我們得到了 3×3 matrix 的 determinant, 也因此由此可定義出 $\mathbb{R}^3$ 中三個向量所張成的平行六面體的 signed volume. 也就是說若將 $\mathbb{R}^3$ 上的三個向量 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 寫成 row vectors, 令矩陣 A 為 1-st, 2-nd, 3-rd row 依序為 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的 3×3 matrix, 則 $\det(A)$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 三個向量所張成的平行六面體的 signed volume. 其中 $\det(A)$ 的絕對值, 就是這平行六面體的體積. 而 $\det(A)$ 的正負號告訴我們 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量的方向性. 這裡 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量正反向我們是用所謂的 *right hand rule* (右手定則) 來區分, 意即將右手大拇指指向 $\mathbf{u}$ 的方向, 其餘四個指頭併攏指向 $\mathbf{v}$ 的方向, 若 $\mathbf{w}$ 位於手掌正面的方向則 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為正向, 反之為負向. 例如 $\mathbf{i}=(1,0,0),\mathbf{j}=(0,1,0),\mathbf{k}=(0,0,1)$ 我們定為正向 (因 $\det(I_3)=1>0$). 利用 Section 5.1 我們定的方向性規則, 可以知道 $\det(A)>0$ 時 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量為正向, 而 $\det(A)<0$ 時為負向.

給定 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$, 我們定義 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 的 *cross product* (外積) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 為

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(\det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix},\det\begin{bmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix},\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\right).$$

要注意, 千萬不要將內積和外積弄混了, 兩個向量之內積是一個實數, 而兩個向量之外積仍為向量. 另外 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ 是不相等的, 除非 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 這是因為兩個 row 交換其 determinant 會變號, 因此依定義 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. 而 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 何時會是 $\mathbf{0}$ 呢? 依定義 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 若且唯若 $\det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}=0$, 很容易知道這等同於 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)$ 為 linearly dependent.

現考慮 $\mathbf{u}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{v}=(b_1,b_2,b_3)$, $\mathbf{w}=(c_1,c_2,c_3)$ 我們有

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=c_1\det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}+c_2\det\begin{bmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix}+c_3\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\tag{5.3}$$

由於 $\det\begin{bmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{bmatrix}$ 式子 (5.3) 的右式又等同於將 $\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$ 對 3-rd row 展開的 determinant, 故得

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}-\mathbf{u}-\\ -\mathbf{v}-\\ -\mathbf{w}-\end{bmatrix}.\tag{5.4}$$

也就是說 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量所張成的平行六面體的 signed volume.

特別的, 當 $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ 或 $\mathbf{w}=\mathbf{v}$ 時, 由於 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 row vector 所形成的矩陣有兩個 row 相同, 所以其 determinant 為 0 (Lemma 5.2.2). 因此由式子 (5.4) 知 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$. 也就是說當 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為 linearly independent 時, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 同時會和 $\mathbf{u}$ 以及和 $\mathbf{v}$ 垂直. 而當 $\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, 我們有 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. 也就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的 signed volume 為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. 考慮 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體以 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形為底, 此時由於 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 以及和 $\mathbf{v}$ 垂直, 我們得 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ 就是此平行六面體的高. 因此由 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的體積 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$ 為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積乘上高 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, 得 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. 另外由於 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 所張成的平行六面體的 signed volume 為 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2>0$, 我們知 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 利用右手定則為正向. 最後我們將外積的性質歸納如下.

Theorem 5.3.3. 給定 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. 則 $\mathbf{u}\times\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ 若且唯若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為 *linearly independent.* 此時 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 的長度為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張的平行四邊形面積, 且 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 同時與 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 垂直, 又 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 利用右手定則為正向.

又假設 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}$, 則 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\neq 0$ 若且唯若 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 為 *linearly independent.* 此時 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 這三個向量所張成的平行六面體的 *signed volume.*

5.4. Existence of the Determinant Function

在上一節中, 我們利用降階的方法以及 2×2 matrix 的 determinant 的存在性建構了 3×3 matrix 的 determinant, 因而得到其存在性. 接著我們可利用 3×3 matrix 的 determinant 存在性得到 4×4 matrix 的 determinant 的存在性, 然後一直下去. 在本節中, 我們就是要用數學歸納法證明一般 $n\times n$ matrix 的 determinant 皆存在.

