Exercises

1 Systems of Linear Equations

1. 假設 A,B 為同階的矩陣。以下各小題中 A 經由一個 elementary row operation 變成 B, 請說明如何用同樣 type 的 elementary row operation 將 B 變回 A.

   (a) A 經由將 i-th row 和 j-th row 交換的 type 1 elementary row operation 變成 B.

   (b) A 經由將 i-th row 乘上非 0 實數 r 的 type 2 elementary row operation 變成 B.

   (c) A 經由將 i-th row 乘上實數 r 加到 j-th row 的 type 3 elementary row operation 變成 B.

2. 考慮 type 1, type 2 以及 type 3 的 elementary row operations.

   (a) 試著利用一些 type 3 以及 type 2 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) 證明所有 type 1 的 elementary row operation 皆可經由三次 type 3 的 elementary row operation 與一次 type 2 的 elementary row operation 得到。

   (c) 利用習題 1 之 elementary row operation 的可逆性以及 (b) 說明某一個 row 乘上 -1 這種 type 2 的 elementary row operation，也可經由三次 type 3 的 elementary row operation 與一次 type 1 的 elementary row operation 得到。

   (d) 說明當 $a \neq \pm 1$ 時，無法經一些 type 1 以及 type 3 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$（Hint: 觀察行列式的變化）.（註: 這說明當 $a \neq \pm 1$ 時，某一個 row 乘上 a 這種 type 2 的 elementary row operation 無法經由一些 type 1 和 type 3 的 elementary row operations 得到。)

   (e) 說明無法經一些 type 1 以及 type 2 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$（Hint: 觀察 0 的個數變化）.（註: 這說明 type 3 的 elementary row operation 無法經由一些 type 1 和 type 2 的 elementary row operations 得到。)

3. 分別討論以下 system of linear equations 的 coefficient matrix 的 rank, 並寫下其解集合。

   (a)

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & -3x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +9x_4 & +4x_5 & = & -5 \\ 7x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +8x_4 & +x_5 & = & 6 \end{array}$$

4. 令 $\lambda \in \mathbb{R}$, 考慮矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \lambda & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda & 6 \end{bmatrix}$$

試依照 λ 的取值探討 $\operatorname{rank}(A)$.

5. 已知存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得聯立方程組

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & -6\beta \\ 2x_1 & +x_2 & +(\alpha+1)x_3 & = & 4 \\ \alpha x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 2\beta \end{array}$$

有無窮多組解。試找出這些所有可能的數對 (α, β).

6. 假設 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是一個有三個未知數 x_1, x_2, x_3 的聯立方程組，其中 A 不為零矩陣。已知 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ 以及 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 3)$ 皆為此聯立方程組的解。

   (a) 試舉例說明 x_3 未必是 pivot variable.

   (b) 證明不管 x_3 是否為 pivot variable, x_2 一定是 free variable.

   (c) 證明若 x_3 是 free variable, 則 x_1 是 pivot variable.

   (d) 試依 x_1, x_3 是否為 pivot variables 的各種情況分別寫下與 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 為 equivalent 的 linear system. (Hint: 共有 3 種可能，利用 reduced echelon form 處理)

7. 試將以下矩陣化為 reduced echelon form. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. 試說明以下矩陣那些可利用 elementary row operations 互換。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. 令 A 為 4×6 matrix 且可利用 elementary row operation 化為 reduced echelon form B. 令 A_i, B_i 分別表示 A, B 的 i-th column.

(a) 假設 $A_4 = 4A_1 + 3A_3$, 試說明 homogeneous system $A\mathbf{x} = \mathbf{O}$ 有一組解為

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 0, 3, -1, 0, 0).$$

(b) 證明 $A_4 = 4A_1 + 3A_3$ 若且唯若 $B_4 = 4B_1 + 3B_3$.

(c) 已知

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad A_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

試將原先 A 完整的矩陣形式寫下。

2 Matrix

1. 假設 $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 4}$, $B = [b_{ij}] \in M_{4\times 3}$ 其中 $a_{ij} = i + j$, $b_{ij} = i \cdot j$.

   (a) 試完整寫下矩陣 A 和 B.

   (b) 試利用 B 的 3rd column 計算 AB 的 3rd column 並依所求結果寫下 AB 的 $(2,3)$-th entry.

   (c) 直接利用內積方法計算 AB 的 $(2,3)$-th entry.

2. 設 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 上的向量, 若將 $\mathbf{a}$ 寫成 row vector 的形式, $\mathbf{b}$ 寫成 column vector 的形式, 且將 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 看成矩陣, 即 $\mathbf{a} \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. 試問依矩陣乘法定義 $\mathbf{ba}$ 應為何種矩陣? 它和 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 看成 $\mathbb{R}^n$ 上的向量後取內積 $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ 有關嗎?

3. 假設 $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}, B = [b_{ij}] \in M_{n\times k}$ 且令 $AB = [c_{ij}]$. 令 $\mathbf{b}_k, \mathbf{c}_k$ 分別表示 B 和 AB 的 kth column. 已知 $\mathbf{b}_4 = r\mathbf{b}_1 + s\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3$ 其中 $r, s, t \in \mathbb{R}$. 證明 $\mathbf{c}_4 = r\mathbf{c}_1 + s\mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_3$.

4. 一個 $n \times n$ 的 square matrix 其 (i,i)-th entry 稱為 *diagonal entry*. 若除了 diagonal entries 以外, 其他的 entry 皆為 0, 我們便稱之為 *diagonal matrix*. 假設 A, B 皆為 $n \times n$ 的 diagonal matrix 且設 A, B 的 (i,i)-th entry 分別為 a_i, b_i.

   (a) 試證明 $A + B$ 也是 diagonal matrix 且寫下 $A + B$ 的 (i,i)-th entry.

   (b) 試證明 AB 也是 diagonal matrix 且寫下 AB 的 (i,i)-th entry. 並依此說明 A 和 B 是否為 commutative (即是否乘法可交換 $AB = BA$)?

5. 固定一正整數 m, 考慮所有 $m \times 3$ matrices.

   (a) 試找到一個 3×3 matrix E_1 使得對任意 $A \in M_{m\times 3}$, 皆有 AE_1 的 1-st column 就是 A 的 1-st column, 而 AE_1 的 2-nd column 恰為 A 的 3-rd column 且 AE_1 的 3-rd column 恰為 A 的 2-nd column.

   (b) 試找到一個 3×3 matrix E_2 使得對任意 $A \in M_{m\times 3}$, 皆有 AE_2 的 1-st column 就是 A 的 1-st column, 而 AE_2 的 2-nd column 也是 A 的 2-nd column 且 AE_2 的 3-rd column 恰為 A 的 3-rd column 的 4 倍.

(c) 試找到一個 3×3 matrix E_3 使得對任意 $A\in M_{m\times 3}$, 皆有 AE_3 的 1-st column 就是 A 的 1-st column 減去 A 的 3-rd column, 而 AE_3 的 2-nd column 恰為 A 的 2-rd column 且 AE_3 的 3-rd column 恰為 A 的 3-rd column.

6. 假設 $A=[a_{ij}]\in M_{3\times 4}$, $B=[b_{ij}]\in M_{4\times 3}$ 其中 $a_{ij}=i+j$, $b_{ij}=i\cdot j$.

   (a) 試完整寫下矩陣 A^{t} 和 B^{t}.

   (b) 前次習題曾計算 AB 的 3rd column. 請說明可以 $(AB)^{\mathrm{t}}$ 哪個 row 或是 column 來求 AB 的 3rd column. 並利用 A^{t}, B^{t} 的乘法 (注意順序) 求出。

7. 給定一實係數多項式 $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{R}[x]$. 對任意 n 階方陣 A, 定義 $f(A)$ 為 n 階方陣 $a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0I_n$, 其中 I_n 為 n 階單位矩陣.

   (a) 假設 A 為 diagonal matrix. 利用數學歸納法證明 A^k 為 diagonal matrix, 其中 k 為任意正整數。

   (b) 若 A 為 diagonal matrix 證明 $f(A)$ 亦為 diagonal matrix.

   (c) 若 A 和 B 為 commutative, 證明對任意正整數 k,l 皆有 A^k 和 B^l 為 commutative.

   (d) 假設 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$. 若 A 和 B 為 commutative, 證明矩陣 $f(A)$ 和 $g(B)$ 亦為 commutative.

