4.2. Kernel and Range

Linear transformation 由於有保持 linear combination 的特點, 所以它會保持定義域與對應域中的 subspaces. 在這一節中我們便是要探討一個 linear transformation 所得到的兩個重要的 subspaces, “null space” 和 “range”, 並利用這兩個 subspace 來探討 linear transformation 本身的特點.

首先對於一般的函數 $T: V \to W$, 任取定義域 V 中的子集合 S, 我們很自然的會考慮 $T(S) = \{T(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in S\}$ 這一個集合, 它就是將所有 S 中的元素利用 T 映射到 W 後的元素收集起來所得的集合. 同樣的, 對於對應域 W 中的子集合 S', 我們也會考慮 $T^{-1}(S') = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) \in S'\}$ 這樣的集合, 它就是收集所有在定義域中會映射到 S' 的元素所成的集合. 很容易知道 $T(S)$ 會是對應域 W 中的子集合, 而 $T^{-1}(S')$ 會是定義域 V 中的子集合. 注意當 $\mathbf{w} \in T(S)$ 時, 依定義這表示 $\mathbf{w}$ 是 S 中某個元素經 T 映射所得, 亦即存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$. 所以 $T(S)$ 也可表示成 $T(S) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}), \text{for some } \mathbf{v} \in S\}$, 有時為了強調 $T(S)$ 為 W 的子集合, 我們也會用這種表示法.

由於 linear transformation 的特色, 當 $T: V \to W$ 為 linear transformation 時, 我們專注於考慮 V' 為 V 的 subspace 時的情況. 也就是說我們要了解

$$T(V') = \{T(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in V'\} = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}),\ \text{for some } \mathbf{v} \in V'\}$$

的特性. 同樣的若 W' 為 W 的 subspace, 我們也要了解

$$T^{-1}(W') = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) \in W'\}$$

的特性. 事實上, 我們有以下之結果.

Proposition 4.2.1. 假設 V, W 皆為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $T: V \to W$ 為 *linear transformation.* 若 V' 為 V 的 *subspaces,* 則 $T(V')$ 是 W 的 *subspace.* 另外, 若 W' 為 W 的 *subspaces,* 則 $T^{-1}(W')$ 是 V 的 *subspace.*

Proof. 依定義我們知 $T(V')$ 會是 W 的子集合, 而 $T^{-1}(W')$ 會是 V 的子集合. 故現僅需證明它們為 subspaces, 即利用 Corollary 2.3.3 我們要證明, 若 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in T(V')$ 且 $r \in \mathbb{F}$, 則 $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' \in T(V')$ 以及若 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$ 且 $r \in \mathbb{F}$, 則 $\mathbf{v} + r\mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$.

首先再強調一次, 當我們說 W 中的一個向量 $\mathbf{w}$ 在 $T(V')$ 時, 表示存在 $\mathbf{v} \in V'$ 使得 $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$. 因此若 $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in T(V')$, 則存在 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V'$ 使得 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, T(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$. 此時對於 $r \in \mathbb{F}$, 我們有 $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' = T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}')$. 再利用 T 為 linear, 得 $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' = T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}')$. 然而依假設 V' 為 V 的 subspace, 故由 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V'$ 知 $\mathbf{v} + r\mathbf{v}' \in V'$, 得證 $\mathbf{w} + r\mathbf{w}' = T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}') \in T(V')$.

另一方面, 若 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$, 表示 $T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}') \in W'$. 此時對於 $r \in \mathbb{F}$, 由於 T 為 linear, 我們有 $T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}')$. 然而依假設 W' 為 W 的 subspace, 故由 $T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}') \in W'$ 知 $T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}') \in W'$. 因此由 $T(\mathbf{v} + r\mathbf{v}') = T(\mathbf{v}) + rT(\mathbf{v}') \in W'$, 得證 $\mathbf{v} + r\mathbf{v}' \in T^{-1}(W')$. □

特別的, 在 $V' = V$ 和 $W' = \{\mathbf{0}\}$ 這兩個特殊情況時, 即

$$T(V) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ for some } \mathbf{v} \in V\} \quad \text{and} \quad T^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

這兩個 subspaces, 對我們了解 T 這個 linear transformation 非常有幫助. 我們先給這兩個 subspace 特殊的名稱.

Definition 4.2.2. 假設 V,W 皆為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $T:V\to W$ 為 linear transformation.

(1) 我們稱 W 的 subspace $T(V)$ 為 T 的 *range* (也稱為 *image*). 通常我們用 $\mathsf{R}(T)$ (或 $\mathrm{im}(T)$) 來表示 T 的 rang.