首先我們將 Definition 5.3.1 的定義推廣到一般的情形.

Definition 5.4.1. 假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ matrix. 將 A 的 i-th row 和 j-th column 除去所得的 $(n-1)\times(n-1)$ matrix, 稱為 A 的 (i,j) *minor matrix*, 用 A_{ij} 表示. 當 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 存在時, 令 $a'_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, 稱為 A 的 (i,j) cofactor.

現利用數學歸納法假設 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 存在, 對於 $n\times n$ matrix $A=[a_{ij}]$, 固定 $k\in\{1,\dots,n\}$, 我們考慮 A 對 k-th column 展開, 定義

$$\det(A)=a_{1k}a'_{1k}+a_{2k}a'_{2k}+\cdots+a_{nk}a'_{nk}.$$

我們要利用 $(n-1)\times(n-1)$ matrix 的 determinant 符合 determinant 所要求的四個性質來證明這樣定出 $n\times n$ matrix 的 determinant 也會符合這四個性質.

首先證明 $\det(I_n)=1$. 由於 I_n 的 k-th column 為 $\mathbf{e}_k$, 僅有在 k-th entry 為 1, 其餘位置為 0. 也就是說若令 $A=[a_{ij}]=I_n$, 則 $a_{ik}=0$ for $i\neq k$ 且 $a_{kk}=1$. 因此依定義我們有 $\det(I_n)=a_{kk}a'_{kk}=a'_{kk}$. 然而 $A=I_n$ 在 (k,k) 的 minor matrix 為 I_{n-1}, 因此得 $A=I_n$ 的 (k,k) cofactor 為 $a'_{kk}=(-1)^{k+k}\det(I_{n-1})=\det(I_{n-1})$. 但依 induction 的假設, $\det(I_{n-1})=1$, 故知 $a'_{kk}=1$, 得證 $\det(I_n)=1$.

接著檢查相鄰兩個 row 互換後 determinant 會變號. 假設 $A=[a_{ij}]$, 固定 $l\in\{1,\dots,n-1\}$, 假設將 A 的 l-th row 和 $l+1$-th row 交換所得的矩陣為 $B=[b_{ij}]$. 也就是說當 $i\neq l,l+1$ 時, $b_{ij}=a_{ij}$ 而 $b_{lj}=a_{l+1\,j}$, $b_{l+1\,j}=a_{lj}$. 因而我們有當 $i<l$ 時, B 的 (i,k) minor matrix B_{ik} 就是將 A 的 (i,k) minor matrix A_{ik} 相鄰的 $l-1$-th, l-th 兩個 row 交換 (此時依歸納假設 $\det(B_{ik})=-\det(A_{ik})$). 而當 $i>l+1$ 時, B_{ik} 就是將 A_{ik} 相鄰的 l-th, $l+1$-th 兩個 row 交換 (此時依歸納假設 $\det(B_{ik})=-\det(A_{ik})$). 又 B_{lk} 就是 $A_{l+1\,k}$ 且 $B_{l+1\,k}$ 就是 A_{lk}. 因此我們有 B 的 (i,k) cofactor b'_{ik} 為

$$(-1)^{i+k}\det(B_{ik})=\begin{cases}(-1)^{i+k}(-\det(A_{ik}))=-a'_{ik}, & \text{if } i\neq l \text{ and } i\neq l+1;\\ (-1)^{l+k}\det(A_{l+1\,k})=-a'_{l+1\,k}, & \text{if } i=l;\\ (-1)^{i+1+k}\det(A_{lk})=-a'_{lk}, & \text{if } i=l+1;\end{cases}$$

