3.6. Column Space and Nullspace

我們將介紹一個矩陣的 column space, row space 以及 nullspace 並探討如何找到它們的 basis. 我們會發現 column space 和 row space 的 dimension 皆相同且等於矩陣的 rank. 最後我們探討如何得到一般 subspace 的 basis.

給定一個矩陣, 它的 column space 和 nullspace 和以該矩陣為係數矩陣所形成的聯立方程組是否有解以及解是否唯一息息相關. 由於 column space 和 nullspace 的重要性, 我們將之正式定義如下:

Definition 3.6.1. 假設 $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ 為以 $\mathbb{F}^m$ 中的向量 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 為 column vectors 的 $m\times n$ matrix.

(1) 我們稱 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ 為 A 的 *column space*, 且用 $\mathrm{Col}(A)$ 來表示 A 的 column space.

(2) 我們稱 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 所有解所成的集合為 A 的 *nullspace* 且用 $N(A)$ 表示 A 的 nullspace. 即 $N(A)=\{\mathbf{u}\in\mathbb{F}^n \mid A\mathbf{u}=\mathbf{0}\}$.

要注意當 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 則 A 的 column space $\mathrm{Col}(A)$ 會是 $\mathbb{F}^m$ 的 subspace, 而 A 的 nullspace $N(A)$ 會是 $\mathbb{F}^n$ 的 subspace. 利用 Lemma 3.4.1 以及 Theorem 3.4.5 我們馬上有以下的結果.

Proposition 3.6.2. *假設 A 為 $m\times n$ matrix 且 $\mathbf{b}\in\mathbb{F}^m$, 考慮聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.*

(1) *$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解若且唯若 $\mathbf{b}\in\mathrm{Col}(A)$.*

(2) *假設 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解則其解唯一若且唯若 $N(A)=\{\mathbf{0}\}$.*

接下來我們就是要找到一個矩陣的 column space 以及 nullspace 這兩個重要的 subspaces 的 basis. 一般來說要找到 $\mathbb{F}^m$ 的 subspace V 的一組 basis, 我們會先找 V 的一組 spanning vectors. 然後在其中再挑出仍保持為 spanning vectors 且為 linearly independent 的一組向量. 當只有兩個向量時, 我們可以馬上由它們是否為平行來判斷是否為 linearly independent. 不過通常有三個以上的向量時, 並不容易直接看出哪些向量會 linearly independent, 除非如以下的例子.

Example 3.6.3. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

要說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent, 我們必須說明只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時, 才會使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. 然而

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=c_1\begin{bmatrix}0\\3\\0\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\-5\\0\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\7\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2c_2\\3c_1-5c_2+7c_3\\-c_3\\c_1\end{bmatrix}.$$

所以要使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 就必須讓 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3$ 的 1-st entry $2c_2$, 3-rd entry $-c_3$ 以及 4-th entry c_1 皆為 0, 即 $c_1=c_2=c_3=0$. 得證只有當 $c_1=c_2=c_3=0$ 時, 才會使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 故知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent.

從 Example 3.6.3 我們可以看出來, 當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 中每一個向量 $\mathbf{v}_i$ 都可以找到一個 entry 不為 0, 而其他向量在該 entry 皆為 0, 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent. (例如 Example 3.6.3 中 $\mathbf{v}_1$ 的 4-th entry 為 1, 而 $\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的 4-th entry 為 0; $\mathbf{v}_2$ 的 1-st entry 為 2, 而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3$ 的 1-st entry 為 0; $\mathbf{v}_3$ 的 3-rd entry 為 -1, 而 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 的 3-th entry 為 0, 就符合這個條件). 此時假設每個 $\mathbf{v}_i$ 的那個非 0 的特殊 entry 為 a_i, 由於 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 在該位置的 entry 為 c_ia_i, 所以若 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, 則必 $c_ia_i=0$, 得每一個 c_i 皆為 0. 因此 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent.

當 A 為 $m\times n$ matrix, A 的 nullspace $N(A)$ 就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的所有解所成的集合. 由於我們已經知道如何找到 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解, 所以我們就從如何找 nullspace 的 basis 開始.

