2,x_3 但僅有兩個方程式的齊次聯立方程組, 我們知道一定有無窮多解, 也就是說存在 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. 因此 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 一定是 linearly dependent. 我們可以利用這個概念證明以下著個重要的定理.

Lemma 3.5.5. 設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$. 若 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 且 $m>n$, 則 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ 為 *linearly dependent.*

Proof. 由於 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 因此對任意 $j=1,\ldots,m$, $\mathbf{w}_j$ 都可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination. 也就是說, 存在 $a_{1,j},\ldots,a_{i,j},\ldots,a_{n,j}\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w}_j=a_{1,j}\mathbf{v}_1+\cdots+a_{i,j}\mathbf{v}_i+\cdots+a_{n,j}\mathbf{v}_n.$$

現在我們要找到 $c_1,\dots,c_m\in\mathbb{R}$ 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$, 便證得 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$ 為 linearly dependent. 現將 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m$ 中每一個 $\mathbf{w}_j$ 換成 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination 後會等於

$$(c_1a_{1,1}+\cdots+c_ma_{1,m})\mathbf{v}_1+\cdots+(c_1a_{i,1}+\cdots+c_ma_{i,m})\mathbf{v}_i+\cdots+(c_1a_{m,1}+\cdots+c_ma_{m,m})\mathbf{v}_m. \quad (3.1)$$

因此若我們能找到 $c_1,\dots,c_m\in\mathbb{F}$ 使得式子 (3.1) 中每個 $\mathbf{v}_i$ 的係數等於 0, 便可得到 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$. 因此我們只要找到聯立方程組

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,m}x_m &= 0\\ \qquad\vdots & \\ a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,m}x_m &= 0\\ \qquad\vdots & \\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,m}x_m &= 0\end{cases}$$

的一組解 $x_1=c_1,\dots,x_m=c_m$, 就可以使得 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$. 然而這個 homogeneous linear system 的方程式個數 n 少於未知數個數 m. 也就是說將它對應的矩陣化為 echelon form 時, 其 pivot 的個數 (小於等於 n) 必少於 variables 的個數 m, 也就是存在著 free variables, 因此由此方程組有 $x_1=\cdots=x_n=0$ 這一組解知此方程組有其他解 (參考 Lemma 1.3.4), 即存在不全為 0 的 $c_1,\dots,c_m\in\mathbb{F}$ 使得 $x_1=c_1,\dots,x_m=c_m$ 為其一組解. 故得證 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$ 為 linearly dependent. □

Question 3.9. 假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent.* 若 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 且 $k<n$, 試證明 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k)\neq\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$.

假設 W 為 V 的 subspace, 且 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\in W$ 為 linearly independent. 如果 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n$ 不是 W 的 spanning vectors (即 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n)\subsetneq W$), 則我們可以在 W 中選取 $\mathbf{w}_{n+1}$ 滿足 $\mathbf{w}_{n+1}\not\in\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n)$. 此時 Lemma 3.5.4 告訴我們 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n,\mathbf{w}_{n+1}$ 仍保持 linearly independent. 利用這個概念我們可以回答 finitely generated vector space 的 subspace 也是 finitely generated.

Proposition 3.5.6. 假設 V 為 *finitely generated vector space.* 若 W 為 V 的 *subspace,* 則 W 為 *finitely generated vector space.*

Proof. 依 V 為 finitely generated 的假設, 存在 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 滿足 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=V$. 由於 $\{\mathbf{0}\}=\mathrm{Span}(\mathbf{0})$ 為 finitely generated, 我們僅需要考慮 $W\neq\{\mathbf{0}\}$ 的情況. 我們用反證法, 假設 W 不是 finitely generated. 現任取 $\mathbf{w}_1\in W$ 其中 $\mathbf{w}_1\neq\mathbf{0}$. 由於 W 不是 finitely generated, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1)\neq W$, 亦即存在 $\mathbf{w}_2\in W$ 且 $\mathbf{w}_2\not\in\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1)$. 由 Lemma 3.5.5 知 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ 為 linearly independent. 同理, 因 W 不是 finitely generated, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\neq W$ 亦即存在 $\mathbf{w}_3\in W$ 且 $\mathbf{w}_3\not\in\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$. 由 Lemma 3.5.4 知 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 為 linearly independent. 這樣一直下去, 利用數學歸納法假設我們得 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k\in W$ 為 linearly independent. 由於 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k)\neq W$, 存在 $\mathbf{w}_{k+1}\in W$ 且 $\mathbf{w}_{k+1}\not\in\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k)$. 因此再由 Lemma 3.5.4 知 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_k,\mathbf{w}_{k+}$ 為 linearly independent. 我們利用數學歸納法證明了, 若 W 不是 finitely generated, 則對任意 $m\in\mathbb{N}$, 皆存在 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\in W$ 為 linearly independent. 然而這在 $m>n$

是會造成矛盾的. 因為此時由於 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m \in W \subseteq V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, Lemma 3.5.5 告訴我們 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$ 必為 linearly dependent. 因此知 W 為 finitely generated vector space. □

Question 3.10. 利用在 $P(\mathbb{F})$ 中對於任意 $n \in \mathbb{N}$, $x^n, x^{n-1},\dots,x,1$ 為 *linearly independent,* 證明 $P(\mathbb{F})$ 不是 *finitely generated vector space.*

前面提過若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n \in V$, 要知道 $\mathbf{v} \in V$ 是否屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 這是一個存在性的問題, 也就是問是否存在 $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$. 但若已知 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 是否會存在另一組 $c_1',\dots,c_n' \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v} = c_1'\mathbf{v}_1+\cdots+c_n'\mathbf{v}_n$ 呢? 這個唯一性的問題就會和 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是否為 linearly independent 有關了. 我們有以下的結果.

Proposition 3.5.7. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n \in V$.

(1) 若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent,* 則對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 *linear combination* 的寫法不唯一. 也就是說存在 $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$ 以及 $c_1',\dots,c_n' \in \mathbb{F}$ 其中某個 $c_i \neq c_i'$ 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n = c_1'\mathbf{v}_1+\cdots+c_n'\mathbf{v}_n$.

(2) 若 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 *linear combination* 的寫法唯一. 也就是說若 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 則對任意 $c_1',\dots,c_n' \in \mathbb{F}$ 其中某個 $c_i \neq c_i'$, 皆有 $\mathbf{v} \neq c_1'\mathbf{v}_1+\cdots+c_n'\mathbf{v}_n$.

Proof. (1) 因為 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 故存在 $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{F}$ 且某個 $d_i \neq 0$ 使得 $d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. 現若 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 考慮 $c_j' = c_j + d_i \in \mathbb{F}$, for $j = 1,\dots,n$. 此時因 $d_i \neq 0$, 故知 $c_i \neq c_i'$, 但我們仍有

$$c_1'\mathbf{v}_1+\cdots+c_n'\mathbf{v}_n = (c_1+d_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(c_n+d_n)\mathbf{v}_n =$$
$$(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)+(d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n.$$

(2) 現假設 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 假設存在 $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$ 以及 $c_1',\dots,c_n' \in \mathbb{F}$ 滿足 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 以及 $\mathbf{v} = c_1'\mathbf{v}_1+\cdots+c_n'\mathbf{v}_n$, 此時 $(c_1-c_1')\mathbf{v}_1+\cdots+(c_n-c_n')\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, 故由 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 知 $c_1-c_1' = \cdots = c_n-c_n' = 0$, 即 $c_1 = c_1',\dots,c_n = c_n'$, 得證 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination 的寫法唯一. □

3.6. Basis and Dimension

對於一個 vector space V, 我們希望能找到一個集合 S 使得 $V = \mathrm{Span}(S)$. 這樣我們要了解 V 便只要了解 S 即可. 當然了 S 越大越容易展成 V, 但是我們又希望其越小越好, 這樣就可以用小一點的集合來了解 V. 如何找到這樣大小合宜的 S 便是 basis 的概念.

假設 V 是 over $\mathbb{F}$ 的 vector space 且 $V \neq \{\mathbf{0}\}$. 我們可以在 V 中任取非零向量 $\mathbf{v}_1$, 考慮 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$. 若 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1) = V$, 則我們找到集合 $S_1 = \{\mathbf{v}_1\}$ 使得 $\mathrm{Span}(S_1) = V$, 且由於 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, 依定義 S_1 是 linearly independent. 若 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1) \subsetneq V$, 表示存在 $\mathbf{v}_2 \in V$ 且 $\mathbf{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$, 此時考慮 $S_2 = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$. 由於 $\mathbf{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$, 我們知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 是 linearly independent, 故若

$\mathrm{Span}(S_2)=V$, 我們找到了 S_2 是 V 的 spanning set 且 S_2 為 linearly independent. 這樣一直下去假設我們找到 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set 且為 linearly independent. 此時有了 spanning set 的存在性以及 linearly independent 的唯一性, 則 V 中的元素都可以唯一寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination, 也因此我們有以下的定義.