由此得證

$$\begin{array}{rcccccccccc} \det(B) & = & b_{1k}b'_{1k} & + \cdots + & b_{lk}b'_{lk} & + & b_{l+1k}b'_{l+1k} & + \cdots + & b_{nk}b'_{nk} \\ & = & a_{1k}(-a'_{1k}) & + \cdots + & a_{l+1k}(-a'_{l+1k}) & + & a_{lk}(-a'_{lk}) & + \cdots + & a_{nk}(-a'_{nk}) \\ & = & -\det(A) & & & & & & \end{array}$$

至於性質 (3), (4) 我們合併檢查, 即檢查 multi-linear 性質. 固定 $l \in \{1,\ldots,n-1\}$ 以及 $r \in \mathbb{R}$. 假設 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ 為 $n \times n$ matrices 滿足當 $i \neq l$ 時 $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$ 而 $a_{lj} = b_{lj} + rc_{lj}$. 當 $i < l$ 時, A 的 (i,k) minor matrix A_{ik} 的 $l-1$-th row 就是 B_{ik} 的 $l-1$-th row 加上 r 倍的 C_{ik} 的 $l-1$-th row (此時依歸納假設 $\det(A_{ik}) = \det(B_{ik}) + r\det(C_{ik})$). 而當 $i > l+1$ 時, A_{ik} 的 l-th row 就是 B_{ik} 的 l-th row 加上 r 倍的 C_{ik} 的 l-th row (此時依歸納假設 $\det(A_{ik}) = \det(B_{ik}) + r\det(C_{ik})$). 又 A_{lk} 等於 B_{lk} 且等於 C_{lk}. 因此我們有 A 的 (i,k) cofactor a'_{ik} 為

$$(-1)^{i+k}\det(A_{ik}) = \begin{cases} (-1)^{i+k}(\det(B_{ik}) + r\det(B_{ik}) = b'_{ik} + rc'_{ik}, & \text{if } i \neq l; \\ (-1)^{l+k}\det(B_{lk}) = (-1)^{l+k}\det(C_{lk}) = b'_{lk} = c'_{lk}, & \text{if } i = l; \end{cases}$$

由此得證

$$\begin{array}{rcccccccc} \det(A) & = & a_{1k}a'_{1k} & + \cdots + & a_{lk}a'_{lk} & + \cdots + & a_{nk}a'_{nk} \\ & = & b_{1k}(b'_{1k} + rc'_{1k}) & + \cdots + & (b_{lk} + rc_{lk})b'_{lk} & + \cdots + & b_{nk}(b'_{nk} + rc'_{nk}) \\ & = & b_{1k}b'_{1k} + rc_{1k}c'_{1k} & + \cdots + & b_{lk}b'_{lk} + rc_{lk}c'_{lk} & + \cdots + & b_{nk}b'_{nk} + rc_{nk}c'_{nk} \\ & = & \det(B) + r\det(C). & & & & \end{array}$$

我們證得了 det 的存在性, 再加上 Theorem 5.2.8 的唯一性, 我們有以下的結論.

Theorem 5.4.2. *存在唯一的函數* $\det : \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *滿足*

(1) $\det(I_n) = 1$.

(2) *若將* $n \times n$ *matrix* A *某相鄰兩個 row 交換所得的矩陣為* A', *則* $\det(A') = -\det(A)$.

(3) *若將* $n \times n$ *matrix* A *某個 row 乘上非零實數* r *所得的矩陣為* A', *則* $\det(A') = r\det(A)$.

(4) *若* A, B, C *三個* $n \times n$ *matrix, 其中* A *的* i*-th row 是* B *和* C *的* i*-th row 之和, 而* A, B, C *其他各 row 皆相等, 則* $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.

由於我們證得了對任意的 column 展開所得的 determinant 皆符合上述四項性質, 因此由唯一性得到對任意 column 展開所得的 determinant 之值皆會相同. 另外和 3×3 的情形相同, 由於 $\det(A^t) = \det(A)$, 我們也得到對任意 row 展開所得的 determinant 之值皆會相同. 因此我們有以下的結果.