回顧我們找 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合的方法為, 利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form (或 reduced echelon form) A'. 此時 $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合就是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集合, 也就是說 A 和 A' 有相同的 nullspace. 接著我們找出 free variable, 再將每個 free variable 代入任意的實數, 從下往上推得出一組解. 注意在這個過程中, pivot variable 的值會由 free variables 的值所決定, 所以只要定出 free variable 的值, 就可以得到一組解. 現假設 free variables 為 $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. 對每一個 $j=1,\dots,k$, 我們考慮 $x_{i_j}=1$, 其他 free variable 為 0 的情形, 令這樣推得出來的解為 $\mathbf{v}_j$. 由於 $\mathbf{v}_j$ 的 i_j-th entry 為 1, 而其他 $\mathbf{v}_{i_{j'}}$ 的 i_j-th entry 為 0, 由前討論知 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 為 linearly independent. 而對於任意 $r_1,\dots,r_k\in\mathbb{F}$, $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_k\mathbf{v}_k$ 就等同於是將每個 free variables $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ 分別代 $x_{i_1}=r_1,\dots,x_{i_k}=r_k$ 所得的解. 換言之每個解都可以寫成 $r_1\mathbf{v}_1+\cdots+r_k\mathbf{v}_k$ 的形式, 也就是說 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 是 A 的 nullspace 的一組 spanning vectors. 我們證明了 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 就是 A 的 nullspace 的一組 basis, 也因此得知 A 的 nullspace 的 dimension 為 free variables 的個數, 亦即 A 的 column 的個數減去 pivot 的個數, 因此有以下之結果.

Proposition 3.6.4. *假設 A 為 $m\times n$ matrix. 若利用 row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 nullspace 的 dimension 為 $n-r$. 假設 $A'\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的 free variables 為 $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$. 對每一個 $j=1,\dots,k$, 我們取 $x_{i_j}=1$, 其他 free variable 為 0, 令這樣推得出來的解為 $\mathbf{v}_j$. 則 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 為 A 的 nullspace 的一組 basis.*

由於一個矩陣的 nullspace 不會因為其化為 echelon form 的不同而改變, 而且 nullspace 的 dimension 是固定的, 所以 Proposition 3.6.4 也說明了"不管一個矩陣利用 elementary row operations 所化得的 echelon form 為何, 其 pivot 的個數必相同", 也就是這個矩陣的 rank.

Example 3.6.5. 考慮 A 的 nullspace, 其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&2\\1&2&2&-2&1&2\end{bmatrix}.$$

將 A 的 2-nd row 分別乘上 -2, -1, -1 加至 1-st, 3-rd 和 4-th row, 然後再將 1-st, 2-nd rows 交換得

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&2&-3&1&2\end{bmatrix}.$$

接著將 2-nd row 分別乘上 $-1,-2$ 加至 3-rd 和 4-th row 得

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&1&1&2\end{bmatrix}.$$

最後將 3-rd row 乘上 -1 加至 4-th row, 得 echelon form

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

我們就是要找到 homogeneous linear system

$$\begin{array}{cccccccc}x_1&&&+x_4&&&=&0\\&x_2&+x_3&-2x_4&&&=&0\\&&&+x_4&+x_5&+2x_6&=&0\end{array}$$

所有的解. 由 echelon form 看出 x_1,x_2,x_4 為 pivot variable, x_3,x_5,x_6 為 free variable. 現令 $x_6=1,x_5=0,x_3=0$, 解出 $x_4=-2$, $x_2=-4$, $x_1=2$, 而令 $x_6=0,x_5=1,x_3=0$ 解出 $x_4=-1$, $x_2=-2$, $x_1=1$, 最後令 $x_6=0,x_5=0,x_3=1$ 解出 $x_4=0$, $x_2=-1$, $x_1=0$. 故得

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\-4\\0\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

為 A 的 nullspace 的一組 basis. 事實上, 若令 x_6,x_5,x_3 分別為任意的實數 r,s,t, 則可得 $x_4=-2r-s$, $x_2=-4r-2s-t$, $x_1=2r+s$. 也就是說 A 的 nullspace 中的向量都可以寫成

$$\begin{bmatrix} 2r+s \\ -4r-2s-t \\ t \\ -2r-s \\ s \\ r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r\mathbf{v}_1+s\mathbf{v}_2+t\mathbf{v}_3.$$

故知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 A 的 nullspace 的 spanning vectors, 又很容易看出 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 $N(A)$ 的一組 basis.

Question 3.11. *試將 Example 3.6.5 中的 A 化為 reduced echelon form. 是否更容易看出 $N(A)$ 的一組 basis 呢?*

接下來我們來看如何找 matrix A 的 column space $\mathrm{Col}(A)$ 的 basis. 首先一個直接的想法就是 A 的 column space, 就是使得聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{v}$ 有解的 $\mathbf{v}$ 所成的集合. 所以我們只要找出這些 $\mathbf{v}$, 就可以得到 A 的 column space. 我們看以下的例子.