8. 假設 $A_1,A_2\ldots,A_n$ 為矩陣且 $A_1\cdot A_2\cdots A_n$ 符合矩陣乘法。試利用數學歸納法證明

$$(A_1\cdot A_2\cdots A_n)^{\mathrm{t}}=A_n^{\mathrm{t}}\cdots A_2^{\mathrm{t}}\cdot A_1^{\mathrm{t}}.$$

9. 對於 n 階 square matrix A, 若存在 n 階 square matrix B 使得 $BA=I_n$ 且 $AB=I_n$, 則稱 A 為 invertible matrix 且稱 B 為其 inverse, 記為 A^{-1}. 請證明以下有關 invertible matrix 的性質。

   (a) 假設 $A_1,A_2\ldots,A_m$ 為 n 階 invertible matrices。試利用數學歸納法證明

$$(A_1\cdot A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}.$$

   (b) 假設 A 為 invertible, 證明 $(A^{\mathrm{t}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{t}}$.

   (c) 假設 A 為 invertible matrix, 對任意非零 $r\in\mathbb{R}$, 證明 rA 亦為 invertible.

   (d) 假設 A 為 n 階 square matrix 滿足 $A^2=O$, 證明 A 為 non-invertible 但 I_n-A 為 invertible (Hint 利用 $I_n-A^2=(I_n-A)(I_n+A)$). 請推廣到一般 $A^k=O$ 的情況。

10. 若一個方陣 A 滿足 $A^{\mathrm{t}}=A$, 則稱 A 為 symmetric matrix.

   (a) 假設 A 為 symmetric 且為 invertible. 證明 A^{-1} 亦為 symmetric.

   (b) 假設 A,B 為 n 階 symmetric matrices. 證明 AB 為 symmetric matrix 若且唯若 A,B 為 commutative.

   (c) 試說明 elementary matrix 的 transpose 亦為 elementary matrix (需說明原來對應的 elementary row operation 轉置後其所對應的 elementary row operation 為何)。

11. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) 利用一些 elementary row operations 將 A 化成 reduced echelon form. 寫下每個 elementary row operation 所對應的 elementary matrix.

(b) 寫下 A^{-1} 並將 A^{-1} 寫成一些 elementary matrix 的乘積（不必乘開驗證）。

(c) 利用 (b) 的結果將 A 寫成一些 elementary matrix 的乘積（不必乘開驗證）。

12. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) 試找到一個 invertible matrix E 使得 EA 為 reduced echelon form.

(b) 試求 $\text{rank}(A)$ 並說明對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$ 有解，其中 k, ℓ 為何？

(c) 試找到無窮多個 C 滿足 $AC = I_4$.

13. 給定一 $m \times n$ matrix A，其中 $m \neq n$. 假設 B 為 $n \times m$ matrix 滿足 $AB = I_m$.

(a) 試說明對任意 $k \in \mathbb{N}$, 皆存在 $n \times k$ 的非零矩陣 C 使得 AC 為 $m \times k$ 的零矩陣。

(b) 試說明若 D 為 $k \times m$ matrix 使得 DA 為 $k \times n$ 的零矩陣, 則 D 為零矩陣。

14. 假設 A 為 $m \times n$ matrix 且 B 為 $n \times m$ matrix 滿足 $AB = I_m$. 前面的習題已知當 $m \neq n$ 時會存在無窮多個矩陣 M 使得 $AM = I_m$ 但不存在矩陣 N 使得 $NA = I_n$。又存在非零矩陣 C 使得 AC 為零矩陣但不存在非零矩陣 D 使得 DA 為零矩陣。請分別依 $m \neq n$; $m = n$ 兩種情況回答以下問題並說明原因。

(a) 是否存在矩陣使得 $BM = I_n$？

(b) 是否存在無窮多個矩陣使得 $NB = I_m$？

(c) 是否存在非零矩陣 C 使得 BC 為零矩陣？

(d) 是否存在非零矩陣 D 使得 DB 為零矩陣？

15. 考慮聯立方程組 $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 3x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$, 令 A 為其係數矩陣且令 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) 求 $\text{rank}(A)$ 並說明此聯立方程組若有解是否解唯一。

(b) 試找出矩陣 D 使得 $DA = I_3$.

(c) 試求 $D\mathbf{b}$ 並利用 $\mathbf{x} = D\mathbf{b}$ 代回聯立方程組說明為何此聯立方程組無解。

16. 假設 AB 為 invertible, 其中 A 為 $m \times n$ matrix, B 為 $n \times m$ matrix 且 $m \neq n$.

(a) 試說明 $\text{rank}(A)$ 與 $\text{rank}(B)$ 為何.

(b) 證明 BA 不是 invertible.

17. 假設 A,B 為 n 階 square matrices 滿足 $AB-I_n$ 為 invertible. 證明

$$(BA-I_n)\left(B(AB-I_n)^{-1}A-I_n\right)=I_n$$

並以此說明 $BA-I_n$ 亦為 invertible. (Hint: 利用 $BAB=B(AB-I_n)+B$)

3 Vector Spaces

1. 考慮集合 $S=\{1,2\}$, 以及 vector space $\mathbb{R}^3$ (一般的加法與係數積). 令 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 $\mathbb{R}^3$ 的函數所成的集合. 對任意 $f,g\in F(S,\mathbb{R}^3)$, $r\in\mathbb{R}$ 定義 $(f+g)(1)=f(1)+g(1),(f+g)(2)=f(2)+g(2)$ 以及 $(rf)(1)=r\cdot f(1),(rf)(2)=r\cdot f(2)$

   (a) 已知 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 在此定義之下是一個 over $\mathbb{R}$ 的 vector space. 若 $h\in F(S,\mathbb{R}^3)$ 是此空間的零向量, 請寫下 $h(1),h(2)$.

   (b) 若 $f,g\in F(S,\mathbb{R}^3)$ 滿足

   $$f(1)=(0,1,2),f(2)=(1,2,3);\quad g(1)=(-1,2,-1),g(2)=(2,0,1)$$

   試寫下 $(3f-2g)$ 在 1, 2 的函數值.

2. 考慮集合 $U=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R},a>0 \text{ 且 } b>0\}$. 定義 U 上的加法運算為: 若 $\mathbf{u}=(a,b),\mathbf{v}=(c,d)\in U$, 則 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(ac,bd)$. 另外對任意 $r\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}=(a,b)\in U$ 定義係數積 $r\mathbf{u}=(a^r,b^r)$. 試回答以下問題.

   (a) U 是否為 vector space over $\mathbb{R}$? U 是否為 $\mathbb{R}^2$ (一般的加法與係數積) 的 subspace?

   (b) 假設 $\mathbf{v}=(25,1/9),\mathbf{w}=(4,1)$ 且 $\mathbf{u}=(x,y)$ 在 U 中滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=5\mathbf{w}$. 利用定義分別寫下 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ 以及 $5\mathbf{w}$ 的坐標表示法, 並依此解出 x,y.

   (c) 若給定 $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$ 已知 $\mathbf{u}\in U$ 滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=5\mathbf{w}$. 試將 $\mathbf{u}$ 寫成 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的線性組合. 假設 $\mathbf{v}=(25,1/9),\mathbf{w}=(4,1)$. 若 $\mathbf{u}\in U$ 滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=5\mathbf{w}$. 利用上述的線性組合, 解出 $\mathbf{u}$.

   (d) 下列哪些是 U 的 subspace, 並說明理由.

   $$U_1=\{(x,1):x>0\};\quad U_2=\{(2^r,3^r):r\in\mathbb{R}\};$$

   $$U_3=\{(x,y):x>1,y>1\};\quad U_4=\{(x,y):x\geq 1,y\geq 1\}.$$

3. 考慮集合 $S=\{1,2\}$, 以及 vector space $\mathbb{R}^3$. $F(S,\mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 $\mathbb{R}^3$ 的函數所成的 vector space (上週習題所定的運算方法)。下列哪些是 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 的 subspace, 並說明理由.

   $$F_1=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3):f(2)=(0,0,0)\};\ F_2=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3):f(1)+f(2)=(0,0,0)\}$$

   $$F_3=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3):f(1)\cdot f(2)=0\};\ F_4=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3):f(1)=(x,y,z),xyz=0\}$$

   $$F_5=\{f\in F(S,\mathbb{R}^3):f(2)=(x,y,z),x+2y-z=0\}.$$

4. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n. 令 $W_1 = \{A \in M_n : A^{\mathrm{t}} = A\}$, $W_2 = \{A \in M_n : A^{\mathrm{t}} = -A\}$, $W_3 = \{[a_{ij}] \in M_n : a_{ij} = 0, \forall i \leq j\}$.

   (a) 證明 W_1, W_2 為 M_n 的 subspace 且 $W_1 + W_2 = M_n$.

   (b) 證明 W_3 為 M_n 的 subspace 且 $W_1 + W_3 = M_n$.

5. 在以下的 vector space 中檢查是否 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 在 $\mathrm{Span}(S)$ 中.

   (a) $\mathbf{v} = (-1,1,1,2), \mathbf{w} = (2,-1,1,-3)$, $S = \{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$ in $\mathbb{R}^4$.

   (b) $\mathbf{v} = -x^3 + 2x^2 + 3x + 3, \mathbf{w} = 2x^3 - x^2 + x + 3$, $S = \{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1\}$ in $P_3(\mathbb{R})$.