Definition 3.6.1. 假設 V 為 vector space. 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set 且為 linearly independent, 則稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis*.

首先要注意 spanning set 未必是 linearly independent. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中 $\{\mathbf{v}_1=(1,0),\mathbf{v}_2=(0,1),\mathbf{v}_3=(1,1)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 spanning set, 但不是 linearly independent (因 $\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$). 同樣的 linearly independent 的元素未必形成 spanning set. 例如在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbf{w}_1=(1,0,0),\mathbf{w}_2=(0,1,0)$ 就是 linearly independent, 但 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\neq\mathbb{R}^3$. 因此要說明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 必須說明 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)=V$ 以及 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 缺一不可. 當然了, 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set 或 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 linearly independent 其中只要任一項不滿足, 則知 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 不是 V 的 basis. 例如前面舉的例子 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 就不是 $\mathbb{R}^2$ 的 basis, 而 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ 也不是 $\mathbb{R}^3$ 的 basis. 接下來我們看幾個常見的 vector space 的 basis.

Example 3.6.2. 假設 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們考慮以下常見 over $\mathbb{F}$ 的 vector spaces.

(A) 在 $\mathbb{F}^n$ 中考慮 $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,o),\ldots,\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,o,1)$ (即 $\mathbf{e}_i$ 為 i-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的向量), 由於對任意 $(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{F}^n$, 我們有 $(c_1,\ldots,c_n)=c_1\mathbf{e}_1+\cdots+c_n\mathbf{e}_n$, 知 $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1,\ldots,be_n)=\mathbb{F}^n$. 又若 $c_1\mathbf{e}_1+\cdots+c_n\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$, 表示 $(c_1,\ldots,c_n)=(0,\ldots,0)$, 亦即 $c_1=\cdots=c_n=0$, 故知 $\mathbf{e}_1,\ldots,be_n$ 為 linearly independent. 因此 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 為 $\mathbb{F}^n$ 的一組 basis. 這一組 basis 是 $\mathbb{F}^n$ 中最直接且最常用的 basis 所以我們又稱之為 $\mathbb{F}^n$ 的 *standard basis.*

(B) 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中, 考慮 E_{ij}, 為 (i,j)-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的 $m\times n$ matrix. 則利用和 $\mathbb{F}^n$ 上類似的證法, 我們可以知 $\{E_{ij}:1\leq i\leq m,1\leq j\leq n\}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 spanning set 且為 linearly independent, 故為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組 basis.

(C) 在 $P_n(\mathbb{F})$ 中 $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ 可展成 $P_n(\mathbb{F})$ 且為 linearly independent, 所以是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 basis. 這組 basis 也稱為 $P_n(\mathbb{F})$ 的 *standard basis.*

在 Definition 3.6.1 中 V 可由有限多個元素所展成, 所以此時的 V 依定義是 finitely generated vector space (Definition 3.4.3), 不過我們提過一般的 vector space 未必會是 finitely generated, 所以對於一般的 vector space, 我們有以下 basis 的定義.

Definition 3.6.3. 假設 V 為 vector space 且 $S\subseteq V$. 若 S 為 V 的 spanning set 且為 linearly independent, 則稱 S 為 V 的一組 *basis.*

由於我們已定義 $\mathrm{Span}(\emptyset)=\{\mathbf{0}\}$ 且 $\emptyset$ 為 linearly independent, 所以依照 Definition 3.6.3, 我們說空集合 $\emptyset$ 是 zero vector space $\{\mathbf{0}\}$ 的 basis. 另外在 Example 3.4.4 中我們知道 $P(\mathbb{F})$ 不是 finitely generated. 然而很容易看出 $\{1,x,x^2,\ldots\}$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set 且為 linearly independent, 所以 $\{1,x,x^2,\ldots\}$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 basis.

我們碰到的第一個問題便是 basis 的存在性問題. 也就是說, 對於一般的 vector space 是不是都會有 basis. 接下來我們要說明非零的 finitely generated vector space 都會有 basis. 其實這對於不是 finitely generated 的 vector space 也對, 不過由於這會牽涉到較抽象的邏輯概念而且我們以後談論的 vector space 都是 finitely generated, 所以我們不去談論它. 在本講義中我們僅探討 finitely generated vector space. 既然 V 為 finitely generated, 我們假設 $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為其 spanning set. 此時若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 則 S 就會是 V 的一組 basis. 但如果不幸的 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 這表示存在某個 $\mathbf{v}_i$ 可寫成其他向量的線性組合，為了方便起見就設此向量為 $\mathbf{v}_n$ 好了, 也就是說 $\mathbf{v}_n\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1})$. 此時集合 $S_1=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}\}$ 雖然元素變少了但仍為 V 的 spanning set. 這是因為 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n)=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1})+\mathrm{Span}(\mathbf{v}_n)=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1})$. 現若 S_1 為 independent, 則 S_1 便會是 V 的 basis. 若不是 independent, 我們又可如法炮製，找到更少元素的 S_2 滿足仍為 V 的 spanning set. 因為 S 的元素僅有有限多個，這樣的程序一直下去，最終一定會停止。也就是最後會找到 S 的一個子集合，仍為 V 的 spanning set 且為 linearly independent, 也因此找到 V 的一組 basis. 這是我們找到 basis 的基本方法，不過“一直下去”這樣的說法不太好，最好用數學歸納法解釋，以下我們便用數學歸納法證明。

Proposition 3.6.4. 假設 $V\neq\{\mathbf{0}\}$ 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 且 $S\subseteq V$ 為一個 *finite set* 滿足 $V=\mathrm{Span}(S)$. 則存在 $S'\subseteq S$ 為 V 的一組 *basis.* 也就是說, 若 $V\neq\{\mathbf{0}\}$ 為 *finitely generated vector space over* $\mathbb{F}$, 則存在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 V 的一組 *basis.*

Proof. 我們對 S 的元素個數 n 做數學歸納法. 假設 $n=1$, 即 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$, 因 $V\neq\{\mathbf{0}\}$, 知 $\mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}$. 故由 $\mathbf{v}_1$ 本身是 linearly independent, 得證 $S=\{\mathbf{v}_1\}$ 是 V 的 basis. 假設 $n=k$ 時成立, 亦即對所有有 k 元素的集合 S, 若 $V=\mathrm{Span}(S)$, 則存在 $S'\subseteq S$ 為 V 的 basis. 我們要證明當 $n=k+1$ 時亦成立. 現假設 $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k+1}\}$ 且 $\mathrm{Span}(S)=V$, 若 S 為 linearly independent, 則依定義令 $S'=S$, 即為 V 的一組 basis. 而若 S 不是 linearly independent, 則不失一般性, 我們假設 $\mathbf{v}_{k+1}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$. 此時令 $\tilde{S}=S\setminus\{\mathbf{v}_{k+1}\}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$, 因 $V=\mathrm{Span}(\tilde{S})$ 且 $\tilde{S}$ 的元素個數為 k, 故由歸納假設知存在 $S'\subseteq\tilde{S}\subseteq S$ 為 V 的一組 basis. 得證本定理. □

Proposition 3.6.4 說的是當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的 spanning set, 則我們可以在 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 中捨去一些元素使其為 linearly independent 且仍為 V 的 spanning set, 故可成為 V 的一組 basis. 反之, 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 linearly independent set, 則我們可以加入一些元素擴大 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, 使其成為 V 的 spanning set 且仍保持 linearly independent, 故可成為 V 的一組 basis. 原因是若 $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set, 則 S 自然是 V 的一組 basis. 但如果不是 spanning set, 表示存在 $\mathbf{v}_{n+1}\in V$ 但 $\mathbf{v}_{n+1}\notin\mathrm{Span}(S)$. 此時考慮 $S_1=S\cup\{\mathbf{v}_{n+1}\}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\}$, 由 Lemma 3.5.4, S_1 仍保持 linearly independent. 然而此時 S_1 的元素變多了且其所展成的空間也變大了。如果 $\mathrm{Span}(S_1)=V$, 則我們得 S_1 為 V 的一組 basis. 若 S_1 仍不是 spanning set, 則我們可以如法炮製，找到更多元素的 S_2 使其仍保持 linearly independent. 因為 linear independent 的集合其元素個數不可能大於 V 的

spanning set 的個數 (Lemma 3.5.5), 這樣的程序一直下去，最終一定會停止。也就是最後會找到一個包含 S 的一個集合，仍為 linearly independent 且為 V 的 spanning set, 也因此找到 V 的一組 basis. 這是我們另一個找到 basis 的方法，不過“一直下去”這樣的說法不太好，所以以下我們依然便用數學歸納法證明。