Example 3.6.6. 考慮 Example 3.6.5 中的 4×6 matrix A. 我們要找出 A 的 column vectors 的一組 basis. 假設 $\mathbf{b}$ 為 A 的 column space 裡的一個向量, 我們知道此時 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 因此令

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

我們要找到 b_1,b_2,b_3,b_4 的條件使得以下聯立方程組有解.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & = & b_1 \\ x_1 & & & +x_4 & & & = & b_2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & +2x_6 & = & b_3 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +x_5 & +2x_6 & = & b_4 \end{array}$$

考慮 augmented matrix $[A\,|\,\mathbf{b}]$, 利用 Example 3.6.5 相同的 elementary row operations 我們得

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & b_3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & b_3-b_2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 2 & b_4-b_2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_3+b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_4+3b_2-2b_1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & b_1-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & b_3+b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_3+2b_2-b_1 \end{array}\right].$$

由解聯立方程組的方法 (即 1.2 節 (2)(a)(b) 的情形) 知, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解若且唯若 $b_4-b_3+2b_2-b_1=0$. 換言之, 由所有 $b_1-2b_2+b_3-b_4=0$ 的解, 所得的 $\mathbf{b}$ 所成的集合便是 A 的 column space. 所以我們回到求矩陣 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的 nullspace. 由於 x_1 為 pivot variable, x_2,x_3,x_4 為 free variable. 利用前面求 nullspace 的 basis 的方

法, 令 $x_4 = 1, x_3 = 0, x_2 = 0$ 解出 $x_1 = 1$, 而令 $x_4 = 0, x_3 = 1, x_2 = 0$ 解出 $x_1 = -1$, 最後令 $x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 1$ 解出 $x_1 = 2$. 故得

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

為 B 的 nullspace 的一組 basis, 也就是 A 的 column space 的一組 basis..

注意用這個方法, 若 $m \times n$ matrix A 化成 echelon form 後沒有一個 row 全為 0, 就表示所有的 $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^m$ 皆會使聯立方程組有解, 故此時 A 的 column space 為 $\mathbb{F}^m$.

Example 3.6.6 找 column space 所用的方法缺點就是還要再求另一個矩陣的 nullspace 才能找到 column space 的 basis. 接下來我們介紹一個更簡捷的方法.

首先注意當我們利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有相同的解集合. 現假設 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 為 A 的 column vectors, 而 $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ 為 A' 的 column vectors. 若 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 為 $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解, 表示 $c_1\mathbf{a}'_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}'_n = \mathbf{0}$, 此時由於 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 亦為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解故我們亦有 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. 同理若 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, 我們亦會有 $c_1\mathbf{a}'_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}'_n = \mathbf{0}$. 這告訴我們存在不全為 0 的 c_i 使得 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ 若且唯若存在不全為 0 的 c_i 使得 $c_1\mathbf{a}'_1 + \cdots + c_n\mathbf{a}'_n = \mathbf{0}$. 換言之, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 為 linearly dependent 若且唯若 $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ 為 linearly dependent. 這也等價於 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ 為 linearly independent 若且唯若 $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ 為 linearly independent. 簡單來說當我們利用 elementary row operations 將一個矩陣變換到另一個矩陣, 兩個矩陣 column vectors 之間的線性關係是會被保持的. 我們看以下的例子.

Example 3.6.7. 考慮 Example 3.6.5 中的 4×6 matrix A, 且利用 elementary row operation 將之化為 reduced echelon form A'. 也就是將 Example 3.6.5 中的 echelon form 的 3-rd row 乘上 2 加到 echelon form 的 2-nd row, 再將 echelon form 的 3-rd row 乘上 -1 加到 echelon form 的 1-st row 得

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我們很容易看出 A' 的 3 個 pivot 所在的 column vectors $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_4$ 為 linearly independent. 事實上 $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_4$ 每一個都符合有一個非 0 entry (即 pivot 之 entry) 而其他向量在該 entry 為 0. 我們考慮相對應到 A 的 column vectors $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$. 它們也會是 linearly independent. 這是因為若我們考慮新的 4×3 matrix $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_4]$ 經由將 A 換成 A' 一樣步驟的 elementary row operation 我們會得到 $[\mathbf{a}'_1 \quad \mathbf{a}'_2 \quad \mathbf{a}'_4]$. 所以依前面的討論知, 因為 $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_4$ 為 linearly independent, 所以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 也會是 linearly independent. 另一方面, 在 A' 中我們很容易看出 $\mathbf{a}'_3 = \mathbf{a}'_2$, $\mathbf{a}'_5 = -\mathbf{a}'_1 + 2\mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}'_4$ 以及 $\mathbf{a}'_6 = -2\mathbf{a}'_1 + 4\mathbf{a}'_2 + 2\mathbf{a}'_4$. 所以和剛才同樣理由, 依 elementary row operations 保持線性關係的性質, 我們有 $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$ 以及

$\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4$. 事實上直接檢查得

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_5,$$

$$-2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4 = -2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_6.$$

換言之, $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4)$. 故知 A 的 column space 為

$$\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4).$$

再加上 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 為 linearly independent, 得證 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ 是 A 的 column space 的一組 basis.