   (c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ in $M_2(\mathbb{R})$.

6. 在 $M_2(\mathbb{R})$ 中令 $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^{\mathrm{t}} = A\}$ 以及

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   證明 $W = \mathrm{Span}(A_1, A_2, A_3)$ 並說明 $W \subsetneq \mathrm{Span}(A_1, A_2, A_4, A_5)$ 以及 $W \supsetneq \mathrm{Span}(A_3, A_6)$.

7. 假設 V 為 vector space 且 $S \subseteq V$. 證明 S 是 V 的 subspace 若且唯若 $\mathrm{Span}(S) = S$.

8. 請決定以下集合在所屬的 vector space 中是否為 linearly independent. 若為 linearly dependent, 試將其中一個元素表示成其他元素的線性組合.

   (a) $S_1 = \{(1,0,0),(1,2,-1),(0,1,1)\}$, $S_2 = \{(1,1,-1),(0,1,1),(1,2,0)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

   (b) $S_3 = \{2x^2 + x + 1, x^2 + 3, x + 2\}$, $S_4 = \{2x^2 + x + 1, 3x^2 + x - 5, x + 13\}$ in $P_2(\mathbb{R})$.

   (c) $S_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $S_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ in $M_2(\mathbb{R})$

9. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ 為 linearly independent. 令

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{v}_2 + c_1\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 = a_2\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_3 = a_3\mathbf{v}_1 + b_3\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3,$$

   以及 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. 證明 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 為 linearly independent 若且唯若 A 為 invertible.

10. 請決定以下集合是否為其所屬的 vector space 中的一組 basis.

   (a) In $\mathbb{R}^3$,

$$S_1 = \{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}, \quad S_2 = \{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,10,-2)\}.$$

(b) In $P_2(\mathbb{R})$,

$$S_3 = \{-2x^2-2x+1, x^2-3x+2, 6x^2-x+1\},$$
$$S_4 = \{x^2-2x-1, x^2-2x+4, 9x^2-18x+1\}.$$

11. 假設 V, W 皆為 over $\mathbb{F}$ 的 vector space. 令 $U = \{(\mathbf{v},\mathbf{w}) : \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$, 且定義 U 中的加法與係數積如下：

$$(\mathbf{v},\mathbf{w}) + (\mathbf{v}',\mathbf{w}') = (\mathbf{v}+\mathbf{v}', \mathbf{w}+\mathbf{w}'), \quad c(\mathbf{v},\mathbf{w}) = (c\mathbf{v}, c\mathbf{w}), \forall \mathbf{v},\mathbf{v}' \in V; \mathbf{w},\mathbf{w}' \in W; c \in \mathbb{F}.$$

(a) 說明 U 為 vector space over $\mathbb{F}$.

(b) 假設 $\dim(V) = m, \dim(W) = n$, 證明 $\dim(U) = m+n$.

12. 給定 $n \in \mathbb{N}$, 令 $P_n(\mathbb{R})$ 表示所有次數小於等於 n 的實係數多項式所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space.

(a) 若 $m \le n+1$ 且 $f_1(x), \ldots, f_m(x) \in P_n(\mathbb{R})$ 為次數皆相異的非零多項式. 證明 $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ 為 linearly independent.

(b) 假設 $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x) \in P_n(\mathbb{R})$ 且 $\deg(p_i(x)) = i, \forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$ 其中 $p_0(x) \neq 0$. 證明 $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ 為 $P_n(\mathbb{R})$ 的一組 basis. (Hint: 可用 $\dim_{\mathbb{R}}(P_n(\mathbb{R})) = n+1$)

13. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) 試求 A 的 nullity 並寫下 $N(A)$ 的一組 basis.

(b) 試找到矩陣 B 使得 $N(B) = \mathrm{Col}(A)$, 並依此找出 $\mathrm{Col}(A)$ 的一組 basis.

(c) 試利用 elementary row operations 在 A 的 column vectors 中找到一組 $\mathrm{Col}(A)$ 的 basis.

(d) 試將 (c) 中 basis 的向量寫成 (b) 中的 basis 的線性組合.

(e) 試利用 A^{t}, 找到 $\mathrm{Row}(A)$ 的一組 basis.

(f) 找到 $N(A^{\mathrm{t}})$ 的一組 basis. 說明 $N(A^{\mathrm{t}})$ 和 $\mathrm{Col}(A)$ 的關係以及 $N(A)$ 和 $\mathrm{Row}(A)$ 的關係.

14. 考慮所有次數小於等於 2 的實係數多項式所形成的 vector space $P_2(\mathbb{R})$. 令

$$S = \{2x^2-3x+1, x^2+4x-2, -8x^2+12x-4, x^2+37x-17, -3x^2-5x+8\}$$

且令 $V = \mathrm{Span}(S)$. (Hint: 可將 $P_2(\mathbb{R})$ 的元素看成 $\mathbb{R}^3$ 的向量。例如 $2x^2-3x+1$ 看成 $(2,-3,1)$.)

(a) 試找到 S 的一個 subset 形成 V 的一組 basis.

(b) 試將 S 中其他的元素寫成 (a) 中所得的 basis 的 linear combination.

(c) 試說明 V 是否等於 $P_2(\mathbb{R})$.

15. 考慮所有 2×3 實矩陣所形成的 vector space 中的一個 subspace

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} : a_1-a_2+2b_1-3b_2+b_3=2a_1-a_2-a_3+3b_1-4b_2+4b_3=0\right\}.$$

考慮 $M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) 試找到 V 的一組 basis.

(b) 說明 $M_1, M_2 \in V$ 且 M_1, M_2 為 linearly independent.

(c) 擴充 M_1, M_2 使其形成 V 中的一組 basis.

16. 考慮 $\mathbb{R}^7$ 中的向量 $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 且令 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$.

(a) 試找到矩陣 A 使得 $V=\mathrm{Col}(A)$, 且將 A 化成 echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.

(b) 試找到矩陣 B 使得 $V=\mathrm{Row}(B)$, 且將 B 化成 reduced echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.

(c) 若不限制 basis 的形式你覺得此題哪一個找 basis 的方法比較好? 試將其中一組 basis 寫成另一組 basis 的線性組合.

17. 考慮 $\mathbb{R}^4$ 中的兩個 subspace

$$W_1=\mathrm{Span}((1,1,1,1),(1,0,2,0),(0,2,1,1)), W_2=\mathrm{Span}((3,0,3,1),(3,2,3,2),(2,-1,2,0))$$

(a) 找到矩陣 B_1, B_2 使得 $W_1=N(B_1)$, $W_2=N(B_2)$, 並以此找出 $W_1\cap W_2$ 的一組 basis.

(b) 利用 $W_1\cap W_2$ 的 basis 分別擴充成 W_1+W_2 的一組 basis. 並以此驗算

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2).$$

4 Inner Product Space

1. 假設 V 為 vector space 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 為其 basis. 考慮 V 上的一個 inner product $\langle , \rangle$. 已知 $\|\mathbf{v}_1\|=1$, $\|\mathbf{v}_2\|=9$ 且 $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle=-1$. 若 $\mathbf{w}_1=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2$, 試求 $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle$.

2. 當 $A=[a]$ 為 1×1 matrix, 我們定義 $\det(A)=a$, 而當 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為 2×2 matrix, 我們定義 $\det(A)=ad-bc$.

(a) 試說明 $\langle A,B\rangle = \det(B^{\mathrm{t}}A)$, $\forall A,B \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ 是否為 $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ 的 inner product?

(b) 試說明 $\langle A,B\rangle = \det(B^{\mathrm{t}}A)$, $\forall A,B \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ 是否為 $M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ 的 inner product?

3. 考慮次數不大於 2 的實係數多項式所形成的向量空間 $P_2(\mathbb{R})$.

(a) 試說明

$$\langle f,g\rangle = f(-1)g(-1)+f(1)g(1), \forall f,g \in P_2(\mathbb{R})$$

是否為 $P_2(\mathbb{R})$ 的 inner product?

(b) 試說明

$$\langle f,g\rangle = f(-1)g(-1)+f(1)g(1)+f(-2)g(-2)+f(2)g(2), \forall f,g \in P_2(\mathbb{R})$$

是否為 $P_2(\mathbb{R})$ 的 inner product?

(c) 若定義

$$\langle f,g\rangle = f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1), \forall f,g \in P_2(\mathbb{R}).$$

試求 $\|x^2\|, \|x\|, \|1\|$ 以及 $\|x^2+x+1\|$.

4. 對任意 V 中的子集合 S 定義 $S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in S\}$.

(a) 若 $S \subseteq V$, 證明 $S^{\perp}$ 為 V 的一個 subspace.

(b) 證明 $S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp}$.