Proposition 3.6.5. 假設 $V \neq \{\mathbf{0}\}$ 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 且 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)$. 若 $S = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\} \subseteq V$ 為 *linearly independent,* 則存在 $S' \subseteq \{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 使得 $S \cup S'$ 為 V 的 *basis.*

Proof. 我們依然對 S 的元素個數做歸納法, 不過這次是做反向的歸納法. 注意因 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)$ 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 故由 Lemma 3.5.5 知 $n \leq m$, 所以我們可以假設 $n = m-t$, 其中 $0 \leq t \leq m-1$. 我們要對 t 做 mathematical induction. 當 $t = 0$ 時表示 $m = n$, 此時我們要說明 $S = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set. 這是因為若 $\mathrm{Span}(S) \neq V$, 表示存在 $\mathbf{w} \in V$ 且 $\mathbf{w} \notin \mathrm{Span}(S)$, 故由 Lemma 3.5.4 知 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}\}$ 為 linearly independent, 但此時 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n.\mathbf{w}\}$ 有 $n+1 = m+1$ 個元素, 多於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)$ 的 m 個元素, 與 Lemma 3.5.5 相矛盾, 故知 S 為 V 的 spanning set. 再利用已知 S 為 linearly independent, 故令 $S' = \emptyset$ 得證 $S = S \cup S'$ 為 V 的 basis. 現假設 $t = k$ 時成立, 即若 $S = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{m-k}\}$ 為 linearly independent, 則存在 $S' \subseteq \{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 使得 $S \cup S'$ 為 V 的 basis. 現考慮 $t = k+1$ 的情形, 即 $S = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{m-k-1}\}$ 為 linearly independent. 首先考慮 S 是否為 V 的 spanning set. 若 $V = \mathrm{Span}(S)$, 則依定義知 S 為 V 的一組 basis, 故取 $S' = \emptyset$, 則 $S' \subseteq \{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$, 且 $S \cup S' = S$ 為 V 的 basis. 而若 $\mathrm{Span}(S) \neq V$, 表示 $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 中必有一元素 $\mathbf{u}_i \notin \mathrm{Span}(S)$, 否則若 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ 皆屬於 $\mathrm{Span}(S)$, 會造成 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m) \subseteq \mathrm{Span}(S)$ 之矛盾. 現考慮 $\tilde{S} = S \cup \{\mathbf{u}_i\}$, 因 $\mathbf{u}_i \notin \mathrm{Span}(S)$ 由 Lemma 3.5.4 知 $\tilde{S}$ 為 linearly independent, 再由 $\tilde{S}$ 的元素個數為 $m-k$, 故由歸納假設知存在 $\tilde{S}' \subseteq \{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 使得 $\tilde{S} \cup \tilde{S}'$ 為 V 的 basis. 故令 $S' = \{\mathbf{u}_i\} \cup \tilde{S}'$, 我們有 $S' \subseteq \{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 且 $S \cup S' = S \cup \{\mathbf{u}_i\} \cup \tilde{S}' = \tilde{S} \cup \tilde{S}'$ 為 V 的 basis. □

我們已經知道 finitely generated vector space 的 basis 是存在的, 不過它並不唯一. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中除了 standard basis $\{(1,0),(0,1)\}$ 外, 我們很容易看出 $\{(1,1),(0,1)\}$ 也可以是 $\mathbb{R}^2$ 的 basis. 不過 basis 雖然不唯一, 不過在 finitely generated vector space 中組成 basis 的元素個數是固定的. 我們有以下的定理.

Theorem 3.6.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 且 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 和 $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 皆為 V 的 *basis,* 則 $n = m$.

Proof. 我們用反證法, 假設 $n \neq m$, 不失一般性我們就假設 $m > n$. 因 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 故 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, $\forall i = 1,\dots,m$. 因此由 Lemma 3.5.5 知 $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 是 linearly dependent. 此與 $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 是 basis 的假設相矛盾, 故得證 $m = n$. □

Theorem 3.6.6 告訴我們組成 V 的一組 basis 的元素個數是固定的. 也就是說若找到 n 個元素形成 V 的 basis, 則 V 其他的 basis 一定也會是由 n 個元素所組成. 由於這個重要的結果我們有以下的定義.

Definition 3.6.7. 假設 V 是一個 finitely generated vector space over $\mathbb{F}$. 組成 V 的一組 basis 的元素個數稱為 V over $\mathbb{F}$ 的 *dimension* (維度), 用 $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ 來表示.

由於組成 finitely generated vector space 的一組 basis 的元素個數是有限的, 所以以後我們稱 finitely generated vector space 為 *finite dimensional vector space.*

Example 3.6.8. 我們探討在 Example 3.6.2 中的 finite dimensional vector space 的維度為多少.

(A) 考慮 $\mathbb{F}^n$ 中的 standard basis $\{\mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, 因為共有 n 個元素所以 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) = n$.

(B) 我們知道 $\{E_{ij} \in \mathscr{M}_{m\times n} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 是 $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組 basis. 因此 $\dim \mathbb{F}(\mathscr{M}_{m\times n}) = m \times n$.

(C) 我們知道 $\{x^n, \ldots, x, 1\}$ 是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 spanning set 且為 linearly independent. 故知 $\{x^n, \ldots, x, 1\}$ 為 $P_n(\mathbb{F})$ 的一組 basis, 因此 $\dim_{\mathbb{F}}(P_n(\mathbb{F})) = n+1$.

大家或許注意到, 我們在表示維度的 dim 符號的下標特別標上 $\mathbb{F}$, 即 $\dim_{\mathbb{F}}$. 這個原因是強調我們將 vector space 看成 over $\mathbb{F}$ 的 vector space 所得的 dimension. 我們曾經提過, 同樣的集合我們有可能看成 over 不同的 field 的 vector space. 在此情況之下它們的 basis 也就會不同, 也因此我們要標示用哪一個 field. 我們看以下的例子.

Example 3.6.9. 我們用 $\mathbb{C}$ 表示 complex numbers (複數) 所成的 field, 而用 $\mathbb{R}$ 表示 real numbers (實數) 所成的 field. 現考慮集合 $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. 很容易檢查用一般的加法及係數積, $\mathbb{C}^2$ 是 vector space over $\mathbb{C}$, 也會是 vector space over $\mathbb{R}$. 首先我們知道 $\{(1,0),(0,1)\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 看成 over $\mathbb{C}$ 的 vector space 的 basis (Example 3.6.2 (A) $n = 2$, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 的情況), 所以我們得 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) = 2$. 不過 $\{(1,0),(0,1)\}$ 在 over $\mathbb{R}$ 之下就不是 basis 了. 很容易看出來任何 $(1,0),(0,1)$ over $\mathbb{R}$ 的 linear combination 都無法表示 $(i,0)$ 這一個 $\mathbb{C}^2$ 的元素 (這裡 i 是滿足 $i^2 = -1$ 的純虛數). 不過 $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ 就是 $\mathbb{C}^2$ over $\mathbb{R}$ 的 spanning set. 這是因為任意 $\mathbb{C}^2$ 的元素都可以寫成 $(a+bi, c+di)$ 其中 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, 所以可得 $(a+bi, c+di) = a(1,0)+b(i,0)+c(0,1)+d(0,i)$. 又 $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ over $\mathbb{R}$ 是 linearly independent. 這是因為若 a,b,c,d 是實數滿足 $a(1,0)+b(i,0)+c(0,1)+d(0,i) = (0,0)$, 即表示 $a+bi = 0$ 且 $c+di = 0$, 故得 $a = b = c = d = 0$. 由此知 $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ over $\mathbb{R}$ 的 basis, 所以我們有 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2) = 4$.

由 Example 3.6.9, 我們知道要說明一個 vector space 的 dimension 為何, 一定要說明其 over 的 field 是甚麼. 不過一般情形, 當我們很明確知道 over 的 field 是甚麼而沒有如 Example 3.6.9 這種模稜兩可的情形, 我們便會省略直接用 $\dim(V)$ 來表示其 dimension.

對於 finite dimensional vector space 有關於 dimension 的性質, 我們匯集如下. 再次強調, 由於這裡我們只考慮 over 一個固定的 field $\mathbb{F}$, 所以我們僅用 $\dim(V)$ 來表示其 dimension.

Proposition 3.6.10. 假設 V 為 *finite dimensional vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 *spanning set,* 則 $\dim(V)\leq n$. 特別的, 若此時 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent,* 則 $\dim(V)<n$.

(2) 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 *linearly independent,* 則 $\dim(V)\geq n$. 特別的, 若此時 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 不是 V 的 *spanning set,* 則 $\dim(V)>n$.

(3) 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$. 下列的敘述為等價.
 (a) $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis.*
 (b) $\dim(V)=n$ 且 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 *spanning set.*
 (c) $\dim(V)=n$ 且 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 *linearly independent.*

(4) 若 W 為 V 的 *subspace,* 則 $\dim(W)\leq\dim(V)$. 特別的, 若 $\dim(W)=\dim(V)$ 則 $W=V$.