注意在 Example 3.6.7 中我們為了方便說明將 A 化為 reduced echelon form. 事實上既然我們知道 column space 的 basis 是由對應到 pivot 所在位置 A 的 column vectors 所組成, 所以化成 echelon form 知道 pivot 在那些 column 就可以找到 basis 了. 因此除非我們想要將 A 的其他 column vectors 用這組 basis 來表示, 一般是不需要進一步化成 reduced echelon form. 另外我們要強調的是 column space 的 basis 是要回到 A 的 column vectors 所組成, 而不是由 A 的 echelon form (或 reduced echelon form) A' 的 pivot 所在的 column vectors 所組成. 這是因為一般我們在做 elementary row operations 已將 column vectors 各個 entry 做了調動, 所以 echelon form A' 的 column space 已不再是原來 A 的 column space 了.

我們將這個求 column space 的 basis 的方法做一個總結. 首先將 $m \times n$ matrix A 利用 elementary row operation 化為 echelon form A'. 假設 A' 的 pivot variables 為 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, 則由於 A' 的 pivot 所在的 column vectors $\mathbf{a}'_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}'_{i_r}$ 為 linearly independent 且 elementary row operations 會保持各 column vectors 之間的線性關係, 我們知對應到 A 的 column vectors $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 亦為 linearly independent. 同理, 由於 A' 的其他 column vectors $\mathbf{a}'_j$ 皆符合 $\mathbf{a}'_j \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}'_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}'_{i_r})$, 我們得 A 的其他 column vectors $\mathbf{a}_j$ 也符合 $\mathbf{a}_j \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r})$. 因此得 $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathrm{Span}(\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r})$. 我們證得了 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的 spanning vectors 且為 linearly independent, 故 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的一組 basis. 我們有以下的定理.

Proposition 3.6.8. *假設 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 且 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{F}^m$ 為 A 的 column vectors. 若利用 elementary row operations 將 A 化為 echelon form A' 後, A' 的 pivot 個數為 r, 則 A 的 column space 的 dimension 為 r. 假設 A' 的 pivot variables 為 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, 則 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 為 A 的 column space 的一組 basis.*

相對於矩陣的 column space, 我們也可考慮矩陣的 row space. 我們有以下的定義.

Definition 3.6.9. 假設 $A=\begin{bmatrix} - & {}_1\mathbf{a} & - \\ & \vdots & \\ - & {}_m\mathbf{a} & - \end{bmatrix}$ 為以 $\mathbb{F}^n$ 中的向量 ${}_1\mathbf{a}_1,\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 為 row vectors 的 $m\times n$ matrix. 則 A 的 row space 為 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$, 且用 $\mathrm{Row}(A)$ 來表示.

如何求 A 的 row space 的 basis 呢? 我們可以考慮 A 的 transpose A^{T}. 因為 A^{T} 的 column vectors 就是 A 的 row vectors, 求出 A^{T} 的 column space 的 basis 就等同於求 A 的 row space 的 basis. 所以我們可以用求 column space 的 basis 方法求出 A^{T} 的 column space 的 basis, 便得到 A 的 row space 的 basis. 不過這個方法有個缺點, 因為我們是換了一個矩陣 A^{T} 做 row operations, 因此就無法得到和原來 A 的 column space 之間的關係了. 以下介紹的方法, 便是直接對 A 做 elementary row operations 來求得 A 的 row space 的 basis, 所以我們可以得到 A 的 row space 和 column space 之間的關係.

這個方法的主要概念是 A 經過 elementary row operations 變換成 A' 後, A 和 A' 的 row space 是相同的. 這是因為若 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 為 A 的 row vectors, ${}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}'$ 為 A' 的 row vectors, 則每個 ${}_i\mathbf{a}'$ 其實是 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 中的向量互相交換, 或是乘上某個非 0 實數, 或是乘上某個實數後加到另一個向量. 也就是說每個 ${}_i\mathbf{a}'$ 其實是 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 的線性組合, 所以對所有 $i=1,\ldots,m$ 皆有 ${}_i\mathbf{a}'\in\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 因此由 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的 subspace 知 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})$. 同理, 因 elementary row operation 是可以還原的, A' 也可經由 elementary row operations 換成 A, 所以我們也有 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')$. 得證 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a})=\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',\ldots,{}_m\mathbf{a}')$, 亦即 A 和 A' 有相同的 row space. 我們看以下的例子.