(c) 假設 $S_1 \subseteq S_2$ 皆為 V 的 subset, 證明 $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

(d) 證明 $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$, 並依此說明 $\mathrm{Span}(S) \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$.

5. 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 orthonormal basis.

(a) 假設 $\mathbf{u},\mathbf{w} \in V$ 且 $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n$ 且 $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1+\cdots+b_n\mathbf{v}_n$. 證明

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = a_1b_1+\cdots+a_nb_n = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}_i\rangle\langle \mathbf{w},\mathbf{v}_i\rangle.$$

(b) 令 $W = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)$ 其中 $1 \le k < n$. 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 證明

$$\| \mathbf{v} \|^2 \ge \sum_{i=1}^{k}\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_i\rangle^2,$$

且等號成立若且唯若 $\mathbf{v} \in W$.

6. 在 $\mathbb{R}^4$ 中考慮 dot product. 令 $W = \mathrm{Span}\big((2,-1,-2,4),(-2,1,-5,5),(-1,3,7,11)\big)$

(a) 利用 Gram-Schmidt Process 找到 W 上的一組 orthonormal basis, 並將之擴大成 $\mathbb{R}^4$ 的一組 orthonormal basis.

(b) 試求 $\mathbf{v} = (-11,8,-4,18)$ 在 W 上的 orthogonal projection.

7. 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 上的 inner product 定義為

$$\langle f,g\rangle = f(1)g(1)+f(0)g(0)+f(-1)g(-1),\ \forall f,g\in P_2(\mathbb{R}).$$

   (a) 針對 $P_2(\mathbb{R})$ 上 $x^2,1,x$ 這組 basis, 利用 Gram-Schmidt Process 找到 $P_2(\mathbb{R})$ 上的一組 orthonormal basis.

   (b) 試求 $(x+1)^2$ 在 $\mathrm{Span}(x^2,1)$ 上的 orthogonal projection.

8. 考慮 V 為 finite dimensional inner product space.

   (a) 假設 W 為 V 的 subspace, 證明若 $\mathbf{v}\notin W$, 則存在 $\mathbf{u}\in W^\perp$ 使得 $\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle \neq 0$.

   (b) 假設 W_1,W_2 為 V 的 subspace, 證明 $(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

   (c) 假設 W_1,W_2 為 V 的 subspace, 證明 $W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1\cap W_2)^\perp$.

9. 假設 $A\in M_{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(A)=n$. 令 P 表示投影到 $\mathrm{Col}(A)$ 的投影矩陣. 請利用 A,A^{t} 表示 P 並利用矩陣乘法性質 (不要用投影概念) 證明以下敘述:

   (a) 若 $\mathbf{w}\in\mathrm{Col}(A)$, 則 $P\mathbf{w}=\mathbf{w}$. (Hint: $\mathbf{w}=A\mathbf{x}$ for some $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$)

   (b) 若 $\mathbf{v}\in\mathrm{Col}(A)^\perp$, 則 $P\mathbf{v}=\mathbf{O}$. (Hint: $\mathbf{v}\in N(B)$ for some matrix B. what's B?)

10. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 利用 dot product 所成的 inner product space. 令 W 為 V 的 subspace.

   (a) 已知對任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, 存在 $\mathbf{w}\in W,\mathbf{w}'\in W^\perp$ 使得 $\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{w}'$. 證明 $\mathbf{v}$ 在 W 的投影為 $\mathbf{w}$ 且 $\mathbf{v}$ 在 $W^\perp$ 的投影為 $\mathbf{w}'$.

   (b) 假設 P_W, $P_{W^\perp}$ 分別為對 W 和 $W^\perp$ 的投影矩陣. 證明 $P_W = I_n - P_{W^\perp}$ (即證明若 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, 則 $(I_n-P_{W^\perp})\mathbf{v}$ 為 $\mathbf{v}$ 在 W 的投影).

11. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 利用 dot product 所成的 inner product space. 令 $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y+z=0\}$. 以下我們用兩種方法求對 W 的投影矩陣.

   (a) 找出 W 的一組 basis, 並利用此組 basis 得到矩陣 A 使得 $\mathrm{Col}(A)=W$.

   (b) 利用 (a) 中所得的 A 寫下對 W 的投影矩陣 (請將矩陣具體乘開).

   (c) 找出 $W^\perp$ 的一組 basis, 並利用此組 basis 得到矩陣 B 使得 $\mathrm{Col}(B)=W^\perp$.

   (d) 利用 (c) 中所得的 B 寫下對 $W^\perp$ 的投影矩陣, 並利用上一題 (b) 的結果寫下對 W 的投影矩陣.

12. 此題我們用 normal equations 以及 QR decomposition 求 inconsistent system 的 least squares solution. 請使用以下資訊: $\mathbf{w}_1=(1,3,1,1),\mathbf{w}_2=(1,1,1,1),\mathbf{w}_3=(-1,5,2,2)$ 利用 Gram-Schmidt 在 dot product 之下可得到 orthogonal vectors $\mathbf{u}_1=(1,3,1,1),\mathbf{u}_2=(1,-1,1,1),\mathbf{u}_3=(-2,0,1,1)$. 考慮聯立方程組

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 4 \\ 3x & +y & +5z & = & -1 \\ x & +y & +2z & = & 5 \\ x & +y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

(a) 將此聯立方程組寫成 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的矩陣形式並寫下其 normal equations.

(b) 利用 normal equations 求原方程組的 least squares solution 以及其 error vector.

(c) 將聯立方程組的係數矩陣 A 寫成 QR decomposition.

(d) 利用 QR decomposition 寫下對 $\mathrm{Col}(A)$ 的投影矩陣並求出原方程組的 error vector.

(e) 利用 QR decomposition 寫下與 normal equations 等價的方程組，並利用此方程組求出原方程組的 least squares solution.

13. 考慮二維資料 $\{(-3,9),(-2,6),(0,2),(1,1)\}$. 以下請利用 least squares 的方法分別找到所要求最接近函數並求其 error.

(a) 常數函數. (b) 一次函數. (c) 二次函數.

14. 在 $\mathbb{R}^3$ 中考慮 dot product. 令 $W=\{(x,y,z):x+3y-2z=0\}$ 以及 $\mathbf{v}=(2,1,3)$.

(a) 找到矩陣 A 使得 $W=N(A)$, 以及 W 的一組 orthogonal basis 並求 $\mathbf{v}$ 在 W 的 orthogonal projection.

(b) 利用 $N(A)^{\perp}=\mathrm{Col}(A^{\mathrm{t}})$ 求出 $W^{\perp}$ 的一組 basis 並說明此 basis 和高中學的 W 所在平面 $E:x+3y-2z=0$ 有何關係. 利用高中的方法求點 $P(2,1,3)$ 在平面 E 的投影.

(c) 考慮 (a) 中的 A 以及 $\mathbf{v}$ 是 $A\mathbf{x}=A\mathbf{v}$ 的一個解. 利用以下的方法找到最短的向量 (x,y,z) 滿足 $x+3y-2z=-1$.

i. 利用 $\mathbf{v}$ 以及其在 $N(A)$ 的 orthogonal projection.

ii. 利用找 $(AA^{\mathrm{t}})\mathbf{x}=A\mathbf{v}$ 的解。

iii. 利用 (b) 所求 $\mathrm{Col}(A^{\mathrm{t}})$ 的 basis 找到 $\mathrm{Col}(A^{\mathrm{t}})$ 中唯一滿足 $A\mathbf{x}=A\mathbf{v}$ 的向量。

iv. 利用 Cauchy-Schwarz inequality (「柯希、舒瓦茲」不等式).

15. 考慮聯立方程組

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = & 4 \\ x & -y & +2z & = & -11 \\ x & +5y & & = & 19 \end{cases}$$

令其矩陣表示法為 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

(a) 試求此方程組的解集合.

(b) 找到此方程組的 minimal solution.

(c) 將此方程組的 minimal solution 表成 A 的 row vectors 的線性組合 (寫下一組即可).

16. 假設 $A\in M_{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(A)<n$. 若 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 使得聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 為 inconsistent.

(a) 試寫下求 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的 least squares solution 所需解的聯立方程組的矩陣表示法.

(b) 說明 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的 normal equations 有唯一的解在 A 的 row space 中, 且此解就是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的 least squares solution.

17. 已知當 $A \in M_{m\times n}$ 則 $\operatorname{rank}(A) = n$ 若且唯若 $A^{\mathrm{t}}A$ 為 invertible.

    (a) 利用上述結果證明若 $\operatorname{rank}(A) = n$ 則存在 $B \in M_{n\times m}$ 使得 $BA = I_n$.

    (b) 利用上述結果證明當 $\operatorname{rank}(A) = m$ 時 AA^{t} 為 invertible 且存在 $C \in M_{n\times m}$ 使得 $AC = I_n$..