(2) 我們稱 V 的 subspace $T^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ 為 T 的 *null space* (也稱為 *kernel*), 通常我們用 $\mathsf{N}(T)$ (或 $\ker(T)$) 來表示 T 的 null space.

首先我們來看 linear transformation 的 range. 假設 $T:V\to W$ 為 linear transformation. 由 Proposition 4.2.1 我們知 T 的 range $\mathsf{R}(T)$ 是 W 的 subspace, 故知 $\dim(\mathsf{R}(T))\leq\dim(W)$. 若 $\dim(\mathsf{R}(T))=\dim(W)$, 則依 Proposition 2.6.11 知此時 $\mathsf{R}(T)=W$. 也就是說對於任意的 $\mathbf{w}\in W$, 由於 $\mathbf{w}\in\mathsf{R}(T)$ 依定義存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{w}=T(\mathbf{v})$. 也就是說此時 T 為 onto. 另一方面, 若 T 為 onto, 則依定義對於任意 $\mathbf{w}\in W$, 存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ 故得 $\mathbf{w}\in\mathsf{R}(T)$, 得證 $W\subseteq\mathsf{R}(T)$. 再利用已知 $\mathsf{R}(T)\subseteq W$, 得證 $\mathsf{R}(T)=W$. 我們有以下的性質.

Proposition 4.2.3. 假設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation.* 則 T 為 *onto* 若且唯若 $\dim(\mathsf{R}(T))=\dim(W)$.

一般來說, 我們要判斷一個函數是否為 onto 便是要確認其 range 是否就是 codomain (對應域). 對於一般的函數要確認是否為 onto 有時並不容易. 不過 Proposition 4.2.3 告訴我們對於 linear transformation, 可以直接由它的 range 的 dimension 來判斷是否為 onto. 至於如何知道一個 linear transformation 的 range 呢? 我們有以下的性質.

Proposition 4.2.4. 假設 V,W 皆為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 V 的一組 *spanning vectors.* 則

$$\mathsf{R}(T)=\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n)).$$

Proof. 設 $\mathbf{w}\in\mathsf{R}(T)$, 表示存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{w}=T(\mathbf{v})$. 又因 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 spanning vectors, 故存在 $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{F}$, 使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$. 因此利用 T 為 linear 得

$$\mathbf{w}=T(\mathbf{v})=T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)\in\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n)),$$

得證 $\mathsf{R}(T)\subseteq\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n))$.

另一方面, 設 $\mathbf{w}\in\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n))$, 表示存在 $c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{F}$, 使得 $\mathbf{w}=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)$. 因此利用 T 為 linear 得

$$\mathbf{w}=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_nT(\mathbf{v}_n)=T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)\in\mathsf{R}(T),$$

得證 $\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n))\subseteq\mathsf{R}(T)$. 因此證明了 $\mathsf{R}(T)=\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1),\dots,T(\mathbf{v}_n))$. □

Example 4.2.5. (1) 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_3\end{bmatrix}$. 在 Example 4.1.4 中我們已知 T 是一個 linear transformation. 考慮定義域 $\mathbb{R}^3$ 的 standard basis $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$,

我們得 $T(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. 由於 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ 為 $\mathbb{R}^2$ 的一組 spanning vectors, 由 Proposition 4.2.4 我們有 $\mathsf{R}(T)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix})=\mathbb{R}^2$. 故得 T 為 onto.

(2) 考慮 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1\\x_1+x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}$. 很容易驗證 T 是一個 linear transformation. 考慮定義域 $\mathbb{R}^2$ 的 standard basis $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$, 我們得 $T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$. 由 Proposition 4.2.4 我們有 $\mathsf{R}(T)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix})$. 由於 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 為 linearly independent, 故得 $\dim(\mathsf{R}(T))=2$. 由 Proposition 4.2.3 知 T 不是 onto.

Question 4.4. 假設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation.* 若 $\dim(W)>\dim(V)$, 則 T 有可能是 *onto* 嗎?

Question 4.5. 假設 $\mathbb{F}$ 是 *field* 且 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 考慮 *linear transformation* $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 定義為 $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$, $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{F}^n$. 考慮 $\mathbb{F}^n$ 的 *standard basis* $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$. 試說明 $\mathsf{R}(T_A)$ *(*即 T_A 的 *rang)* 和 $\mathrm{Col}(A)$ *(*即 A 的 *column space)* 之間的關係.