Theorem 5.4.3. *假設* $A = [a_{ij}]$ *為* $n \times n$ *matrix. 令* a'_{ij} *為* A *的* (i,j) *cofactor, 則對任意* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *皆有* $\det(A) = a_{1k}a'_{1k} + a_{2k}a'_{2k} + \cdots + a_{nk}a'_{nk} = a_{k1}a'_{k1} + a_{k2}a'_{k2} + \cdots + a_{kn}a'_{kn}$.

Question 5.3. *對於* $n \times n$ *matrix* $A = [a_{ij}]$ *考慮* A *的 diagonal entry 展開, 即考慮*

$$a_{11}a'_{11} + a_{22}a'_{22} + \cdots + a_{nn}a'_{nn}.$$

試問這樣的展開方法會符合我們要求 determinant 的四項規則的哪幾項?

雖然我們利用 elementary row operations 的方法證明了 determinant 的唯一性, 又用降階的方法證明了 determinant 的存在性, 不過在計算 determinant 時, 這兩種方法都可混用. 一般來說用 row operation 或 column operation 來求 determinant 較快, 不過若發現有的 row 或 column 僅有一個不是 0 的 entry, 則對該 row 或 column 降階, 也可幫助我們較快算出 determinant. 我們看以下的例子.

Example 5.4.4. 我們求 $A=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\4&-2&7&8\end{bmatrix}$ 的 determinant. 首先觀察 A 的 1-st column 僅有兩個 entry 不為 0, 所以利用 1-st row 乘上 -2 加到 4-th row 得 $B=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$ (此時 $\det(A)=\det(B)$). 現因 B 的 1-st column 僅有一個非 0 entry, 我們對 1-st column 降階展開得 $\det(B)=2\det(C)$ 其中 C 為 B 的 $(1,1)$ minor matrix, 即 $C=\begin{bmatrix}2&1&2\\5&3&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$. 接著將 C 的 2-nd column 乘上 2 加到 3-rd column 得 $D=\begin{bmatrix}2&1&4\\5&3&9\\0&1&0\end{bmatrix}$ (此時 $\det(C)=\det(D)$). 最後對 D 的 3-rd row 展開得 $\det(D)=(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}2&4\\5&9\end{bmatrix}=2$. 故知 $\det(A)=\det(B)=2\det(C)=2\det(D)=4$.

5.5. Cramer's Rule and Adjoint Matrix

Determinant 不只可以幫助我們計算平行多面體的有向體積, 其實它也可以幫助我們解聯立方程組以及找到 invertible matrix 的反矩陣. 在這一節中, 由於和矩陣乘法有關, 所以所有向量皆用 column vector 表示.

首先考慮 $n\times n$ matrix $A=[a_{ij}]$ 對於 $j\in\{1,\ldots,n\}$ 令 $\mathbf{a}_j$ 表示 A 的 j-th column. 現對於 $\mathbb{R}^n$ 的一個 vector $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$, 對於任意 $k\in\{1,\ldots,n\}$, 考慮 C_k 為將 identity matrix I_n 的 k-th column 用 $\mathbf{c}$ 取代的 $n\times n$ matrix. 亦即當 $j\neq k$ 時, C_k 的 j-th column 為 $\mathbf{e}_j$, 而 C_k 的 k-th column 為 $\mathbf{c}$. 現考慮 AC_k, 依矩陣乘法的定義, 我們有

$$AC_k=\begin{bmatrix}|&&|\\\mathbf{v}_1&\cdots&\mathbf{v}_n\\|&&|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|&&c_1&&|\\\mathbf{e}_1&\cdots&\vdots&\cdots&\mathbf{e}_n\\|&&c_n&&|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|&&|&&|\\\mathbf{v}_1&\cdots&c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n&\cdots&\mathbf{v}_n\\|&&|&&|\end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

也就是說當 $j \neq k$ 時, AC_k 的 j-th column 為 $\mathbf{v}_j$, 而 AC_k 的 k-th column 為 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 現對於 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 若 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 亦即

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \tag{5.6}$$

因此若令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ matrix, 則結合式子 (5.5) (5.6), 我們有 $AC_k = B_k$. 因此由 determinant 的乘法性質 (Theorem 5.2.6 (2)), 得 $\det(A)\det(C_k) = \det(B_k)$. 然而對 C_k 的 k-th row 展開, 我們有 $\det(C_k) = c_k(-1)^{k+k}\det(I_{n-1}) = c_k$. 因此得證以下之定理.