Example 3.6.10. 考慮 Example 3.6.5 中的 4×6 matrix A, 且利用 elementary row operation 將之化為 reduced echelon form A' (參見 Example 3.6.7), 令 ${}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a}$ 為 A 的 row vectors, ${}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}'$ 為 A' 的 row vectors. 亦即

$$ {}_1\mathbf{a}=[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0],\ {}_2\mathbf{a}=[1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0],\ {}_3\mathbf{a}=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2],\ {}_4\mathbf{a}=[1\ 2\ 2\ \ -2\ 1\ 2], $$

$$ {}_1\mathbf{a}'=[1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ \ -2],\ {}_2\mathbf{a}'=[0\ 1\ 1\ 0\ 2\ 4],\ {}_3\mathbf{a}'=[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 2],\ {}_4\mathbf{a}'=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]. $$

利用 Example 3.6.5 的 elementary row operations, 我們知 A' 的 3-rd row ${}_3\mathbf{a}'$ 是由 A 的 3-rd row 減去 A 的 2-nd row 後再減去 A 的 2-nd row 乘上 -2 加到 1-st row 的向量, 亦即

$$ ({}_3\mathbf{a}-{}_2\mathbf{a})-({}_1\mathbf{a}-2\,{}_2\mathbf{a})={}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a}=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2]+[1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]-[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]={}_3\mathbf{a}'. $$

而利用 Example 3.6.7 的 elementary row operations, A' 的 2-rd row ${}_2\mathbf{a}'$ 是由 A 的 2-nd row 乘上 -2 加到 A 的 1-st row 後再加上 2 倍的 A' 的 3-rd row 的向量, 亦即

$$ ({}_1\mathbf{a}-2\,{}_2\mathbf{a})+2({}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a})=2\,{}_3\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a}=[2\ 2\ 2\ 0\ 2\ 4]-[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]={}_2\mathbf{a}'. $$

而 A' 的 1-st row ${}_1\mathbf{a}'$ 是由 A 的 2-nd row 減去 A' 的 3-rd row 的向量, 亦即

$$ {}_2\mathbf{a}-({}_3\mathbf{a}+{}_2\mathbf{a}-{}_1\mathbf{a})={}_1\mathbf{a}-{}_3\mathbf{a}=[2\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]-[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2]={}_1\mathbf{a}'. $$

從這裡我們得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})$. 同理得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})\subseteq\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')$ (此處略去不檢查了). 故得 $\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a},{}_2\mathbf{a},{}_3\mathbf{a},{}_4\mathbf{a})=\mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}',{}_2\mathbf{a}',{}_3\mathbf{a}',{}_4\mathbf{a}')$,

亦即 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}', {}_4\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的 spanning vectors. 在 echelon form 中, 沒有 pivot 的 row 必為零向量. 現 A' 的 pivot 個數為 3, 即 pivot 發生於前 3 個 row ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$, 而 ${}_4\mathbf{a}'$ 為零向量, 所以僅 pivot 所在的 row ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 就可以成為 A 的 row space 的 spanning vectors. 現又由於 A' 為 reduced echelon form, 每一個 row 中 pivot 所在的位置其他的 row 在該位置皆為 0, 所以 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 為 linearly independent. 得證 ${}_1\mathbf{a}', {}_2\mathbf{a}', {}_3\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的一組 basis.

注意在 Example 3.6.10 中我們為了方便說明將 A 化為 reduced echelon form. 事實上既然 A 的 echelon form 和 reduced echelon form 有相同的 row space, 而它們 pivot 的個數又相同, 所以由 dimension 的性質, 知 echelon form 中 pivot 所在的 row vectors 也會是 A 的 row space 的一組 basis. 化成 reduced echelon form 的好處是比較容易讓我們將 row space 中的向量寫成這組 basis 的線性組合. 因此因此除非我們想要將 A 的 row space 中的 vectors 用這組 basis 來表示, 若僅想找到 row space 的 basis 一般是不需要進一步化成 reduced echelon form. 另外我們要強調的是 row space 的 basis 不可以回到 A 的 row vectors 去找. 這是因為一般我們在做 elementary row operations 已將 row vectors 所在的位置做了調動, 所以 row operation 並沒有保持 row vectors 之間的線性關係.