Proof. 為了方便起見, 我們令 $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$.

(1) 依假設 $V=\mathrm{Span}(S)$, 故利用 Proposition 3.6.4 知存在 $S'\subseteq S$ 為 V 的 basis. 也就是說 S' 的元素個數就是 V 的 dimension. 然而 S' 是 S 的 subset, 所以其元素個數小於等於 S 的元素個數 n, 故得證 $\dim(V)\leq n$. 現若 S 為 linearly dependent, 即表示存在 $\mathbf{v}_i$ 可寫成 S 中其他元素的線性組合, 因此考慮 $\tilde{S}=S\setminus\{\mathbf{v}_i\}$, 我們仍有 $\mathrm{Span}(\tilde{S})=V$. 此時 $\tilde{S}$ 的元素個數為 $n-1$, 所以再套用前面所證的可得 $\dim(V)\leq n-1<n$.

(2) 依假設 S 是 linearly independent, 故利用 Proposition 3.6.5 知存在某個有限集合 S' 使得 $S\cup S'$ 為 V 的 basis. 也就是說 $S\cup S'$ 的元素個數就是 V 的 dimension. 然而 $S\subseteq S\cup S'$, 所以 $S\cup S'$ 的元素個數大於等於 S 的元素個數 n, 故得證 $\dim(V)\geq n$. 現若 S 不是 V 的 spanning set, 表示存在 $\mathbf{w}\in V$ 且 $\mathbf{w}\not\in\mathrm{Span}(S)$, 因此考慮 $\tilde{S}=S\cup\{\mathbf{w}\}$, 我們仍有 $\tilde{S}$ 為 linearly independent (Lemma 3.5.4). 此時 $\tilde{S}$ 的元素個數為 $n+1$, 所以再套用前面所證的可得 $\dim(V)\geq n+1>n$.

(3) 我們要證明 (a) 可推得 (b), (b) 可推得 (c) 以及 (c) 可推得 (a). 因此知 (a),(b),(c) 是等價的.

(a) ⇒ (b): 假設 S 是 V 的 basis, 當然 S 是 V 的 spanning set. 又由於 S 的元素個數為 n, 依定義 $\dim(V)=n$.

(b) ⇒ (c): 由於 S 是 V 的 spanning set, 由前面 (1) 的結果, 若 S 是 linearly dependent, 則 $\dim(V)<n$. 此與 $\dim(V)=n$ 假設相矛盾, 故推得 S 是 linearly independent.

(c) ⇒ (a): 由於 S 是 linearly independent, 由前面 (2) 的結果, 若 S 不是 V 的 spanning set, 則 $\dim(V)>n$. 此與 $\dim(V)=n$ 假設相矛盾, 故推得 S 是 V 的 spanning set. 因此得證 S 是 V 的 basis.

(4) 因 W 是 V 的 subspace, 故由 Proposition 3.5.6 知 W 亦為 finite dimensional vector space, 我們假設 $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 W 的 basis. 由於 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 且為 linearly independent, 故由 (2) 的結果知 $\dim(W)=n\leq\dim(V)$. 而若 $\dim(V)=n$, 則由 S 是 linearly independent 利用 (3)((c) ⇒ (a)) 知 S 也是 V 的 basis, 故得證 $W=V$. □

強調一下, Proposition 3.6.10 告訴我們知道 V 的 dimension 的好處. 若我們知道 $\dim(V)$ 恰好是 n, 則 (3) 告訴我們當要檢查 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是否為 V 的一組 basis 時, 則僅要檢查它們是否為 spanning set 或 linearly independent 其中一項就可. 所以我們只要選擇檢查哪一個較好處理即可. 另外若已知 W 為 V 的 subspace, 要檢查 W 是否為 V, 我們不必再像以前檢查是否每個 V 中的元素都在 W, 而只要算出 $\dim(W)$ 是否等於 n 即可.

Example 3.6.11. 很容易看出在 $P(\mathbb{R})$ 中 $x^n,x^{n-1},\dots,x,1$ 為 linearly independent. 這是因為如果 $c_n,\dots,c_1,c_0\in\mathbb{R}$ 使得 $c_nx^n+\cdots+c_1x+c_01$ 為零多項式, 則依零多項式的定義, $c_n,\dots,c_1,c_0$ 必全為 0. 現在我們介紹 $P(\mathbb{R})$ 中另一種重要的 linearly independent 的多項式的建構方法, 稱為 *Lagrange interpolation polynomials*. 我們僅舉出一個例子, 一般狀況請大家自行推廣.

給定 a,b,c 三相異實數, 我們希望找到三個二次多項式 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ 滿足

$$p_1(a)=1,p_1(b)=p_1(c)=0,\quad p_2(b)=1,p_2(a)=p_2(c)=0\quad\text{and}\quad p_3(c)=1,p_3(a)=p_3(b)=0.$$

由於 $p_1(b)=p_1(c)=0$, 我們知 $p_1(x)$ 應為 $(x-b)(x-c)$ 的倍式, 也就是存在實數 r 使得 $p_1(x)=r(x-b)(x-c)$. 但又要求 $p_1(a)=1$, 故代入 $x=a$ 得 $r=1/(a-b)(a-c)$. 同理可求出 $p_2(x),p_3(x)$ 因此我們有

$$p_1(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)},\quad p_2(x)=\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\quad\text{and}\quad p_3(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

我們要說明 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ 為 linearly independent. 首先觀察, 若 $f(x)=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$, 則代入 $x=a$ 時可由 $p_1(a)=1,p_2(a)=p_3(a)=0$, 得 $f(a)=c_1$. 同理知 $f(b)=c_2,f(c)=c_3$. 因此現若 $f(x)$ 為零多項式, 由 $f(a)=f(b)=f(c)=0$, 可得 $c_1=c_2=c_3=0$. 也就是說只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時才會使得 $c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$ 為零多項式, 得證 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ 為 linearly independent.

我們知道了 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)\in P_2(\mathbb{R})$ 為 linearly independent, 事實上 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ 會是 $P_2(\mathbb{R})$ 的 spanning set. 不過要證明這一點, 需用到次數小於 3 的實係數非零多項式不會有 3 個相異實根這個事實, 說明起來有點麻煩. 不過由於我們已知 $\dim(P_2(\mathbb{R}))=3$, 故由 Proposition 3.6.10 (3) 知 $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ 為 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組 basis. 也就是說任何實係數的次數小於 3 的多項式 $f(x)$ 都可以都可以找到唯一的一組 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$. 事實上代入 $x=a,b,c$, 我們知道 $c_1=f(a)$, $c_2=f(b)$, $c_3=f(c)$ 就是這唯一的一組.

同理對於任意 n 個相異實數 $a_1,\dots,a_n$, 我們有 n 個 $n-1$ 次的多項式 $p_1(x),\dots,p_n(x)$ 滿足 $p_i(a_i)=1$ 且當 $j\neq i$ 時, $p_i(a_j)=0$. 由於 $p_1(x),\dots,p_n(x)\in P_{n-1}(\mathbb{R})$ 且為 linearly independent, 故由 $\dim(P_{n-1}(\mathbb{R}))=n$ 知 $p_1(x),\dots,p_n(x)$ 為 $P_{n-1}(\mathbb{R})$ 的一組 basis.

找到一個 over $\mathbb{F}$ 的向量空間 V 之一組 basis $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的好處是, 由 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$, 我們知對任意 $\mathbf{v}\in V$, 皆可找到 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$. 又因 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 我們知這些 $c_1,\dots,c_n$ 是唯一的 (Corollary 3.5.7). 因此當我們固定 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 這一組 basis, 對任意 V 中一個向量 $\mathbf{v}$, 若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 我們可以用坐標的

方式來表示它, 即 $(c_1,\cdots,c_n)$. 這樣我們就給了 V 中的向量和 $\mathbb{F}^n$ 中的向量之間一個一對一的對應關係. 換言之, 我們可以將 V 這種抽象的向量空間視為 $\mathbb{F}^n$ 這種具體的向量空間. 這種坐標化的概念, 在之後是非常重要的.

3.7. Column Space and Null space

我們將介紹一個矩陣的 column space, row space 以及 nullspace 並探討如何找到它們的 basis. 我們會發現 column space 和 row space 的 dimension 皆相同且等於矩陣的 rank. 最後我們探討如何得到一般 subspace 的 basis.

給定一個矩陣, 它的 column space 和 nullspace 和以該矩陣為係數矩陣所形成的聯立方程組是否有解以及解是否唯一息息相關. 由於 column space 和 null space 的重要性, 我們將之正式定義如下:

Definition 3.7.1. 假設 $A=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ 為以 $\mathbb{R}^m$ 中的向量 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 column vectors 的 $m\times n$ matrix.

(1) 我們稱 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ 為 A 的 *column space*, 且用 $\mathrm{Col}(A)$ 來表示 A 的 column space.