要注意是有可能一個 linear transformation T 的 range 為 $\{\mathbf{0}\}$. 此表示 T 將所有定義域的向量皆映射到 $\mathbf{0}$, 亦即 $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$, $\forall\mathbf{v}\in V$. 這樣的 linear transformation, 我們依慣例, 仍稱之為 *zero mapping.*

Question 4.6. 假設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation* 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$ 為 V 的一組 *basis.* 試證明 T 為 *zero mapping* 若且唯若 $T(\mathbf{v}_1)=\cdots=T(\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$.

接下來我們看 null space 與 linear transformation 的關係. 假設 $T:V\to W$ 為 linear transformation. 若 T 為 one-to-one, 由於已知 $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 故知不可能有非零的向量 $\mathbf{v}$ 使得 $T(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 因此可得 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$. 其實反過來 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$, 也會使得 T 為 one-to-one, 我們有以下的結果.

Proposition 4.2.6. 假設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation.* 則 T 為 *one-to-one* 若且唯若 $\dim(\mathsf{N}(T))=0$, 亦即 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$.

Proof. 我們已知當 T 為 one-to-one 時, 不會有非零向量映射到 $\mathbf{0}$, 故知 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$, 得 $\dim(\mathsf{N}(T))=0$. 反之, 當 $\dim(\mathsf{N}(T))=0$, 即 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$, 此時若 T 不是 one-to-one, 表示存在 $\mathbf{v},\mathbf{v}'\in V$ 滿足 $\mathbf{v}\neq\mathbf{v}'$ 但 $T(\mathbf{v})=T(\mathbf{v}')$. 由於 T 為 linear, 得 $T(\mathbf{v}-\mathbf{v}')=T(\mathbf{v})-T(\mathbf{v}')=\mathbf{0}$, 亦即 $\mathbf{v}-\mathbf{v}'\in T^{-1}(\{\mathbf{0}\})=\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$. 得到 $\mathbf{v}=\mathbf{v}'$ 之矛盾, 故證得 T 為 one-to-one. $\square$

Example 4.2.7. 我們探討 Example 4.2.5 中的 linear transformation 是否為 one-to-one.

(1) 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_3\end{bmatrix}$. 若 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathsf{N}(T)$, 表示 $T(\mathbf{v})=T(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}a+b\\a-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, 故得 $a+b=0$ 以及 $a-c=0$, 因此可得 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\in\mathsf{N}(T)$, 知 $\mathsf{N}(T)\neq\{\mathbf{0}\}$ (事實上 $\mathsf{N}(T)=\mathrm{Span}(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix})$). 所以知 T 不是 one-to-one.

(2) 考慮 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_1\\x_1+x_2\\x_1-x_2\end{bmatrix}$. 若 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\in\mathsf{N}(T)$, 表示 $T(\mathbf{v})=T(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}a\\a+b\\a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. 故得 $a=0$, $a+b=0$ 以及 $a-b=0$, 即 $a=b=0$. 因此可得 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$, 所以由 Proposition 4.2.6 知 T 是 one-to-one.

要注意 Proposition 4.2.6 需 T 為 linear transformation 才適用. 例如 $f(x)=x^2$ 的情形, 雖然 $f^{-1}(0)=\{0\}$ (因為只有當 $x=0$ 才會使得 $x^2=0$) 但 $f(x)$ 不是一對一 (例如 $f(1)=f(-1)=1$). 事實上我們知道 $f(x)$ 不是 linear. 所以當 f 不是 linear transformation 時, 不能由 $f^{-1}(\{0\})$ 來判斷是否為 one-to-one.

Question 4.7. *Proposition 4.2.6* 中是哪一個部分需用到 T 為 *linear* 的假設? 是由 T 為 *one-to-one* 推得 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$ 還是由 $\mathsf{N}(T)=\{\mathbf{0}\}$ 推得 T 為 *one-to-one*?

Question 4.8. 假設 $T:V\to W$ 為 *linear transformation*. 在 *Question 4.6* 中我們知道 T 為 *zero mapping* 和 T 的 *range* 的等價關係. 你知道 T 為 *zero mapping* 和 T 的 *null space* 的等價關係嗎?

Question 4.9. 假設 $\mathbb{F}$ 是 *field* 且 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 考慮 *linear transformation* $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 定義為 $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$, $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{F}^n$. 試說明 $\mathsf{N}(T_A)$ (即 T_A 的 *null space*) 和 $N(A)$ (即 A 的 *null space*) 之間的關係.