我們將這個求 row space 的 basis 的方法做一個總結. 首先將 $m\times n$ matrix A 利用 elementary row operation 化為 echelon form A'. 假設 A' 的 pivot 個數為 r, 則由於 A' 為 echelon form, A' 前 r 個 row vectors ${}_1\mathbf{a}',\dots,{}_r\mathbf{a}'$ 為 nonzero vectors. A' 其餘的 row vectors 皆為 zero vectors. 由於 elementary row operations 會保持 row space, 我們得 ${}_1\mathbf{a}',\dots,{}_r\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的 spanning vectors. 又由化為 reduced echelon form 的情形我們知 A 的 row space 的 dimension 為 r, 故由 Proposition 2.6.11 知 ${}_1\mathbf{a}',\dots,{}_r\mathbf{a}'$ 為 A 的 row space 的一組 basis. 我們有以下的定理.

Proposition 3.6.11. 假設 A 為 $m\times n$ *matrix.* 若利用 *elementary row operations* 將 A 化為 *echelon form* A' 後*,* A' 的 *pivot* 個數為 r*,* 則 A 的 *row space* 的 *dimension* 為 r 且 A' 的前 r 個 *row vectors* ${}_1\mathbf{a}',\dots,{}_r\mathbf{a}'$ (即 A' 中的 *nonzero row vectors*) 為 A 的 *row space* 的一組 *basis.*

我們可以利用找 column space 和 row space 的 basis 的方法找一般 $\mathbb{F}^m$ 的 subspace V 的 basis. 首先我們先找出 V 的一組 spanning vectors $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, 然後造一個以 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 column vectors 的矩陣 $A=\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. 然後再利用找 A 的 column space 的 basis 的方法得到 V 的一組 basis. 我們也可造一個以 $\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}},\dots,\mathbf{v}_n^{\mathrm{T}}$ 為 row vectors 的 $n\times m$ matrix $B=\begin{bmatrix} — & \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{v}_n^{\mathrm{T}} & — \end{bmatrix}$ 然後再利用找 B 的 row space 的 basis 的方法得到 V 的一組 basis. 兩種方法都有它們的好處. 利用 column vectors 的方法, 由於最後找出的 basis 是從原來的 spanning vectors $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 中的向量所組成, 所以適合處理希望 basis 的 vectors 是由原來 spanning vectors 中選出的問題. 而利用 row vectors 的方法, 由於可以化為 reduced echelon form, 而 basis 是由此 reduced echelon form 中的 nonzero vectors 所組成, 所以雖然和來的 spanning vectors 無關, 不過很適合拿來判斷哪些向量在此 subspace 以及處理將 subspace 中的向量用此 basis 表示的問題. 例如以下的例子.

Example 3.6.12. 考慮 $\mathbb{R}^6$ 中的向量

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\mathbf{v}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-2\\1\\2\end{bmatrix}\quad\text{and}\quad\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\3\\-2\\4\end{bmatrix}.$$

令 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$, 試找出 V 的一組 basis, 並用之判斷 $\mathbf{w}$ 是否在 V 中.

依前面的討論我們知此問題適合用 row space 的方式處理, 所以考慮以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ 為 row vectors 的矩陣 A. 此時 A 就是 Example 3.6.10 中的矩陣 A. 利用 Example 3.6.10 的結果, 我們得

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\\-2\end{bmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\2\\4\end{bmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$

為 V 的一組 basis. 注意因為原來 V 中的向量為 column vector 的形式, 為了一致性這裡我們將 A 的 row space 的 basis 寫回成 column vectors. 依此我們知 $\mathbf{w}\in V$ 若且唯若存在 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$. 然而

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_2\\c_3\\-c_1+2c_2+c_3\\-2c_1+4c_2+2c_3\end{bmatrix},$$

我們發現要使得 $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3$, 在 1-st, 2-nd 和 3-rd entry 的地方 (這些地方就是 reduced echelon form 的 pivot 的位置) 需有 $c_1=1,c_2=-2,c_3=3$. 故將 $c_1=1,c_2=-2,c_3=3$ 代入, 發現每個 entry 皆吻合, 故有 $\mathbf{w}=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3$, 得知 $\mathbf{w}\in V$.

當我們對要找的 basis 沒有特殊要求時, 我們可以選擇兩種方法中可以使得矩陣的 row 的個數較少的那一種方法處理. 因為如此所需的 elementary row operations 相對起來會較少, 可以較快找到一組 basis. 例如前一個例子 Example 3.6.12 中的 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4$ 若考慮成 column vectors, 所得的矩陣為 6×4 matrix, 而考慮成 row vectors, 所得的矩陣為 4×6 matrix. 所以此時若僅想找出 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$ 的一組 basis, 用 row vectors 的情況處理會比較快.