(2) 我們稱 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 所有解所成的集合為 A 的 *null space* 且用 $N(A)$ 表示 A 的 null space. 即 $N(A)=\{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u}=\mathbf{0}\}$.

要注意當 $A\in M_{m\times n}$, 則 A 的 column space $\mathrm{Col}(A)$ 會是 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace, 而 A 的 null space $N(A)$ 會是 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace (請自行檢驗). 利用 Lemma 2.4.1 以及 Theorem 2.4.5 我們馬上有以下的結果.

Proposition 3.7.2. 假設 A 為 $m\times n$ *matrix* 且 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, 考慮聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

(1) $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解若且唯若 $\mathbf{b}\in\mathrm{Col}(A)$.

(2) 假設 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解則其解唯一若且唯若 $N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

接下來我們就是要找到一個矩陣的 column space 以及 null space 這兩個重要的 subspaces 的 basis. 一般來說要找到 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace V 的一組 basis, 我們會先找 V 的一組 spanning vectors. 然後在其中再挑出仍保持為 spanning vectors 且為 linearly independent 的一組向量. 當只有兩個向量時, 我們可以馬上由它們是否為平行來判斷是否為 linearly independent. 不過通常有三個以上的向量時, 並不容易直接看出哪些向量會 linearly independent, 除非如以下的例子.

Example 3.7.3. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 中

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\-5\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\7\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

要說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent, 我們必須說明只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時, 才會使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. 然而

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=c_1\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\-5\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\7\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c_2\\3c_1-5c_2+7c_3\\-c_3\\c_1\end{bmatrix}.$$

所以要使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 就必須讓 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$ 的 1-st entry $2c_2$, 3-rd entry $-c_3$ 以及 4-th entry c_1 皆為 0, 即 $c_1=c_2=c_3=0$. 得證只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時, 才會使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 故知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent.

從 Example 3.7.3 我們可以看出來, 當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 中每一個向量 $\mathbf{v}_i$ 都可以找到一個 entry 不為 0, 而其他向量在該 entry 皆為 0, 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent. (例如 Example 3.7.3 中 $\mathbf{v}_1$ 的 4-th entry 為 1, 而 $\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的 4-th entry 為 0; $\mathbf{v}_2$ 的 1-st entry 為 2, 而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3$ 的 1-st entry 為 0; $\mathbf{v}_3$ 的 3-rd entry 為 -1, 而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 的 3-th entry 為 0, 就符合這個條件). 此時假設每個 $\mathbf{v}_i$ 的那個非 0 的特殊 entry 為 a_i, 由於 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 在該位置的 entry 為 c_ia_i, 所以若 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, 則必 $c_ia_i=0$, 得每一個 c_i 皆為 0. 因此 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent.

當 A 為 $m\times n$ matrix, A 的 null space $N(A)$ 就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的所有解所成的集合. 由於我們已經知道如何找到 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解, 所以我們就從如何找 null space 的 basis 開始.

回顧我們找 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合的方法為, 利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form (或 reduced echelon form) A'. 此時 $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合就是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合, 也就是說 A 和 A' 有相同的 null space. 接著我們找出 free variable, 再將每個 free variable 代入任意的實數, 從下往上推得出一組解. 注意在這個過程中, pivot variable 的值會由 free variables 的值所決定, 所以只要定出 free variable 的值, 就可以得到一組解. 現假設 free variables 為 $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. 對每一個 $j=1,\dots,k$, 我們考慮 $x_{i_j}=1$, 其他 free variable 為 0 的情形, 令這樣推得出來的解為 $\mathbf{v}_j$. 由於 $\mathbf{v}_j$ 的 i_j-th entry 為 1, 而其他 $\mathbf{v}_{i_{j'}}$ 的 i_j-th entry 為 0, 由前討論知 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 為 linearly independent. 而對於任意 $r_1,\dots,r_k\in\mathbb{R}$, $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_k\mathbf{v}_k$ 就等同於是將每個 free variables $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ 分別代 $x_{i_1}=r_1,\dots,x_{i_k}=r_k$ 所得的解. 換言之每個解都可以寫成 $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_k\mathbf{v}_k$ 的形式, 也就是說 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 是 A 的 null space 的一組 spanning vectors. 我們證明了 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 就是 A 的 null space 的一組 basis, 也因此得知 A 的 null space 的 dimension 為 free variables 的個數, 亦即 A 的 column 的個數減去 pivot 的個數, 因此有以下之結果.

Proposition 3.7.4. *假設 A 為 $m\times n$ matrix. 若利用 row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 null space 的 dimension 為 $n-r$. 假設 $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的 free variables 為 $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. 對每一個 $j=1,\dots,k$, 我們取 $x_{i_j}=1$, 其他 free variable 為 0, 令這樣推得出來的解為 $\mathbf{v}_j$. 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 為 A 的 null space 的一組 basis.*

由於一個矩陣的 null space 不會因為其化為 echelon form 的不同而改變, 而且 null space 的 dimension 是固定的, 所以 Proposition 3.7.4 也說明了“不管一個矩陣利用 elementary row operations 所化得的 echelon form 為何, 其 pivot 的個數必相同”, 也就是這個矩陣的 rank.

Example 3.7.5. 考慮 A 的 null space, 其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&2\\1&2&2&-2&1&2\end{bmatrix}.$$

將 A 的 2-nd row 分別乘上 -2, -1, -1 加至 1-st, 3-rd 和 4-th row, 然後再將 1-st, 2-nd rows 交換得

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&2&-3&1&2\end{bmatrix}.$$

接著將 2-nd row 分別乘上 $-1,-2$ 加至 3-rd 和 4-th row 得

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&1&1&2\end{bmatrix}.$$

最後將 3-rd row 乘上 -1 加至 4-th row, 得 echelon form

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

我們就是要找到 homogeneous linear system

$$\begin{array}{ccccccc}x_1&&&+x_4&&&=&0\\&x_2&+x_3&-2x_4&&&=&0\\&&&+x_4&+x_5&+2x_6&=&0\end{array}$$

所有的解. 由 echelon form 看出 x_1,x_2,x_4 為 pivot variable, x_3,x_5,x_6 為 free variable. 現令 $x_6=1,x_5=0,x_3=0$, 解出 $x_4=-2$, $x_2=-4$, $x_1=2$, 而令 $x_6=0,x_5=1,x_3=0$ 解出 $x_4=-1$, $x_2=-2$, $x_1=1$, 最後令 $x_6=0,x_5=0,x_3=1$ 解出 $x_4=0$, $x_2=-1$, $x_1=0$. 故得

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-4\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

為 A 的 null space 的一組 basis. 事實上, 若令 x_6,x_5,x_3 分別為任意的實數 r,s,t, 則可得 $x_4=-2r-s$, $x_2=-4r-2s-t$, $x_1=2r+s$. 也就是說 A 的 null space 中的向量都可以寫成

$$\begin{bmatrix} 2r+s \\ -4r-2s-t \\ t \\ -2r-s \\ s \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3.$$

故知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 A 的 null space 的 spanning vectors, 又很容易看出 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 $N(A)$ 的一組 basis.

Question 3.11. 試將 *Example 3.7.5* 中的 A 化為 *reduced echelon form*. 是否更容易看出 $N(A)$ 的一組 *basis* 呢?

接下來我們來看如何找 matrix A 的 column space $\mathrm{Col}(A)$ 的 basis. 首先一個直接的想法就是 A 的 column space, 就是使得聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 有解的 $\mathbf{v}$ 所成的集合. 所以我們只要找出這些 $\mathbf{v}$, 就可以得到 A 的 column space. 我們看以下的例子.

Example 3.7.6. 考慮 Example 3.7.5 中的 4×6 matrix A. 我們要找出 A 的 column vectors 的一組 basis. 假設 $\mathbf{b}$ 為 A 的 column space 裡的一個向量, 我們知道此時 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 因此令

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

我們要找到 b_1,b_2,b_3,b_4 的條件使得以下聯立方程組有解.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = & b_1 \\ x_1 & & & +x_4 & & & = & b_2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & +2x_6 & = & b_3 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +x_5 & +2x_6 & = & b_4 \end{array}$$

考慮 augmented matrix $[A\,|\,\mathbf{b}]$, 利用 Example 3.7.5 相同的 elementary row operations 我們得

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & b_3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & b_3-b_2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 2 & b_4-b_2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_3+b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_4+3b_2-2b_1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_3+b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_3+2b_2-b_1 \end{array}\right].$$

由解聯立方程組的方法 (即 1.2 節 (2)(a)(b) 的情形) 知, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解若且唯若 $b_4-b_3+2b_2-b_1=0$. 換言之, 由所有 $b_1-2b_2+b_3-b_4=0$ 的解, 所得的 $\mathbf{b}$ 所成的集合便是 A 的 column space. 所以我們回到求矩陣 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的 null space. 由於 x_1 為 pivot variable, x_2,x_3,x_4 為 free variable. 利用前面求 null space 的 basis 的方

法, 令 $x_4=1,x_3=0,x_2=0$ 解出 $x_1=1$, 而令 $x_4=0,x_3=1,x_2=0$ 解出 $x_1=-1$, 最後令 $x_4=0,x_3=0,x_2=1$ 解出 $x_1=2$. 故得

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

為 B 的 null space 的一組 basis, 也就是 A 的 column space 的一組 basis..