Theorem 5.5.1. 假設 A 為 $n \times n$ *matrix* 且 $\mathbf{b} =\in \mathbb{R}^n$ 為 *column vector.* 對於 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 *k-th column* 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ *matrix.* 若 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 則 $c_k \det(A) = \det(B_k)$.

我們可以利用 Theorem 5.5.1 得到許多和解聯立方程組有關的性質. 首先若 $\det(A) \neq 0$, 表示 A 為 invertible, 我們知聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 一定有解且解唯一. 事實上此時由 Theorem 5.5.1 我們可以將此組解具體寫出. 這就是所謂的 *Cramer's Rule.*

Corollary 5.5.2 (Cramer's Rule)**.** 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix* 且 $\mathbf{b} =\in \mathbb{R}^n$ 為 *column vector.* 對於所有 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 *k-th column* 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ *matrix.* 則聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一的一組解, 且其解為

$$x_k = \frac{\det(B_k)}{\det(A)}, \forall k = 1, \ldots, n.$$

Proof. 由假設 A 為 invertible, 知 $\det(A) \neq 0$ 且 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有解 (且解唯一). 然而 Theorem 5.5.1 告訴我們如果聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 則其解 $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$ 需滿足 $c_k \det(A) = \det(B_k), \forall k = 1, \ldots, n$. 然而因 $\det(A) \neq 0$, 故由解的存在性知 $x_k = \det(B_k)/\det(A), \forall k = 1, \ldots, n$ 是唯一可能的一組解. □

Example 5.5.3. 考慮 Example 5.4.4 中的矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 令 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 前面已知 $\det(A) = 4 \neq 0$, 我們可用 Cramer's rule 解聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. 此時將 $\mathbf{b}$ 置換於 A 的 1-st column, 得 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 同理得 $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. 利用降階, 我們得 $\det(B_1) = 42$, $\det(B_2) = 12$,

$\det(B_3)=-16$, $\det(B_4)=-4$. 故由 Cramer's rule 知 $x_1=21/2$, $x_2=3$, $x_3=-4$, $x_4=-1$ 是聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 之唯一一組解. 若令 $C_1=\begin{bmatrix}21/2&0&0&0\\3&1&0&0\\-4&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$ 我們會有

$$AC_1=\begin{bmatrix}2&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\4&-2&7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21/2&0&0&0\\3&1&0&0\\-4&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3&5\\0&2&1&2\\0&5&3&3\\0&-2&7&8\end{bmatrix}=B_1.$$

同理若令

$$C_2=\begin{bmatrix}1&21/2&0&0\\0&3&0&0\\0&-4&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix},C_3=\begin{bmatrix}1&0&21/2&0\\0&1&3&0\\0&0&-4&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix},C_4=\begin{bmatrix}1&0&0&21/2\\0&1&0&3\\0&0&1&-4\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$

我們會有 $AC_2=B_2$, $AC_3=B_3$ 以及 $AC_4=B_4$.

至於當 A 不是 invertible 時 (即 $\det(A)=0$), Theorem 5.5.1 就無法幫助我們找出聯立方程組的解. 不過由於 $\det(A)=0$, 故利用 Theorem 5.5.1 知若 $x_1=c_1,\ldots,x_n=c_n$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解, 則 $\det(B_k)=c_k\det(A)=0$, $\forall k=1,\ldots,n$. 換言之, 若存在 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\det(B_k)\neq 0$, 則聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 就無解.