給定一個矩陣 A, 從 Proposition 3.6.8 和 Proposition 3.6.11 我們知道 A 的 column space 和 row space 有相同的 dimension, 亦即 A 利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數, 即 A 的 rank. A 的 column space 的維度就是 A 的 rank, 至於 A 的 nullspace 的維度, 我們也給予一特殊的名稱, 即以下的定義.

Definition 3.6.13. 假設 A 為 $m \times n$ matrix. A 的 nullspace 的 dimension 稱為 A 的 *nullity*, 記為 $\mathrm{null}(A)$, 亦即 $\mathrm{null}(A) = \dim(N(A))$.

依此定義, 由 Proposition 3.6.8 和 Proposition 3.6.11 我們知道 $\mathrm{rank}(A)$ 即為 A 利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數, 而由 Proposition 3.6.4 我們知道 $\mathrm{null}(A)$ 就是 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 free variables 的個數, 即 A 的 column 個數減去 echelon form 的 pivot 個數, 因此我們有以下的 *Dimension Theorem* (或稱為 *rank equation*).

Theorem 3.6.14 (Dimension Theorem)**.** 假設 A 為 $m \times n$ *matrix.* 則

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{null}(A) = n.$$

Question 3.12. 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix.* 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{null}(A)$.

Question 3.13. 假設 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

(1) 若對於任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^m$ 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 皆有解, 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{null}(A)$.

(2) 若存在 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^m$ 使得聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 有唯一解, 試求 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{null}(A)$.

Proposition 3.6.8 告訴我們 A 的 column space 的維度就是 A 的 rank, 亦即 $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rank}(A)$, 而 Proposition 3.6.11 告訴我們 $\dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A)$, 因此得 $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A))$. 也就是說一個矩陣的 column space 和 row space 有相同的維度. 現考慮矩陣 A 的 transpose A^{T}. 由於 A 的 column space 就是 A^{T} 的 row space (且 A 的 row space 就是 A^{T} 的 column space), 所以我們有 $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A^{\mathrm{T}})) = \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}})$. 得證以下的性質.

Proposition 3.6.15. 假設 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. 則

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}).$$

亦即利用 *elementary row operations* 將 A 以及 A^{T} 化為 *echelon form* 後, 它們的 *pivot* 個數相同.

Question 3.14. 假設 A 為 $m \times n$ *matrix.* 試證明 $\mathrm{null}(A^{\mathrm{T}}) = m - \mathrm{rank}(A)$.

注意, 對於 Proposition 3.6.15 的證明, 若想要直接證明利用 elementary row operations 將 A 以及 A^{T} 化為 echelon form 後, 它們的 pivot 個數相同, 會有相當的困難度. 但將這個問題轉為 column space 以及 row space 的 dimension 問題, 就很容易解決. 其實許多數學問題都是這樣, 有時只要換個角度看問題就能迎刃而解. 這也是當我們介紹一個新的概念後常常會去探討這個概念還有甚麼等價的條件的原因. 最後我們利用類似的概念來處理兩個矩陣相乘後 rank 的變化關係.

Proposition 3.6.16. 假設 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times l}(\mathbb{F})$. 則

(1) $\mathrm{Col}(AB) \subseteq \mathrm{Col}(A)$ 且 $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$.

(2) $\mathrm{Row}(AB) \subseteq \mathrm{Row}(B)$ 且 $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$.

(3) 若 $E \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 *invertible*, 則 $\mathrm{Col}(AE) = \mathrm{Col}(A)$ 且 $\mathrm{rank}(AE) = \mathrm{rank}(A)$.

(4) 若 $H \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$ 為 *invertible*, 則 $\mathrm{Row}(HA) = \mathrm{Row}(A)$ 且 $\mathrm{rank}(HA) = \mathrm{rank}(A)$.

Proof. 令 A 和 B 的 column vectors 依序為 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ 和 $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_l$ 且令 A 和 B 的 row vectors 依序為 ${}_1\mathbf{a},\ldots,{}_m\mathbf{a}$ 和 ${}_1\mathbf{b},\ldots,{}_n\mathbf{b}$.