注意用這個方法, 若 $m\times n$ matrix A 化成 echelon form 後沒有一個 row 全為 0, 就表示所有的 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 皆會使聯立方程組有解, 故此時 A 的 column space 為 $\mathbb{R}^m$.

Example 3.7.6 找 column space 所用的方法缺點就是還要再求另一個矩陣的 null space 才能找到 column space 的 basis. 接下來我們介紹一個更簡捷的方法.

首先注意當我們利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 和 $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有相同的解集合. 現假設 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 A 的 column vectors, 而 $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$ 為 A' 的 column vectors. 若 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 為 $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一組解, 表示 $c_1\mathbf{a}'_1+\cdots+c_n\mathbf{a}'_n=\mathbf{0}$, 此時由於 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 亦為 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一組解故我們亦有 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$. 同理若 $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$, 我們亦會有 $c_1\mathbf{a}'_1+\cdots+c_n\mathbf{a}'_n=\mathbf{0}$. 這告訴我們存在不全為 0 的 c_i 使得 $c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 若且唯若存在不全為 0 的 c_i 使得 $c_1\mathbf{a}'_1+\cdots+c_n\mathbf{a}'_n=\mathbf{0}$. 換言之, $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 linearly dependent 若且唯若 $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$ 為 linearly dependent. 這也等價於 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 linearly independent 若且唯若 $\mathbf{a}'_1,\ldots,\mathbf{a}'_n$ 為 linearly independent. 簡單來說當我們利用 elementary row operations 將一個矩陣變換到另一個矩陣, 兩個矩陣 column vectors 之間的線性關係是會被保持的. 我們看以下的例子.

Example 3.7.7. 考慮 Example 3.7.5 中的 4×6 matrix A, 且利用 elementary row operation 將之化為 reduced echelon form A'. 也就是將 Example 3.7.5 中的 echelon form 的 3-rd row 乘上 2 加到 echelon form 的 2-nd row, 再將 echelon form 的 3-rd row 乘上 -1 加到 echelon form 的 1-st row 得

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&2\\1&2&2&-2&1&2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow A'=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1&-2\\0&1&1&0&2&4\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我們很容易看出 A' 的 3 個 pivot 所在的 column vectors $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,\mathbf{a}'_4$ 為 linearly independent. 事實上 $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,\mathbf{a}'_4$ 每一個都符合有一個非 0 entry (即 pivot 之 entry) 而其他向量在該 entry 為 0. 我們考慮相對應到 A 的 column vectors $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$. 它們也會是 linearly independent. 這是因為若我們考慮新的 4×3 matrix $[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_4]$ 經由將 A 換成 A' 一樣步驟的 elementary row operation 我們會得到 $[\mathbf{a}'_1\quad\mathbf{a}'_2\quad\mathbf{a}'_4]$. 所以依前面的討論知, 因為 $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,\mathbf{a}'_4$ 為 linearly independent, 所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_4$ 也會是 linearly independent. 另一方面, 在 A' 中我們很容易看出 $\mathbf{a}'_3=\mathbf{a}'_2$, $\mathbf{a}'_5=-\mathbf{a}'_1+2\mathbf{a}'_2+\mathbf{a}'_4$ 以及 $\mathbf{a}'_6=-2\mathbf{a}'_1+4\mathbf{a}'_2+2\mathbf{a}'_4$. 所以和剛才同樣理由, 依 elementary row operations 保持線性關係的性質, 我們有 $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5=-\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4$ 以及

$\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4$. 事實上直接檢查得

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_5,$$

$$-2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4 = -2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_6.$$

換言之, $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$. 故知 A 的 column space 為

$$\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4).$$

再加上 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 是 A 的 column space 的一組 basis.

注意在 Example 3.7.7 中我們為了方便說明將 A 化為 reduced echelon form. 事實上既然我們知道 column space 的 basis 是由對應到 pivot 所在位置 A 的 column vectors 所組成, 所以化成 echelon form 知道 pivot 在那些 column 就可以找到 basis 了. 因此除非我們想要將 A 的其他 column vectors 用這組 basis 來表示, 一般是不需要進一步化成 reduced echelon form. 另外我們要強調的是 column space 的 basis 是要回到 A 的 column vectors 所組成, 而不是由 A 的 echelon form (或 reduced echelon form) A' 的 pivot 所在的 column vectors 所組成. 這是因為一般我們在做 elementary row operations 已將 column vectors 各個 entry 做了調動, 所以 echelon form A' 的 column space 已不再是原來 A 的 column space 了.

我們將這個求 column space 的 basis 的方法做一個總結. 首先將 $m \times n$ matrix A 利用 elementary row operation 化為 echelon form A'. 假設 A' 的 pivot variables 為 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, 則由於 A' 的 pivot 所在的 column vectors $\mathbf{a}'_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}'_{i_r}$ 為 linearly independent 且 elementary row operations 會保持各 column vectors 之間的線性關係, 我們知對應到 A 的 column vectors $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 亦為 linearly independent. 同理, 由於 A' 的其他 column vectors $\mathbf{a}'_j$ 皆符合 $\mathbf{a}'_j \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}'_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}'_{i_r})$, 我們得 A 的其他 column vectors $\mathbf{a}_j$ 也符合 $\mathbf{a}_j \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r})$. 因此得 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r})$. 我們證得了 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的 spanning vectors 且為 linearly independent, 故 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的一組 basis. 我們有以下的定理.

Proposition 3.7.8. *假設 $A \in M_{m \times n}$ 且 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ 為 A 的 column vectors. 若利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 column space 的 dimension 為 r. 假設 A' 的 pivot variables 為 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, 則 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的一組 basis.*

相對於矩陣的 column space, 我們也可考慮矩陣的 row space. 我們有以下的定義.

Definition 3.7.9. 假設 $A = \begin{bmatrix} - & {}_1\mathbf{a} & - \\ & \vdots & \\ - & {}_m\mathbf{a} & - \end{bmatrix}$ 為以 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 ${}_1\mathbf{a}_1,\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 為 row vectors 的 $m\times n$ matrix. 則 A 的 row space 為 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$, 且用 $\mathrm{Row}(A)$ 來表示.

如何求 A 的 row space 的 basis 呢? 我們可以考慮 A 的 transpose A^t. 因為 A^t 的 column vectors 就是 A 的 row vectors, 求出 A^t 的 column space 的 basis 就等同於求 A 的 row space 的 basis. 所以我們可以用求 column space 的 basis 方法求出 A^t 的 column space 的 basis, 便得到 A 的 row space 的 basis. 不過這個方法有個缺點, 因為我們是換了一個矩陣 A^t 做 row operations, 因此就無法得到和原來 A 的 column space 之間的關係了. 以下介紹的方法, 便是直接對 A 做 elementary row operations 來求得 A 的 row space 的 basis, 所以我們可以得到 A 的 row space 和 column space 之間的關係.

這個方法的主要概念是 A 經過 elementary row operations 變換成 A' 後, A 和 A' 的 row space 是相同的. 這是因為若 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 為 A 的 row vectors, ${}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}'$ 為 A' 的 row vectors, 則每個 ${}_i\mathbf{a}'$ 其實是 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 中的向量互相交換, 或是乘上某個非 0 實數, 或是乘上某個實數後加到另一個向量. 也就是說每個 ${}_i\mathbf{a}'$ 其實是 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 的線性組合, 所以對所有 $i=1,\ldots,m$ 皆有 ${}_i\mathbf{a}'\in\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 因此由 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 知 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 同理, 因 elementary row operation 是可以還原的, A' 也可經由 elementary row operations 換成 A, 所以我們也有 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')$. 得證 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})=\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')$, 亦即 A 和 A' 有相同的 row space. 我們看以下的例子.