對於一般的函數, 要判斷其是否為 onto 或是 one-to-one 並不容易, 但當 T 為 linear transformation 時, Proposition 4.2.3 和 Proposition 4.2.6 提供我們一個簡便的方法判斷 T 是否為 onto 或是 one-to-one. 也就是僅要確認 $\mathsf{R}(T)$ 和 $\mathsf{N}(T)$ 的維度即可. 既然 $\mathsf{R}(T)$ 和 $\mathsf{N}(T)$ 的維度這麼重要, 我們有以下的定義.

Definition 4.2.8. 假設 V,W 皆為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $T:V\to W$ 為 linear transformation.

(1) 我們稱 T 的 range $\mathsf{R}(T)$ 的維度為 T 的 *rank*, 記做 $\mathrm{rank}(T)$.

(2) 我們稱 T 的 null space $\mathsf{N}(T)$ 的維度為 T 的 *nullity*, 記做 $\mathrm{nullity}(T)$.

Question 4.10. 假設 $\mathbb{F}$ 是 *field* 且 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 考慮 *linear transformation* $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ 定義為 $T_A(\mathbf{v})=A\mathbf{v}$, $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{F}^n$. 試說明 $\mathrm{rank}(T_A)$ 和 $\mathrm{rank}(A)$ 以及 $\mathrm{nullity}(T_A)$ 和 $\mathrm{nullity}(A)$ 之間的關係.

在 Question 4.10 中我們看到 matrix 的 rank 和 nullity 和 linear transformation 的 rank 和 nullity 關係密切. 對於 matrix 的 rank 和 nullity 我們有所謂的 Dimension Theorem (參見 Theorem 3.6.14), 對於 linear transformation 我們也有以下的定理.

Theorem 4.2.9 (Dimension Theorem)**.** 假設 V, W 皆為 *vector space over* $\mathbb{F}$*,* 其中 V 為 *finite dimensional.* 若 $T : V \to W$ 為 *linear transformation* 則

$$\mathrm{rank}(T) + \mathrm{nullity}(T) = \dim(V).$$

Proof. 假設 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathsf{N}(T)$, 為 T 的 null space 的一組 basis. 因為 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ 在 V 中且為 linearly independent, 故由 Proposition 2.6.6 知存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ 使得 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 為 V 的一組 basis. 注意此時 $\mathrm{nullity}(T) = \dim(\mathsf{N}(T)) = n$ 且 $\dim(V) = m + n$. 我們要證明 $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)\}$ 會是 $\mathsf{R}(T)$ 的一組 basis.

首先證明 $\mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)) = \mathsf{R}(T)$. 由 Proposition 4.2.4, 我們知

$$\mathsf{R}(T) = \mathrm{Span}(T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n), T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)).$$

然而 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathsf{N}(T)$, 亦即 $T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$ 皆為 W 中的零向量, 故得

$$\mathsf{R}(T) = \mathrm{Span}(T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)).$$

接下來我們證明 $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)\}$ 為 linearly independent. 假設 $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)\}$ 不是 linearly independent, 亦即存在 $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{F}$ 不全為 0 使得 $c_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_m T(\mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$. 此時由 T 為 linear transformation 知 $T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdot + c_m\mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$, 因此得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdot + c_m\mathbf{v}_m \in \mathsf{N}(T)$. 然而 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ 為 $\mathsf{N}(T)$ 的 basis, 故存在 $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{F}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdot + c_m\mathbf{v}_m = d_1\mathbf{u}_1 + \cdot + d_n\mathbf{u}_n$, 故得

$$d_1\mathbf{u}_1 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n - c_1\mathbf{v}_1 - \cdots - c_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

然而 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 為 linearly independent, 故得 $d_1 = \cdots = d_m = c_1 = \cdots = c_m = 0$. 此與 $c_1, \ldots, c_m$ 不全為 0 相矛盾, 故得證 $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)\}$ 為 linearly independent.

既然 $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_m)\}$ 是 $\mathsf{R}(T)$ 的一組 basis, 我們有 $\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathsf{R}(T)) = m$, 故得證 $\mathrm{rank}(T) + \mathrm{nullity}(T) = \dim(V)$. □

前面提過對於一般的函數, 要探討是否為 onto 或是 one-to-one 並不容易. 而對於 linear transformation, 我們可以藉由求其 range 及 null space 這兩個 subspaces 來了解這些問題. 而 Dimension Theorem 告訴我們, 只要了解 range 及 null space 這兩個 subspaces 中其中一個, 就可以了解另一個了.

Question 4.11. 假設 V, W 皆為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\dim(V) = \dim(W)$. 若 $T : V \to W$ 為 *linear transformation,* 證明 T 是 *one-to-one* 若且唯若 T 為 *onto.*