Corollary 5.5.4. *假設 A 為 $n\times n$ non-invertible matrix 且 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ 為 column vector. 對於所有 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 令 B_k 表示將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n\times n$ matrix. 若存在 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $\det(B_k)\neq 0$, 則聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 無解.*

要注意 Corollary 5.5.4 的反向並不成立. 也就是說當 A 不是 invertible 時, 若對所有 $k=1,\ldots,n$, 皆有 $\det(B_k)=0$, 那麼我們是無從判斷聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 是否有解的. 例如在 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 的情形很容易判斷 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 且 $\det(A)=\det(B_1)=\det(B_2)=\det(B_3)=0$. 而當 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 時, 很容易判斷 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 無解, 但此時仍有 $\det(A)=\det(B_1)=\det(B_2)=\det(B_3)=0$.

由上面這幾種情況可知, Cramer's rule 並不是有效處理聯立方程組的方法. 一般在處理特定的聯立方程組, 還是直接用 elementary row operations 處理較為快速. 不過在處理一般抽象的方程組問題時, Cramer's rule 因為可以具體描繪出解的形式, 所以是很有用的工具. 我們看以下的性質.

Proposition 5.5.5. *假設 $A=[a_{ij}]$ 為 $n\times n$ matrix 其中 $a_{ij}\in\mathbb{Z}$, $\forall i,j\in\{1,\ldots,n\}$. 若 $\det(A)=\pm1$, 則對於任意 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$, 其中 $b_i\in\mathbb{Z}$, $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解皆為整數.*

Proof. 由於 $\det(A) = \pm 1 \neq 0$, 利用 Cramer's rule 我們有聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解為 $x_1 = \pm\det(B_1), \ldots, x_n = \pm\det(B_n)$, 其中對任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$, B_k 為將 A 的 k-th column 用 $\mathbf{b}$ 取代的 $n \times n$ matrix. 由於 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ 且 $b_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. 我們知矩陣 B_k 的所有 entry 皆為整數. 利用 determinant 的定義, 我們知此時 $\det(B_k)$ 亦為整數, 得證聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解皆為整數. □

另外一個 Cramer's rule 的應用就是幫我們找到 invertible matrix 的 inverse. 假設 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 為 invertible 且 C 為 A 的 inverse, 則由 $AC = I_n$, 依矩陣乘法定義我們知 C 的 j-th column $\begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ 需滿足 $A \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$ 等於 I_n 的 j-th column $\mathbf{e}_j$. 也就是說 C 的 j-th column 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ 的解. 因此 C 的 (i, j)-th entry c_{ij} 應為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ 的解中 x_i 之值. 故由 Cramer's rule 知 $c_{ij} = \det(A(j,i))/\det(A)$, 其中 $A(j,i)$ 表示將 A 的 i-th column 用 $\mathbf{e}_j$ 取代的 $n \times n$ matrix. 然而利用對 $A(j,i)$ 的 i-th column 展開求 $\det(A(j,i))$, 我們得 $\det(A(j,i)) = (-1)^{j+1}\det(A_{ji}) = a'_{ji}$. 也就是說 c_{ij} 就是 A 的 (j,i) cofactor (注意 i, j 位置交換) 除以 $\det(A)$. 為了方便起見我們有以下的定義.

Definition 5.5.6. 假設 $A = [a_{ij}]$ 為 $n \times n$ matrix, 對於任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ 令 a'_{ij} 為 A 的 (i, j) cofactor. 考慮 $n \times n$ matrix A' 其 (i, j)-th entry 為 a'_{ij}. 我們稱 A' 為 A 的 *cofactor matrix* 而稱 A' 的 transpose $(A')^{\mathrm{t}}$ 為 A 的 *adjoint matrix*, 用 $\mathrm{adj}(A)$ 來表示.

注意 $\mathrm{adj}(A)$ 是將 A 的 cofactor 所成的矩陣 A' 取轉置而得, 千萬不要忘記取轉置. 另外要注意不管一個 $n \times n$ matrix 是否為 invertible, 皆可定義其 adjoint matrix.