5 Determinant

1. 假設矩陣 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 為 $(m+n)$ 階方陣, 其中 A, B 分別為 m 階、n 階方陣, 而 O 為 $n\times m$ 階零矩陣，C 為 $m\times n$ 階矩陣。證明 $\det M = (\det A)(\det B)$.

2. 利用 elementary row (column) operations 以及數學歸納法 (先從階數小的開始，找到規律性) 求以下 n 階方陣的行列式.

    (a) $A = [a_{ij}]$ 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i+j = n+1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

    例如 $n = 2$ 時 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $n = 3$ 時 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    (b) $B = [b_{ij}]$ 其中 $b_{ij} = \begin{cases} j, & \text{if } i = 1; \\ j, & \text{if } i > 1 \text{ and } j > i; \\ -j, & \text{if } i > 1 \text{ and } j < i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

    例如 $n = 2$ 時 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $n = 3$ 時 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (c) $A = [a_{ij}]$ 其中 $a_{ij} = \begin{cases} r_i, & \text{if } j = i+1; \\ s_j, & \text{if } i = j+1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

    例如 $n = 2$ 時 $A = \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ s_1 & 0 \end{bmatrix}$; $n = 3$ 時 $A = \begin{bmatrix} 0 & r_1 & 0 \\ s_1 & 0 & r_2 \\ 0 & s_2 & 0 \end{bmatrix}$ (注意 n 的奇偶).

3. 假設 $M = \begin{bmatrix} b+8c & 2c-2b & 4b-4c \\ 4c-4a & c+8a & 2a-2c \\ 2b-2a & 4a-4b & a+8b \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) 試求 P^{-1} 並求出 $P^{-1}MP$.

    (b) 求 $\det(P^{-1}MP)$ 並以此求 $\det(M)$ (Hint: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).

4. 假設 A 為 6 階方陣滿足 $A^3 = 2I_6$。試求 $\det(A)$.

5. 假設 $f : M_n \to \mathbb{R}$ 是 multi-linear 且滿足對任意 $A \in M_n$, 若 A 有某兩相鄰的 row 是相同的, 則 $f(A) = 0$. 證明 f 為 alternating.

6. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. 請依以下規定方法求 $\det(A)$.

   (a) 利用 elementary row operations, 並驗證與上週習題 1 是否相符.

   (b) 利用降階方法.

7. 假設 A 的每一個 entry 皆為整係數的 n 階方陣.

   (a) 利用數學歸納法證明 $\det A$ 為整數.

   (b) 若 A 為可逆且 A^{-1} 的每一個 entry 皆為整數，證明 $\det A = \pm 1$.

8. 以下為探討 Vandermonde matrix. 假設 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ 為相異實數. 考慮多項式

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix}.$$

   (a) 例如 $n = 3$ 時, $f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$. 利用對 3-rd row 降階方式，證明此時 $f(x)$ 的最高次項為 $(c_2 - c_1)x^2$.

   (b) 當 $n = 3$ 時, 說明 c_1, c_2 為 $f(x) = 0$ 的兩相異實根, 並依此利用因式定理證明

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_2 & c_2^2 \\ 1 & c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} = (c_2 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_1).$$

   (c) 利用數學歸納法證明在一般情形 $f(x)$ 的最高次項為

$$\prod_{1 \le i < j \le n-1} (c_j - c_i) x^{n-1}.$$

   試說明 $f(x) = 0$ 所有的 $n-1$ 個實根為何，並依此證明

$$\det \begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n-1} \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (c_j - c_i).$$

9. 考慮矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) 利用 Cramer's Rule 解聯立方程組 $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) 求 B 的 cofactor matrix, adjoint matrix 以及 inverse matrix.

10. 證明若 A 的每一個 entry 皆為整數且 $\det A = \pm 1$ 則 A^{-1} 的每一個 entry 皆為整數.

11. 請證明以下有關於 adjoint matrix 的性質。

(a) 若 A 為 upper triangular, 則 $\mathrm{adj}(A)$ 亦為 upper triangular.

(b) 若 A 為 symmetric, 則 $\mathrm{adj}(A)$ 亦為 symmetric.

(c) 若 A, B 皆為 n 階方陣，則 $(BA)(\mathrm{adj}(A)\mathrm{adj}(B)) = \det(AB)I_n$.

(d) 若 A, B 皆為 n 階 invertible matrix，則 $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$.

6 Linear Transformations

1. 以下所定的函數是否為 linear transformation？若是請證明; 若不是請舉例說明.

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (|x|, -z, y)$.

(b) 給定 $B \in M_n$, 令 $T_2 : M_n \to M_n$, $A \mapsto AB^2 + BA$.

(c) 給定 $B \in M_n$, 令 $T_3 : M_n \to M_n$, $A \mapsto AB + BA^2$.

(d) P_n 為次數小於 $n+1$ 的多項式所成 vector space, 令 $T_4 : P_n \to P_{n+1}$,

$$f(x) \mapsto f(0) + xf(x) + x^2 f'(x).$$

2. 考慮函數 $T : M_2 \to M_2$.

(a) 若已知 $T(A) = A^{\mathrm{t}}$, $\forall A \in M_2$, 證明 T 為 linear transformation.

(b) 若已知 T 為 linear transformation 且滿足

$$T(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; T(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$T(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; T(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

證明 $T(A) = A^{\mathrm{t}}$, $\forall A \in M_2$.

3. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 為 standard inner product space. 已知 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 滿足以下保距性質：

$$(1)\ T(\mathbf{O}) = \mathbf{O}; \quad (2)\ \|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

(a) 證明 $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ 以及 $\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

(b) 考慮 standard basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. 若已知 $T(\mathbf{e}_i)=\mathbf{u}_i$, $\forall i=1,\ldots,n$. 證明

$$T(c_1,\ldots,c_n)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{u}_i.$$

(c) 證明 T 為 linear transformation.

4. 考慮函數 $T:V\to W$, 其中 V,W 為 over $\mathbb{F}$ 的 vector spaces 且 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$, $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ 分別為 V, W 的一組 basis。已知存在固定的 $a,b\in\mathbb{F}$ 使得對任意 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{F}$ 皆有

$$T(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3)=(c_1+a)\mathbf{w}_1+(c_2+c_3+b)\mathbf{w}_2.$$

證明 T 為 linear 若且唯若 $a=b=0$.

5. 考慮 $T:V\to V$ 為 linear transformation.

(a) 若 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in V$ 皆為非零向量滿足 $T(\mathbf{v}_1)=-\mathbf{v}_1,T(\mathbf{v}_2)=2\mathbf{v}_2,T(\mathbf{v}_3)=\mathbf{v}_3$. 證明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent，再證明 $\mathbf{v}_3\notin\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 並以此說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent.

(b) 利用數學歸納法證明更一般的情形. 已知 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\in V$ 皆為非零向量滿足 $T(\mathbf{v}_1)=c_1\mathbf{v}_1,\cdots,T(\mathbf{v}_n)=c_n\mathbf{v}_n$, 其中 $c_1,\ldots,c_n$ 兩兩相異. 證明 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent.

6. $\mathbb{R}^2$ 上的一維子空間 L 皆可由一個非零向量所展成，因此可視為一個通過原點的直線 $L=\{(x,y)\mid ax+by=0\}$.

(a) 設 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x,y)=(x+y,x-y)$ 試利用 a,b 表達 $T(L)$ 和 $T^{-1}(L)$ 為怎樣的子空間。

(b) 設 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x,y)=(x+y,x+y)$ 試利用 a,b 表達 $T(L)$ 和 $T^{-1}(L)$ 為怎樣的子空間。

7. 試找到以下 linear transformations 的 kernel 和 image 的 basis.

(a) $T_1:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$, 定義為

$$T_1(a,b,c,d,e)=(a-c+3d-e,a+2d-e,2a-c+5d-e,-c+d).$$

(b) $T_2:P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$, 定義為 $T_2(f(x))=x^2f'(x)$.

8. 考慮 linear transformations $T:V\to W$, $F:W\to U$.

(a) 證明 $R(F\circ T)\subseteq R(F)$ 且 $N(T)\subseteq N(F\circ T)$.