(1) 依定義 $\mathrm{Col}(AB) = \mathrm{Span}(A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_l)$, 而對任意 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 我們有

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_1\mathbf{a}_1 + \cdots + b_n\mathbf{a}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n) = \mathrm{Col}(A).$$

因此 $A\mathbf{b}_i \in \mathrm{Col}(A)$, $\forall 1 \leq i \leq l$. 因此得 $\mathrm{Col}(AB) = \mathrm{Span}(A\mathbf{b}_1,\ldots,A\mathbf{b}_l) \subseteq \mathrm{Col}(A)$. 換言之 $\mathrm{Col}(AB)$ 為 $\mathrm{Col}(A)$ 的 subspace, 故由 Proposition 2.6.11 (4) 知 $\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathrm{Col}(AB)) \leq \dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rank}(A)$.

(2) 依定義 $\mathrm{Row}(AB) = \mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}B,\ldots,{}_m\mathbf{a}B)$, 而對任意 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 我們有

$$\mathbf{a}B = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & {}_1\mathbf{b} & — \\ & \vdots & \\ — & {}_n\mathbf{b} & — \end{bmatrix} = a_1({}_1\mathbf{b}) + \cdots + a_n({}_n\mathbf{b}) \in \mathrm{Span}({}_1\mathbf{b},\ldots,{}_n\mathbf{b}) = \mathrm{Row}(B).$$

因此 ${}_i\mathbf{a}B \in \mathrm{Row}(B)$, $\forall 1 \leq i \leq m$. 因此得 $\mathrm{Row}(AB) = \mathrm{Span}({}_1\mathbf{a}B,\ldots,{}_m\mathbf{a}B) \subseteq \mathrm{Row}(B)$. 換言之 $\mathrm{Row}(AB)$ 為 $\mathrm{Row}(B)$ 的 subspace, 故由 Proposition 2.6.11 (4) 知 $\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathrm{Row}(AB)) \leq \dim(\mathrm{Row}(B)) = \mathrm{rank}(B)$.

(3) 利用前面 (1) 的結果我們知 $\mathrm{Col}(AE) \subseteq \mathrm{Col}(A)$. 因 E 為 invertible, 考慮 $(AE)E^{-1} = A(EE^{-1}) = A$. 再利用 (1) 知 $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}((AE)E^{-1}) \subseteq \mathrm{Col}(AE)$. 因此得證 $\mathrm{Col}(AE) = \mathrm{Col}(A)$ 且由 dimension 得 $\mathrm{rank}(AE)\dim(\mathrm{Col}(AE)) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rank}(A)$.

(4) 利用前面 (2) 的結果我們知 $\mathrm{Row}(HA) \subseteq \mathrm{Row}(A)$. 因 H 為 invertible, 考慮 $H^{-1}(HA) = (H^{-1}H)A = A$. 再利用 (2) 知 $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(H^{-1}(HA)) \subseteq \mathrm{Row}(HA)$. 因此得證 $\mathrm{Row}(HA) = \mathrm{Row}(A)$ 且由 dimension 得 $\mathrm{rank}(HA)\dim(\mathrm{Row}(HA)) = \dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A)$. □

注意, 在 Proposition 3.6.16 (3) 中我們知道當 E 為 invertible 時 $\mathrm{rank}(AE) = \mathrm{rank}(A)$, 也因此知 $\dim(\mathrm{Row}(AE)) = \mathrm{rank}(AE) = \mathrm{rank}(A) = \dim(Row(A))$. 不過這並不代表 $\mathrm{Row}(AE) = \mathrm{Row}(A)$. 這是因為 $\mathrm{Row}(AE)$ 和 $\mathrm{Row}(A)$ 未必有包含關係, 因此即使 $\dim(\mathrm{Row}(AE)) = \dim(\mathrm{Row}(A))$, 也無法推得 $\mathrm{Row}(AE) = \mathrm{Row}(A)$. 同理在 Proposition 3.6.16 (4) 中我們知道當 H 為 invertible 時 $\dim(\mathrm{Col}(HA)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$, 但 $\mathrm{Col}(HA)$ 也未必等於 $\mathrm{Col}(A)$.

Question 3.15. 試找到例子 $A, E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ 其中 E 為 *invertible* 使得 $\mathrm{Row}(AE) \neq \mathrm{Row}(A)$, $\mathrm{Col}(EA) \neq \mathrm{Col}(A)$. *(Hint:* 考慮 E 為 *elementary matrix.)*

Question 3.16. 試用取轉置矩陣的方法利用 *Proposition 3.6.16 (1)* 證明 *(2),* 且利用 *(3)* 證明 *(4).*

Question 3.17. 試利用 *Proposition 3.5.7,* 即 *invertible matrix* 皆可寫成 *elementary matrices* 的乘積, 證明 *Proposition 3.6.16 (3), (4).*