我們回到剛才 A 為 invertible 的情況. 假設 C 為其 inverse. 依 $\mathrm{adj}(A)$ 的定義, 我們得到 C 的 (i, j)-th entry 就是 $\mathrm{adj}(A)$ 的 (i, j)-th entry 除以 $\det(A)$. 因此依矩陣係數積的定義, 我們有 $C = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$. 得證了以下的定理.

Proposition 5.5.7. 假設 A 為 $n \times n$ *invertible matrix.* 則

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A).$$

Example 5.5.8. 考慮 Example 5.4.4 中的矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. 在 Example 5.5.3 中我們解出 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ 的解, 事實上就是 A 的反矩陣 A^{-1} 的 1-st column. 在 Example 5.5.3 中的 $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 就是將 A 的 1-st column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,1)$. 若我們將 B_1 的 1-st column 展開求 $\det(B_1)$ 得 $\det(B_1) = (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 8 \end{bmatrix} = 42$ 就是 A 的 $(1,1)$

cofactor. 同樣的 $B_2=\begin{bmatrix}2&1&3&5\\0&0&1&2\\0&0&3&3\\4&0&7&8\end{bmatrix}$ 就是將 A 的 2-nd column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,2)$. 若我們將 B_2 的 2-nd column 展開求 $\det(B_2)$ 得 $\det(B_2)=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}0&1&2\\0&3&3\\4&7&8\end{bmatrix}=12$ 就是 A 的 $(1,2)$ cofactor. 同理得 B_3 是將 A 的 3-rd column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,3)$ 且 $\det(B_3)=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}0&2&2\\0&5&3\\4&-2&8\end{bmatrix}=-16$ 就是 A 的 $(1,3)$ cofactor. 而 B_4 是將 A 的 4-th column 用 $\mathbf{e}_1$ 取代所得的矩陣 $A(1,4)$ 且 $\det(B_4)=(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix}0&2&1\\0&5&3\\4&-2&7\end{bmatrix}=-4$ 就是 A 的 $(1,4)$ cofactor. 注意這裡求出的 cofactor 其實對應到 A 的 cofactor 所成的矩陣 A' 會是 A' 的 1-st row. 我們求出 A 其他的 cofactor 會有

$$a'_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}-1&3&5\\5&3&3\\-2&7&8\end{bmatrix}=-64,\quad a'_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}2&3&5\\0&3&3\\4&7&8\end{bmatrix}=-18,$$

$$a'_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}2&-1&5\\0&5&3\\4&-2&8\end{bmatrix}=20,\quad a'_{24}=(-1)^{2+4}\det\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&5&3\\4&-2&7\end{bmatrix}=10.$$

以及 $a'_{31}=26, a'_{32}=8, a'_{33}=-8, a'_{34}=-4, a'_{41}=-20, a'_{42}=-6, a'_{43}=8, a'_{44}=2$. 因此得

$$A'=\begin{bmatrix}42&12&-16&-4\\-64&-18&20&10\\-26&8&-8&-4\\-20&-6&8&2\end{bmatrix},\quad \operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}42&-64&-26&-20\\12&-18&8&-6\\-16&20&-8&8\\-4&10&-4&2\end{bmatrix}$$

也因此得

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}42&-64&-26&-20\\12&-18&8&-6\\-16&20&-8&8\\-4&10&-4&2\end{bmatrix}.$$

由上面例子可以看出利用 adjoint matrix 求反矩陣非常複雜, 所以在實際求反矩陣的情況還是利用從前學的 elementary row operation 的方法會比較快. 不過在證明抽象理論時, 利用 adjoint matrix 求 inverse 還是很有用的. 例如當 A 的每一個 entry 皆為整數時, 由於 $\operatorname{adj}(A)$ 的每一個 entry 也皆為整數, 因此若 $\det(A)=\pm1$, 則由 Proposition 5.5.7 我們有以下的結果.

Corollary 5.5.9. *假設 A 為 $n\times n$ matrix 其中 A 的每一個 entry 皆為整數. 若 $\det(A)=\pm1$, 則 A^{-1} 的每一個 entry 也皆為整數.*