(b) 利用 dimension theorem, 即 $\mathrm{rank}(F\circ T)=\dim(V)-\dim(N(F\circ T))$ 及 (a), 證明

$$\mathrm{rank}(F\circ T)\le\mathrm{rank}(T).$$

(c) 假設 W' 為 W 的 subspace, 考慮 $F': W' \to U$ 為將 F 的定義域限制在 W' 的 linear transformation (即 $F'(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w}),\ \forall \mathbf{w} \in W'$). 證明 $F'(W') = F(W')$ 且 $N(F') = N(F) \cap W'$, 並以此證明

$$\dim(N(F)) \geq \dim(W') - \dim(F(W')).$$

(d) 考慮 (c) 中 $W' = T(V)$ 的情況，利用 $\operatorname{rank}(F) = \dim(W) - \dim(N(F))$ 證明

$$\operatorname{rank}(F) \leq \dim(W) - \operatorname{rank}(T) + \operatorname{rank}(F \circ T).$$

(e) 結合 (a),(b),(d) 說明

$$\operatorname{rank}(F) + \operatorname{rank}(T) - \dim(W) \leq \operatorname{rank}(F \circ T) \leq \min\{\operatorname{rank}(T), \operatorname{rank}(F)\}.$$

9. 當 $T: V \to W$ 為一對一且映成，由函數的性質我們知道存在唯一的 $T^{-1}: W \to V$ 為 T 的反函數，滿足對所有 $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ 皆有 $T^{-1} \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ 以及 $T \circ T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$. 在講義 Theorem 6.4.3 我們證明了在一般的情況 (不限 V, W 為有限維)，當 T 為 linear transformation, 則 T^{-1} 亦為 linear transformation. 以下將對 V, W 為有限維的情形證明此性質。

(a) 若 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis 且令 $\mathbf{w}_i = T(\mathbf{v}_i), i = 1, \ldots, n$. 證明 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 為 W 的一組 basis.

(b) 利用 (a) 中 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 建構出一個 linear transformation $F: W \to V$ 滿足對所有 $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ 皆有 $F \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ 以及 $T \circ F(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$. 因此由反函數的唯一性證得 $F = T^{-1}$, 也因此 T^{-1} 亦為 linear transformation.

10. 考慮 linear transformation $T: P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 定義為 $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}$.

(a) 試求 $[T]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$, 其中 $\varepsilon, \varepsilon'$ 分別為 $P_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 的 standard ordered basis

$$\varepsilon = (1, x, x^2), \varepsilon' = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}).$$

(b) 試求 $[T]_{\beta}^{\gamma}$, 其中 β, γ 分別為 $P_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 的 ordered basis

$$\beta = (1, x, 1 + x^2), \gamma = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}).$$

(c) 試分別利用 (a), (b) 的表現矩陣求 $N(T)$ 和 $R(T)$ 的一組 basis.

11. 假設 $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ 為 V 的一組 ordered basis. 令

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4,$$

$$\mathbf{w}_3 = 5\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 5\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - 3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

(a) 依照 $\mathbf{w}_i$ 編號由小到大寫下 V 的一組 ordered basis β'.

(b) 假設 $T_{\beta'}$ 為用 β' 將 V 坐標化的函數, 試寫下 $T_{\beta'}(\mathbf{v}_i)$, $i=1,2,3,4$.

(c) 說明方陣 $\big(T_\beta(\mathbf{w}_1), T_\beta(\mathbf{w}_2), T_\beta(\mathbf{w}_4), T_\beta(\mathbf{w}_5)\big)$ 和 $\big(T_{\beta'}(\mathbf{v}_1), T_{\beta'}(\mathbf{v}_2), T_{\beta'}(\mathbf{v}_3), T_{\beta'}(\mathbf{v}_4)\big)$ 的關係.

12. 考慮 linear transformation $T: V \to W$.

(a) 假設 T 為 isomorphism. 證明存在 V, W 的 ordered basis β, γ 使得 $[T]_\beta^\gamma$ 為 identity matrix.

(b) 假設 $\dim(V)=m$, $\dim(W)=n$ 且 $\operatorname{rank}(T)=k$. 證明存在 V, W 的 ordered basis β, γ 使得 $[T]_\beta^\gamma = (a_{ij})$ 為 $n \times m$ matrix 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i=j \text{ 且 } 1 \le i \le k; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

13. 本題是評量對線性映射矩陣表法的了解及應用。請完全按照題目要求作答。

考慮 $M_2(\mathbb{R})$ 上的兩組 ordered basis

$$\varepsilon = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right);$$

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

令 T_1, T_2 分別為 $M_2(\mathbb{R})$ 到 $M_2(\mathbb{R})$ 的線性映射，其中 $T_1(A)=A, T_2(A)=A^{\mathrm{t}}, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) 試分別寫下 $[T_1]_\varepsilon^\alpha$, $[T_2]_\varepsilon^\alpha$, $[T_1]_\alpha^\varepsilon$ 以及 $[T_2]_\alpha^\varepsilon$。

(b) 給定 $c \in \mathbb{R}$，直接利用 $T_1 + cT_2$ 函數的定義寫下 $[T_1+cT_2]_\varepsilon^\alpha$ 說明並驗證其與 (1) 所求的哪些矩陣有什麼關係。

(c) 利用 $[T_1+cT_2]_\varepsilon^\alpha$ 寫下 T_1+cT_2 為 isomorphism 的充要條件。

(d) 試求矩陣 $[T_1-2T_2]_\varepsilon^\alpha$ 的反矩陣，並說明此反矩陣是哪一個線性映射（與 T_1-2T_2 有關）用哪兩組 ordered basis 的矩陣表示？

(e) 試利用 (4) 所得的反矩陣求 $(T_1-2T_2)^{-1}(A)$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$。

(f) 利用合成函數的定義寫下 $[(T_1+2T_2)\circ(T_1-2T_2)]_\varepsilon^\varepsilon$ 並說明並驗證其為 $[T_1-2T_2]_\varepsilon^\alpha$ 左邊乘上哪一個線性映射用哪兩組 ordered basis 的矩陣表示。

(g) 利用 (4) 與 (6) 所提到的矩陣表示，找到 $a, b \in \mathbb{R}$，使得 $(T_1-2T_2)^{-1} = aT_1 + bT_2$。

7 Linear Operators

1. 考慮 linear operator $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z) = (y,-x,z)$. 令 A 為 T 的 standard matrix representation.

(a) 令 β 為 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis $(1,-1,1), (1,-2,2), (1,-2,1)$ 且令 B 為 T 的 matrix representation related to β. 試求 B，並寫出矩陣 P 使得 $A = P^{-1}BP$.

(b) 令 $Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$. 試寫出 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis γ, 使得 T 的 matrix representation related to γ 是 $Q^{-1}AQ$.

2. 假設 A,B 為 similar 的 n 階方陣.

   (a) 證明 A^{t}, B^{t} 也是 similar.

   (b) 證明若 A 為 invertible, 則 B 亦為 invertible. 並證明此時對任意 $k\in\mathbb{N}$, A^{-k} 和 B^{-k} 為 similar.

3. 考慮 linear operator $T:V\to V$, 且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 T 的 eigenvectors 其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1,λ_2. 已知 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

   (a) 證明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent.

   (b) 證明若 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ 且 $c_1\neq 0, c_2\neq 0$, 則 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 不會是 T 的 eigenvector.

   (c) 證明若存在 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ 且 $c_1\neq 0, c_2\neq 0$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 為 T^2 的 eigenvector, 則 $\lambda_1=-\lambda_2$. 並說明對於 T^2 此 eigenvector $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 的 eigenvalue 為何.

4. 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z)=(x+2y+z,y,x+3y+z)$. 令 $\mathbf{v}_1=(-1,0,1),\mathbf{v}_2=(3,-1,2),\mathbf{v}_3=(1,0,1)$.

   (a) 說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 皆為 T 的 eigenvector 並決定其對應的 eigenvalue.

   (b) 令 $\mathbf{v}=(1,-1,2)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 並求 $T^3(\mathbf{v})$.

   (c) 考慮 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 以及 standard ordered basis ε. 試寫下表現矩陣 $[T]_\varepsilon$ 以及 $[T]_\beta$.

   (d) 試寫下將 $[T]_\varepsilon$ 對角化成 $[T]_\beta$ 之間的關係式, 即找出互為 inverse 的矩陣 P,Q 使得 $Q[T]_\varepsilon P=[T]_\beta$. 並驗證之.

5. 考慮 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-6&4\\-2&-4&5\\-2&-6&7\end{bmatrix}$.

   (a) 試分別求 A,B 的 characteristic polynomial.

   (b) 試分別說明 A,B 的 eigenvalues 有哪些, 並計算每個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity.

6. 試找出 linear operators $T_1,T_2:P_3(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$ 的 eigenvalues 及其對應的 eigenspace 的 basis, 其中 $T_1(f(x))=xf'(x)$; $T_2(f(x))=x^2f''(x)-xf'(x)$.

7. 假設 A 為方陣且 $\mathbf{v}$ 為 A 的一個 eigenvalue 為 λ 的 eigenvector. 考慮多項式 $f(x)$. 證明 $\mathbf{v}$ 為矩陣 $f(A)$ 的 eigenvector, 並說明其對應的 eigenvalue 為何.

8. 假設 $T:V\to V$ 為 isomorphism.

   (a) 證明若 λ 為 T 的 eigenvalue, 則 $\lambda\neq 0$ 且 λ^{-1} 為 T^{-1} 的 eigenvalue.