Example 3.7.10. 考慮 Example 3.7.5 中的 4×6 matrix A, 且利用 elementary row operation 將之化為 reduced echelon form A' (參見 Example 3.7.7), 令 ${}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a}$ 為 A 的 row vectors, ${}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}'$ 為 A' 的 row vectors. 亦即

$${}_1\mathbf{a}=[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0],\ {}_2\mathbf{a}=[1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0],\ {}_3\mathbf{a}=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2],\ {}_4\mathbf{a}=[1\ 2\ 2\ -2\ 1\ 2],$$

$${}_1\mathbf{a}'=[1\ 0\ 0\ 0\ -1\ -2],\ {}_2\mathbf{a}'=[0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 4],\ {}_3\mathbf{a}'=[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2],\ {}_4\mathbf{a}'=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0].$$

利用 Example 3.7.5 的 elementary row operations, 我們知 A' 的 3-rd row ${}_3\mathbf{a}'$ 是由 A 的 3-rd row 減去 A 的 2-nd row 後再減去 A 的 2-nd row 乘上 -2 加到 1-st row 的向量, 亦即

$$({}_3\mathbf{a}-{}_2\mathbf{a})-({}_1\mathbf{a}-2\,{}_2\mathbf{a})={}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a}=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2]+[1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]-[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]={}_3\mathbf{a}'.$$

而利用 Example 3.7.7 的 elementary row operations, A' 的 2-rd row ${}_2\mathbf{a}'$ 是由 A 的 2-nd row 乘上 -2 加到 A 的 1-st row 後再加上 2 倍的 A' 的 3-rd row 的向量, 亦即

$$({}_1\mathbf{a}-2\,{}_2\mathbf{a})+2({}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a})=2\,{}_3\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a}=[2\ 2\ 2\ 0\ 2\ 4]-[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]={}_2\mathbf{a}'.$$

而 A' 的 1-st row ${}_1\mathbf{a}'$ 是由 A 的 2-nd row 減去 A' 的 3-rd row 的向量, 亦即

$${}_2\mathbf{a}-({}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a})={}_1\mathbf{a}-{}_3\mathbf{a}=[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]-[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2]={}_1\mathbf{a}'.$$

從這裡我們得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})$. 同理得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')$ (此處略去不檢查了). 故得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})=\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')$,

亦即 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}', {}_4\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的 spanning vectors. 在 echelon form 中, 沒有 pivot 的 row 必為零向量. 現 A' 的 pivot 個數為 3, 即 pivot 發生於前 3 個 row ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$, 而 ${}_4\mathbf{a}'$ 為零向量, 所以僅 pivot 所在的 row ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 就可以成為 A 的 row space 的 spanning vectors. 現又由於 A' 為 reduced echelon form, 每一個 row 中 pivot 所在的位置其他的 row 在該位置皆為 0, 所以 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 為 linearly independent. 得證 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的一組 basis.

注意在 Example 3.7.10 中我們為了方便說明將 A 化為 reduced echelon form. 事實上既然 A 的 echelon form 和 reduced echelon form 有相同的 row space, 而它們 pivot 的個數又相同, 所以由 dimension 的性質, 知 echelon form 中 pivot 所在的 row vectors 也會是 A 的 row space 的一組 basis. 化成 reduced echelon form 的好處是比較容易讓我們將 row space 中的向量寫成這組 basis 的線性組合. 因此除非我們想要將 A 的 row space 中的 vectors 用這組 basis 來表示, 若僅想找到 row space 的 basis 一般是不需要進一步化成 reduced echelon form. 另外我們要強調的是 row space 的 basis 不可以回到 A 的 row vectors 去找. 這是因為一般我們在做 elementary row operations 已將 row vectors 所在的位置做了調動, 所以 row operation 並沒有保持 row vectors 之間的線性關係.

我們將這個求 row space 的 basis 的方法做一個總結. 首先將 $m \times n$ matrix A 利用 elementary row operation 化為 echelon form A'. 假設 A' 的 pivot 個數為 r, 則由於 A' 為 echelon form, A' 前 r 個 row vectors ${}_1\mathbf{a}', \dots, {}_r\mathbf{a}'$ 為 nonzero vectors. A' 其餘的 row vectors 皆為 zero vectors. 由於 elementary row operations 會保持 row space, 我們得 ${}_1\mathbf{a}', \dots, {}_r\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的 spanning vectors. 又由化為 reduced echelon form 的情形我們知 A 的 row space 的 dimension 為 r, 故由 Proposition 3.6.10 知 ${}_1\mathbf{a}', \dots, {}_r\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的一組 basis. 我們有以下的定理.

Proposition 3.7.11. *假設 A 為 $m \times n$ matrix. 若利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 row space 的 dimension 為 r 且 A' 的前 r 個 row vectors ${}_1\mathbf{a}', \dots, {}_r\mathbf{a}'$ (即 A' 中的 nonzero row vectors) 為 A 的 row space 的一組 basis.*

我們可以利用找 column space 和 row space 的 basis 的方法找一般 $\mathbb{R}^m$ 的 subspace V 的 basis. 首先我們先找出 V 的一組 spanning vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, 然後造一個以 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 column vectors 的矩陣 $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. 然後再利用找 A 的 column space 的 basis 的方法得到 V 的一組 basis. 我們也可造一個以 $\mathbf{v}_1^{\mathrm{t}}, \dots, \mathbf{v}_n^{\mathrm{t}}$ 為 row vectors 的 $n \times m$ matrix $B = \begin{bmatrix} — & \mathbf{v}_1^{\mathrm{t}} & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{v}_n^{\mathrm{t}} & — \end{bmatrix}$ 然後再利用找 B 的 row space 的 basis 的方法得到 V 的一組 basis. 兩種方法都有它們的好處. 利用 column vectors 的方法, 由於最後找出的 basis 是從原來的 spanning vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 中的向量所組成, 所以適合處理希望 basis 的 vectors 是由原來 spanning vectors 中選出的問題. 而利用 row vectors 的方法, 由於可以化為 reduced echelon form, 而 basis 是由此 reduced echelon form 中的 nonzero vectors 所組成, 所以雖然和來的 spanning vectors 無關, 不過很適合拿來判斷哪些向量在此 subspace 以及處理將 subspace 中的向量用此 basis 表示的問題. 例如以下的例子.

Example 3.7.12. 考慮 $\mathbb{R}^6$ 中的向量

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-2\\1\\2\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\3\\-2\\-4\end{bmatrix}.$$

令 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$, 試找出 V 的一組 basis, 並用之判斷 $\mathbf{w}$ 是否在 V 中.

依前面的討論我們知此問題適合用 row space 的方式處理, 所以考慮以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ 為 row vectors 的矩陣 A. 此時 A 就是 Example 3.7.10 中的矩陣 A. 利用 Example 3.7.10 的結果, 我們得

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\\-2\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\2\\4\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$

為 V 的一組 basis. 注意因為原來 V 中的向量為 column vector 的形式, 為了一致性這裡我們將 A 的 row space 的 basis 寫回成 column vectors. 依此我們知 $\mathbf{w}\in V$ 若且唯若存在 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$. 然而

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_2\\c_3\\-c_1+2c_2+c_3\\-2c_1+4c_2+2c_3\end{bmatrix},$$

我們發現要使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$, 在 1-st, 2-nd 和 4-th entry 的地方 (這些地方就是 reduced echelon form 的 pivot 的位置) 需有 $c_1=1,c_2=-2,c_4=3$. 故將 $c_1=1,c_2=-2,c_3=3$ 代入, 發現每個 entry 皆吻合, 故有 $\mathbf{w}=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3$, 得知 $\mathbf{w}\in V$.

當我們對要找的 basis 沒有特殊要求時, 我們可以選擇兩種方法中可以使得矩陣的 row 的個數較少的那一種方法處理. 因為如此所需的 elementary row operations 相對起來會較少, 可以較快找到一組 basis. 例如前一個例子 Example 3.7.12 中的 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ 若考慮成 column vectors, 所得的矩陣為 6×4 matrix, 而考慮成 row vectors, 所得的矩陣為 4×6 matrix. 所以此時若僅想找出 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$ 的一組 basis, 用 row vectors 的情況處理會比較快.

我們再次強調，elementary row operations 會保持 column vectors 之間的線性關係 (但一般不會保持 column space)；不過 elementary row operations 會保持 row space (但一

般不會保持 row vectors 之間的線性關係). 因此給定一個矩陣 A, 利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A. 此時 $\mathrm{Col}(A)$ 未必等於 $\mathrm{Col}(A')$, 但由於 A' 中 pivot 所在的 column vectors 皆為 linearly independent 且能展成 $\mathrm{Col}(A')$, 所以回到原先的矩陣 A, 其對應的 column vectors 就會形成 $\mathrm{Col}(A)$ 的一組 basis. 而由於 $\mathrm{Row}(A') = \mathrm{Row}(A)$, 而且很明顯的 A' 的 pivot 所在的 row vectors 會是 $\mathrm{Row}(A')$ 的一組 basis, 所以也自然是 $\mathrm{Row}(A)$ 的一組 basis. 不過要注意，這些 A' 的 pivot 的位置對 $\mathrm{Row}(A)$ 是沒有意義的，它並未擔保其對應到 A 的 row vectors 會是 $\mathrm{Row}(A)$ 的一組 basis.