(b) 假設 $f(x), g(x)$ 分別為 T 和 T^{-1} 的 characteristic polynomial. 證明 $\lambda \in \mathbb{F}$ 滿足 $f(\lambda) = 0$ 若且唯若 $g(\lambda^{-1}) = 0$.

9. 考慮 linear map $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, 定義為 $T(x,y,z,w) = (x+y+2z-w, y+w, 2z-w, z+w)$. 令 $W = \{(x,y,0,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

   (a) 證明 W 為 $\mathbb{R}^4$ 中的一個 T-invariant subspace.

   (b) 先找出 W 中的一組 ordered basis $\beta = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ 再將其擴大成 $\mathbb{R}^4$ 中的一組 ordered basis $\beta' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. 分別寫下 $T|_W : W \to W$ 以 β 所得的表現矩陣，以及 T 以 β' 所得的表現矩陣.

   (c) 計算 $T|_W$ 以及 T 的 characteristic polynomials. 並說明它們的整除關係。

10. 考慮 $T_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 定義為 $T_1(a,b,c,d) = (a+b, b-c, a+c, a+d)$; $T_2 : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 定義為 $T_2(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A$. 令 W_1, W_2 分別為 $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 所產生的 T_1-cyclic space 以及 T_2-cyclic space.

   (a) 試分別求 W_1, W_2 的一組 ordered basis.

   (b) 試分別求 T_1, T_2 限制在 W_1, W_2 的 characteristic polynomial.

8 Diagonalizable Matrices and Their Applications

1. 考慮 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x,y) = (x+y, -x+3y)$.

   (a) 試求 T 的 characteristic polynomial, 檢查並說明為何 $(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^2$ 為零函數.

   (b) 試求 T 的所有可能的 eigenvector, 並說明 T 是否可對角化.

   (c) 令 $\mathbf{w}$ 為 T 的 eigenvector, 試找出 $\mathbf{v}$ 滿足 $(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

   (d) 令 $T_0 = T - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. 試寫下 $\mathbf{v}$ 所得的 T_0-cyclic space $\mathrm{Span}(\mathbf{v}, T_0\mathbf{v}, T_0^2\mathbf{v}, \dots)$ 的一組 ordered basis. 並用此 ordered basis 寫下 T 的表現矩陣.

2. 考慮二階方陣 A. 假設 λ 為 A 的一個 eigenvalue. 已知 λ 的 algebraic multiplicity 為 2 但 $A \neq \lambda I_2$. 令 $B = A - \lambda I_2$.

   (a) 說明 A 不可對角化.

   (b) 利用 A 的 characteristic polynomial 說明 B^2 為何.

   (c) 假設 $\mathbf{w}$ 為 A 的一個 eigenvector, 證明聯立方程組 $B\mathbf{x} = \mathbf{w}$ 必有解.

   (d) 令 $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 為 (c) 的一個解. 說明 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}, B\mathbf{v}, B^2\mathbf{v}, \dots) = \mathbb{R}^2$.

   (e) 試利用 (d) 中 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}, B\mathbf{v}, B^2\mathbf{v}, \dots)$ 所得的一組 basis, 說明存在 invertible matrix U 使得 $U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$.

3. 考慮 $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 分別為對平面 $x - 2y + z = 0$ 的投影 (projection) 以及鏡射 (reflection) 的 linear operator.

(a) 利用投影及鏡射的特性找出 $\mathbb{R}^3$ 的一組 basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 使其皆為 T_1, T_2 的 eigenvectors.

(b) 令 β 為 ordered basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ 試寫下對角矩陣 $[T_1]_\beta$, $[T_2]_\beta$.

(c) 利用 (b) 的結果寫出 T_1, T_2 在 standard ordered basis 之下的表現矩陣，並驗證它們是對稱矩陣。

4. 假設 A, B 皆為 n 階方陣.

(a) 證明若 A, B 皆為 diagonalizable 且 A, B 有相同的 characteristic polynomial, 則 A 和 B 為 similar.

(b) 考慮 $n = 3$ 的情況，試找到矩陣 A, B 其 characteristic polynomial 皆為 $-x^3$ 但 A 和 B 不是 similar.

5. 以下矩陣試說明那些矩陣可以在實數對角化, 那些不可以. 若矩陣 A 可對角化, 請找到可逆矩陣 U 以及對角矩陣 D 使得 $U^{-1}AU = D$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

6. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) 試找到可逆矩陣 U 以及對角矩陣 D 使得 $A = UDU^{-1}$.

(b) 利用 $A = UDU^{-1}$ 計算 A^4.

(c) 利用 Cayley-Hamilton Theorem 計算 A^4.

(d) 利用 $A = UDU^{-1}$ 求 A^{-1}.

(e) 利用 Cayley-Hamilton Theorem 將 A^{-1} 寫成 A^2, A, I_3 的線性組合, 並以此寫出 A^{-1}.

(f) 利用 $A = UDU^{-1}$ 找到一矩陣 B 滿足 $B^3 = A$.

7. 對以下的矩陣試找到將其對角化的 orthogonal matrix 並找到其對應的對角矩陣.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. 給定 $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) 說明 $A^{\mathrm{t}}A$ is orthogonal diagonal diagonalizable 且其 eigenvalues 皆大於等於 0. (Hint: 利用矩陣乘法與內積的關係)

(b) 假設 A 為 symmetric, 證明若對任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 皆有 $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 則 A 為零矩陣.

(c) 試找到一個 2 階方陣 A 滿足 $\langle A\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 但 A 不是零矩陣.

9. 假設 W 為 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 且 $0 < \dim W = k < n$. 令 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量對 W 的投影矩陣 (orthogonal projection matrix).

   (a) 證明 A 的 eigenvalue 為 $0,1$ 且滿足 $A^2 = A$.

   (b) 證明 A 為 symmetric matrix.

10. 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 為 symmetric matrix 且滿足 $A^2 = A$.

   (a) 證明 $0,1$ 是 A 唯一可能的 eigenvalue.

   (b) 證明若對 A 來說 1 的 algebraic multiplicity 為 k, 則存在 W 為 $\mathbb{R}^n$ 的 subspace 且 $\dim W = k$ 使得 A 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量對 W 的投影矩陣.

11. 試利用 Spectral Theorem (即對稱矩陣皆可正交對角化) 回答以下問題。

   (a) 給定 $k \in \mathbb{R}$ 試找到所有的實對稱矩陣 A 滿足 $\det A = k$ 且 $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$.

   (b) 假設 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 以標準基底寫下的矩陣為實對稱矩陣. 已知 $2,5$ 為 T 的 eigenvalues 且 $(1,1,-1),(1,-1,0)$ 為 T 的兩個 eigenvalue 為 5 的 eigenvector. 試求 $T(1,1,2)$.

   (c) 找到對稱實矩陣 A 滿足僅有兩個 eigenvalues $1,2$. 且 2 的 eigenspace 為 $\mathrm{Span}((1,1,1))$.

12. 假設 $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ 皆為對稱矩陣且滿足 $AB = BA$. 假設 λ 為 A 的 eigenvalue 且 $E_\lambda(A)$ 為其 eigenspace, 並設 $\dim(E_\lambda(A)) = k$.

   (a) 證明 $E_\lambda(A)$ 為 B-invariant (亦即 $\forall \mathbf{v} \in E_\lambda(A)$, 皆有 $B\mathbf{v} \in E_\lambda(A)$).

   (b) 令 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ 為 $E_\lambda(A)$ 的一組 orthonormal basis, 將其擴大加上 $\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_n$ 使之成為 $\mathbb{R}^n$ 的一組 orthonormal basis. 考慮 orthogonal matrix $U = (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$. 證明 $U^{\mathrm{t}}BU = \begin{bmatrix}B_1 & O\\ O & B_2\end{bmatrix}$, 其中 O 為零矩陣且 B_1,B_2 分別為 k, $n-k$ 階對稱矩陣.

   (c) 利用 B_1 為對稱矩陣，說明存在分別為 k 和 $n-k$ 階的 orthogonal matrices Q_1,Q_2 使得 $\begin{bmatrix}Q_1^{\mathrm{t}} & O\\ O & Q_2^{\mathrm{t}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & O\\ O & B_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1 & O\\ O & Q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}D_1 & O\\ O & B_2\end{bmatrix}$, 其中 D_1 為 k 階對角矩陣.

   (d) 說明 $U\begin{bmatrix}Q_1 & O\\ O & Q_2\end{bmatrix}$ 的前 k 個 column 形成 $E_\lambda(A)$ 的一組 orthonormal basis. 並利用 (b)(c) 的結果說明 $E_\lambda(A)$ 中存在一組 orthonormal basis 其元素同時是 A 的 eigenvector 也是 B 的 eigenvector.