從以上的看法（或從 Proposition 3.7.8 和 Proposition 3.7.11），我們知道組成 A 的 column space 和 row space 的 basis 的向量個數皆為 pivot 的個數, 即 A 的 rank. 所以 A 的 column space 和 row space 的 dimension 都是 A 的 rank, 至於 A 的 null space 的維度, 我們也給予一特殊的名稱, 即以下的定義.

Definition 3.7.13. 假設 A 為 $m \times n$ matrix. A 的 null space 的 dimension 稱為 A 的 *nullity*, 記為 $\mathrm{nullity}(A)$, 亦即 $\mathrm{nullity}(A) = \dim(N(A))$.

依此定義, 由 Proposition 3.7.8 和 Proposition 3.7.11 我們知道 $\mathrm{rank}(A)$ 即為 A 利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數, 而由 Proposition 3.7.4 我們知道 $\mathrm{nullity}(A)$ 就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 free variables 的個數, 即 A 的 column 個數減去 echelon form 的 pivot 個數, 因此我們有以下的 *Dimension Theorem* (或稱為 *rank equation*).

Theorem 3.7.14 (Dimension Theorem)**.** 假設 A 為 *$m \times n$ matrix.* 則

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{nullity}(A) = n.$$

Question 3.12. 假設 A 為 *$n \times n$ invertible matrix.* 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{nullity}(A)$.

Question 3.13. 假設 $A \in M_{m\times n}$.

(1) 若對於任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 皆有解, 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{nullity}(A)$.

(2) 若存在 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ 使得聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 有唯一解, 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{nullity}(A)$.

Proposition 3.7.8 告訴我們 A 的 column space 的維度就是 A 的 rank, 亦即 $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rank}(A)$, 而 Proposition 3.7.11 告訴我們 $\dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A)$, 因此得 $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A))$. 也就是說一個矩陣的 column space 和 row space 有相同的維度. 現考慮矩陣 A 的 transpose A^{t}. 由於 A 的 column space 就是 A^{t} 的 row space (且 A 的 row space 就是 A^{t} 的 column space), 所以我們有 $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A^{\mathrm{t}})) = \mathrm{rank}(A^{\mathrm{t}})$. 得證以下的性質.

Proposition 3.7.15. 假設 $A \in M_{m\times n}$. 則

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{\mathrm{t}}).$$

亦即利用 *elementary row operations* 將 A 以及 A^{t} 化為 *echelon form* 後, 它們的 *pivot* 個數相同.

Question 3.14. 假設 A 為 $m\times n$ *matrix.* 試證明 $\text{nullity}(A^{t}) = m-\text{rank}(A)$.

注意, 對於 Proposition 3.7.15 的證明, 若想要直接證明利用 elementary row operations 將 A 以及 A^{t} 化為 echelon form 後, 它們的 pivot 個數相同, 會有相當的困難度. 但將這個問題轉為 column space 以及 row space 的 dimension 問題, 就很容易解決. 其實許多數學問題都是這樣, 有時只要換個角度看問題就能迎刃而解. 這也是當我們介紹一個新的概念後常常會去探討這個概念還有甚麼等價的條件的原因. 最後我們利用類似的概念來處理兩個矩陣相乘後 rank 的變化關係.

Proposition 3.7.16. 假設 $A\in M_{m\times n}$, $B\in M_{n\times l}$. 則

(1) $\text{Col}(AB)\subseteq\text{Col}(A)$ 且 $\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(A)$.

(2) $\text{Row}(AB)\subseteq\text{Row}(B)$ 且 $\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(B)$.

(3) 若 $E\in M_{n\times n}$ 為 *invertible,* 則 $\text{Col}(AE)=\text{Col}(A)$ 且 $\text{rank}(AE)=\text{rank}(A)$.

(4) 若 $H\in M_{m\times m}$ 為 *invertible,* 則 $\text{Row}(HA)=\text{Row}(A)$ 且 $\text{rank}(HA)=\text{rank}(A)$.

Proof. 令 A 和 B 的 column vectors 依序為 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ 和 $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_l$ 且令 A 和 B 的 row vectors 依序為 ${}_1\mathbf{a},\dots,{}_m\mathbf{a}$ 和 ${}_1\mathbf{b},\dots,{}_n\mathbf{b}$.

(1) 依定義 $\text{Col}(AB)=\text{Span}(A\mathbf{b}_1,\dots,A\mathbf{b}_l)$, 而對任意 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$, 我們有

$$A\mathbf{b}=\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=b_1\mathbf{a}_1+\cdots+b_n\mathbf{a}_n\in\text{Span}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=\text{Col}(A).$$

因此 $A\mathbf{b}_i\in\text{Col}(A)$, $\forall 1\leq i\leq l$. 因此得 $\text{Col}(AB)=\text{Span}(A\mathbf{b}_1,\dots,A\mathbf{b}_l)\subseteq\text{Col}(A)$. 換言之 $\text{Col}(AB)$ 為 $\text{Col}(A)$ 的 subspace, 故由 Proposition 3.6.10 (4) 知 $\text{rank}(AB)=\dim(\text{Col}(AB))\leq\dim(\text{Col}(A))=\text{rank}(A)$.

(2) 依定義 $\text{Row}(AB)=\text{Span}({}_1\mathbf{a}B,\dots,{}_m\mathbf{a}B)$, 而對任意 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$, 我們有

$$\mathbf{a}B=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} - & {}_1\mathbf{b} & - \\ & \vdots & \\ - & {}_n\mathbf{b} & - \end{bmatrix}=a_1({}_1\mathbf{b})+\cdots+a_n({}_n\mathbf{b})\in\text{Span}({}_1\mathbf{b},\dots,{}_n\mathbf{b})=\text{Row}(B).$$

因此 ${}_i\mathbf{a}B\in\text{Row}(B)$, $\forall 1\leq i\leq m$. 因此得 $\text{Row}(AB)=\text{Span}({}_1\mathbf{a}B,\dots,{}_m\mathbf{a}B)\subseteq\text{Row}(B)$. 換言之 $\text{Row}(AB)$ 為 $\text{Row}(B)$ 的 subspace, 故由 Proposition 3.6.10 (4) 知 $\text{rank}(AB)=\dim(\text{Row}(AB))\leq\dim(\text{Row}(B))=\text{rank}(B)$.

(3) 利用前面 (1) 的結果我們知 $\text{Col}(AE)\subseteq\text{Col}(A)$. 因 E 為 invertible, 考慮 $(AE)E^{-1}=A(EE^{-1})=A$. 再利用 (1) 知 $\text{Col}(A)=\text{Col}((AE)E^{-1})\subseteq\text{Col}(AE)$. 因此得證 $\text{Col}(AE)=\text{Col}(A)$ 且取 dimension 得 $\text{rank}(AE)=\dim(\text{Col}(AE))=\dim(\text{Col}(A))=\text{rank}(A)$.

(4) 利用前面 (2) 的結果我們知 $\mathrm{Row}(HA) \subseteq \mathrm{Row}(A)$. 因 H 為 invertible, 考慮 $H^{-1}(HA) = (H^{-1}H)A = A$. 再利用 (2) 知 $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(H^{-1}(HA)) \subseteq \mathrm{Row}(HA)$. 因此得證 $\mathrm{Row}(HA) = \mathrm{Row}(A)$ 且取 dimension 得 $\mathrm{rank}(HA) = \dim(\mathrm{Row}(HA)) = \dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A)$. □

注意, 在 Proposition 3.7.16 (3) 中我們知道當 E 為 invertible 時 $\mathrm{rank}(AE) = \mathrm{rank}(A)$, 也因此知 $\dim(\mathrm{Row}(AE)) = \mathrm{rank}(AE) = \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Row}(A))$. 不過這並不代表 $\mathrm{Row}(AE) = \mathrm{Row}(A)$. 這是因為 $\mathrm{Row}(AE)$ 和 $\mathrm{Row}(A)$ 未必有包含關係, 因此即使 $\dim(\mathrm{Row}(AE)) = \dim(\mathrm{Row}(A))$, 也無法推得 $\mathrm{Row}(AE) = \mathrm{Row}(A)$. 同理在 Proposition 3.7.16 (4) 中我們知道當 H 為 invertible 時 $\dim(\mathrm{Col}(HA)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$, 但 $\mathrm{Col}(HA)$ 也未必等於 $\mathrm{Col}(A)$.

Question 3.15. 試找到例子 $A, E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 其中 E 為 *invertible* 使得 $\mathrm{Row}(AE) \neq \mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Col}(EA) \neq \mathrm{Col}(A)$. *(Hint: 考慮 E 為 elementary matrix.)*

Question 3.16. 試用取轉置矩陣的方法利用 *Proposition 3.7.16 (1)* 證明 *(2)*, 且利用 *(3)* 證明 *(4)*.

Question 3.17. 試利用 *Proposition 2.5.7*, 即 *invertible matrix* 皆可寫成 *elementary matrices* 的乘積, 證明 *Proposition 3.7.16 (3), (4)*.