   (e) 考慮 A 所有的 eigenspace, 利用 (d) 的結果, 說明存在一個 orthogonal matrix Q 使得 $Q^{\mathrm{t}}AQ$ 和 $Q^{\mathrm{t}}BQ$ 皆為對角矩陣. (稱 A,B 為 simultaneously diagonalizable)

13. 將以下的二元二次方程式經由坐標變換寫成標準式. 需寫下坐標如何變換. 並以新的坐標說明它們為何種二次曲線。以原來的坐標說明其中心 (若為橢圓、雙曲線)、頂點 (若是拋物線) 的位置。

(a) $3x^2-2xy+3y^2=4$.

(b) $16x^2+24xy+9y^2-3x+4y=5$.

(c) $7x^2+12xy-2y^2-2x+4y=6$.

14. 套用上題的結果寫下以下的二元二次方程式的圖形之重要參數（自選加分題）。

(a) $3x^2-2xy+3y^2=4$. 求 4 個頂點、2 個焦點之坐標，以及長軸、短軸所在的直線方程式。

(b) $16x^2+24xy+9y^2-3x+4y=5$. 求頂點、焦點之坐標，以及對稱軸和準線的方程式。

(c) $7x^2+12xy-2y^2-2x+4y=6$. 求 2 個頂點、2 個焦點之坐標，以及貫軸、對稱軸所在的直線方程式，並寫下兩個漸近線方程式。

15. 設 $a,b\in\mathbb{R}$ 考慮二元二次方程式 $7x^2+12xy-2y^2-2ax+4ay=b$ 的圖形.

(a) 請說明當 $a=1$ 時, b 為多少時圖形會是退化的情形？在非退化情形，b 改變時漸近線，貫軸，對稱軸方程式是否改變？中心、焦點、頂點坐標是否改變？

(b) 固定 $b\in\mathbb{R}$, 請說明當 a 為多少時圖形會是退化的情形？在非退化情形，a 改變時焦距、貫軸長是否改變? 中心、焦點、頂點坐標是否改變？漸近線，貫軸，對稱軸的斜率是否改變？

16. 設 $c,d\in\mathbb{R}$ 考慮二元二次方程式 $16x^2+24xy+9y^2+cx+4y=d$ 的圖形.

(a) 試找到所有可能的 c 使得方程式的圖形為拋物線。

(b) 試求 c 使得圖形為退化情形，並說明此時 d 為多少時會使得圖形分別為兩平行直線、一直線和空集合。

17. 將以下的三元二次方程式經由坐標變換寫成標準式 (中心在原點). 需寫下坐標如何變換.

(a) $3x^2+2xy+2xz+4yz=4$.

(b) $2x^2+2xy+2xz+2yz-x+y+z=1$.

(c) $3x^2+2xz-y^2+3z^2+2y=0$.

18. 套用上題的結果寫下以下的三元二次方程式的圖形之相關參數（自選加分題）。

(a) $3x^2+2xy+2xz+4yz=4$. 說明此曲面之名稱。求中心軸的參數式，以及一組平面方程式使得圖形與平面之截痕為橢圓。

(b) $2x^2+2xy+2xz+2yz-x+y+z=1$. 說明此曲面之名稱。求鞍點坐標、以及平面方程式使得圖形與平面之截痕為兩直線。

(c) $3x^2+2xz-y^2+3z^2+2y=0$. 說明此曲面之名稱。求 2 個頂點之坐標，以及過頂點的切平面方程式。

19. 固定 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$. 令 V 為所有滿足遞迴關係

$$x_{n+k} = c_{k-1}x_{n+k-1} + c_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n$$

的遞迴數列 $\langle x_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ 所成的集合。對於 $\langle x_n \rangle_{n=0}^{\infty}, \langle y_n \rangle_{n=0}^{\infty} \in V$ 以及 $r \in \mathbb{R}$ 定義

$$\langle x_n \rangle_{n=0}^{\infty} + r\langle y_n \rangle_{n=0}^{\infty} = \langle z_n \rangle_{n=0}^{\infty}, \text{ 其中 } z_n = x_n + ry_n, \forall n = 0, 1, \ldots.$$

考慮函數 $T : V \to V$, 定義為

$$T(\langle x_n \rangle_{n=0}^{\infty}) = \langle y_n \rangle_{n=0}^{\infty}, \text{ 其中 } y_n = x_{n+1}, \forall n = 0, 1, \ldots.$$

(a) 證明 V 為 vector space 且找到 V 的一組 basis 依此說明 V 的 dimension.

(b) 說明 T 為 linear operator.

(c) 試求 T 的 characteristic polynomial.

(d) 假設 λ 為 T 的一個 eigenvalue 且 $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty} \in V$ 為 λ 所對應的一個 eigenvector. 證明 $a_n = \lambda^n a_0$.

20. 考慮遞迴數列 $\langle z_n \rangle_{0=1}^{\infty}$ 滿足 $z_1 = 2, z_2 = 3$ 以及 $z_{n+1} = 3z_n - 2z_{n-1}$ for $n \geq 2$. 試用習題 (1) 的 T 找到其表現矩陣 A 以及利用 A 的 eigenvectors 和其 eigenvalues 寫下 z_n 的通式.

21. 考慮遞迴數列 $\langle z_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $z_1 = 0, z_2 = z_3 = 1$ 以及 $z_{n+1} = 2z_n + z_{n-1} - 2z_{n-2}$ for $n \geq 3$. 試用習題 (1) 的 T 找到其表現矩陣 A 以及利用 A 的 eigenvectors 和其 eigenvalues 寫下 z_n 的通式.

22. 考慮函數 $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定義為 $S(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. 對 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 令 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 定義為 $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. 令 $\varepsilon, \varepsilon'$ 分別為 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}$ 的 standard ordered basis.

(a) 試證明 S 為 linear map 且寫下 S 對 $\varepsilon, \varepsilon'$ 的表現矩陣 $[S]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$.

(b) 考慮合成函數 $S \circ T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 試說明 $[S \circ T_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$ 為何。

(c) 假設 A 的每個 entry 皆為非負實數。證明 A 為 stochastic matrix 若且唯若 $S \circ T_A = S$.

(d) 假設 A 為 stochastic matrix 且 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 的每個 entry 皆為非負實數。利用函數合成的結合律 (即 $S \circ (T_A \circ T_B) = (S \circ T_A) \circ T_B$) 以及函數合成與矩陣乘法的關係證明 B 為 stochastic matrix 若且唯若 AB 為 stochastic matrix.

(e) 試找到 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ 其中 A 和 BA 為 stochastic matrix 但是 B 並不是 stochastic matrix.

23. 考慮 stochastic matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) 說明 A 為 regular stochastic matrix. (利用連續平方，以及矩陣乘法用 column, row 來處理會比較快)

(b) 說明 A 是否為 diagonalizable.

(c) 試求 $\lim_{k\to\infty} A^k$.

(d) 給定 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, 已知 $a+b+c=r$. 試求 $\lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{v}$.

24. 假設 A 為 invertible stochastic matrix.

(a) 利用 $(1,\ldots,1)^{\mathrm{t}}$ 為 A^{t} 的一個 eigenvalue 為 1 的 eigenvector, 證明 A^{-1} 的每一個 column vector 其 entry 之和為 1.

(b) 試證明若 A 為 regular, 則 A^{-1} 一定不是 stochastic matrix.

25. 已知 A 為 regular stochastic matrix.

(a) 證明若 $\mathbf{v}$ 為 A 的 eigenvector 且其 eigenvalue 為 1, 則 $\mathbf{v}$ 的每一個 entry 皆不等於 0.

(b) 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 為 diagonalizable 且 Q 為 invertible matrix 使得 $Q^{-1}AQ = D$, 其中 D 為 diagonal matrix 且其 $(1,1)$-entry 為 1. 利用 A^{t} 的 eigenvalue 為 1 的 eigenspace 為 $\mathrm{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$ 以及 $Q^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}(Q^{-1})^{\mathrm{t}} = D$, 證明 Q^{-1} 的 1-st row 為 $(r,\ldots,r)$ 其中 r 為非零實數。特別的若 Q 的 1-st column 為 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, 則 $r = (c_1+\cdots+c_n)^{-1}$.

26. 考慮以下三個 stochastic matrices.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(a) 請分別利用 A_1, A_2, A_3 的 eigenvalues 和 eigenvectors 說明為何 A_i 都不是 regular.

(b) 將 $\mathbf{e}_2$ 分別寫成 A_i, $i=1,2,3$ 的 eigenvectors 的線性組合, 並以此求 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{e}_2$.

(c) 對任意的 probability vector $\mathbf{v}$. 請回答以下問題並說明之。

i. 那個 A_i 會使得 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{v}$ 一定存在且不管 $\mathbf{v}$ 為何都會趨近到同一個向量;

ii. 那個 A_i 會使得 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{v}$ 一定存在但 $\mathbf{v}$ 改變會趨近於不同的向量;

iii. 那個 A_i 會使得 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{v}$ 不一定存在.