Disjoint union topology 的概念也可以推廣到 X_1, X_2 有交集的情形. 此時我們可已將 X_1 想像成 $X_1' = \{(x,1) \mid x \in X_1\}$, 且將 X_2 想像成 $X_2' = \{(x,2) \mid x \in X_1\}$ 這樣的集合 (此時我們將 universal set X 換成 $X' = \{(x,i) \mid x \in X,\ i \in \{1,2\}\}$). 如此之下 X_1', X_2' 就沒有交集了, 我們因此定義 $X_1 \amalg X_2 = X_1' \sqcup X_2'$, 也稱之為 X_1, X_2 的 disjoint union. 由於 $X_1 \amalg X_2$ 這個 disjoint union 的定義與 X_1, X_2 是否相交無關, 且當 X_1, X_2 不相交時與 $X_1 \sqcup X_2$ 是一致的, 所以今後即使 X_1, X_2 不相交, 我們也都用 $X_1 \amalg X_2$ 表示 X_1, X_2 的 disjoint union.

要注意集合的 disjoint union 和我們以後要談的集合的 product 不同. 例如 $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 的元素是 $(r,1)$ 或 $(s,2)$, 其中 $r,s \in \mathbb{R}$; 而 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的元素是 (r,s), 其中 $r,s \in \mathbb{R}$. 我們可以將 $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 看成是坐標平面上兩條平行直線, 而 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是整個坐標平面, 兩者差異非常大.

Question 1.28. 考慮開區間 $I_1 = (-1,0)$, $I_2 = (0,1)$, $I_3 = (-0.5, 0.5)$. 試比較 $I_1 \cup I_2$, $I_1 \amalg I_2$, $I_1 \cup I_3$, $I_1 \amalg I_3$ 的差異性.

當 X_1 是 topological space 且 $\mathcal{T}_1$ 為其 topology, 我們也可將 $X_1' = \{(x,1) \mid x \in X_1\}$ 視為 topological space. 亦即若 $S \in \mathcal{T}_1$, 令 $S' = \{(s,1) \mid s \in S\}$, 此時考慮 $\mathcal{T}_1' = \{S' \mid S \in \mathcal{T}_1\}$, 很容易證得 $\mathcal{T}_1'$ 就會是 X_1' 的 topology. 而且很容易知道利用這個 topology, 函數 $f : X_1 \to X_1'$ 定義為 $f(x) = (x,1)$ 就會是一個一對一且映成的連續函數且為 open map, 亦即 f 是一個 homeomorphism. 也就是說 X_1 與 X_1' 是 homeomorphic, 我們可以將之視為是相同的拓樸空間. 同理若 X_2 為 topological space, 我們也將 X_2' 視為是和 X_2 相同的拓樸空間. 因此我們也利用 X_1', X_2' 的 disjoint union topology 得到 $X_1 \amalg X_2$ 的 topology. 為了方便, 我們就直接稱這個 topology 為 X_1, X_2 的 disjoint union topology. 又由於我們將 X_1, X_2 視為 $X_1 \amalg X_2$ 的 subset, 即 X_1', X_2', 所以前面 Proposition 1.4.5 及 Proposition 1.4.6 的結果都可以直接套用. 這裡我們將結果整理如下, 就不再證明了.

Proposition 1.4.7. 假設 X_1, X_2 是 *topological spaces,* 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為其 *topology.* 現考慮 $X = X_1 \amalg X_2$ 上的 *disjoint union topology* $\mathcal{T}$*,* 我們有以下之結果.

(1) X_1*,* X_2 使用 $\mathcal{T}$ 的 *subspace topology* 分別會是 $\mathcal{T}_1$*,* $\mathcal{T}_2$*.*

(2) 設 Y 為 *topological space.* 考慮

$$F = \{f \mid f : X \to Y \textit{ is continuous}\}, \quad F' = \{(f_1, f_2) \mid f_1 : X_1 \to Y,\ f_2 : X_2 \to Y \textit{ are continuous}\}$$

則 $f \mapsto (f|_{X_1}, f|_{X_2})$ 給了一個從 F 到 F' 上一個一對一且映成的對應關係.

Question 1.29. 考慮 $I_1 = (-1,0)$, $I_2 = (0,1)$, $I_3 = (-0.5, 0.5)$ 為 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology 的 subspaces. 試問 $I_1 \cup I_2$, $I_1 \cup I_3$ 使用 $\mathbb{R}$ 的 subspace topology, 而 $I_1 \amalg I_2$, $I_1 \amalg I_3$ 使用 disjoint topology, 這些 topological spaces 那些會是 homeomorphic?

最後我們附註說明一下, disjoint union topology 是可以推廣到多個 topological spaces 的情況, 其中的原理及性質與兩個的情況是一樣的, 我們就不再贅述了.

1.5. Product Space Topology and Quotient Space Topology

我們繼續介紹兩種製造新的 topological spaces 常用的方法. 其中 product space topology 常在拓展空間的維度時使用, 而 quotient space topology 常常在探討將一個拓樸空間上的一些點 "黏" 在一起時使用.

1.5.1. Product Space Topology. 假設 X_1, X_2 為集合, 我們定義它們的 *Cartesian product* $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. 有了 $X_1 \times X_2$ 我們自然有兩個 *projection* maps:

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \quad \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2,$$

其中 $\pi_1(x_1, x_2) = x_1, \pi_2(x_1, x_2) = x_2$, $\forall\,(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. 當 X_1, X_2 為 topological spaces, 我們可以定義 $X_1 \times X_2$ 上的 topology 使得 π_1, π_2 皆為 continuous function. $X_1 \times X_2$ 上使得這個成立最弱的拓樸就是 product space topology.

假設 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為 X_1, X_2 的 topology, 我們看看如何定 $X_1 \times X_2$ 的 topology 會使得 π_1, π_2 為 continuous. 依 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ 需連續的要求, 對於任意 X_1 上的 open set U, 我們必須要求 $\pi_1^{-1}(U) = U \times X_2$ 為 $X_1 \times X_2$ 的 open set. 同理對任意 X_2 的 opens set V, $\pi_2^{-1}(V) = X_1 \times V$ 也應是 $X_1 \times X_2$ 的 open set. 所以很自然的我們會收集 $\{U \times X_2 \mid U \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times V \mid V \in \mathcal{T}_2\}$, 不過這不會是一個 topology. 雖然 $X_1 \times X_2$ 和 $\emptyset$ 在這個集合內 (因為 $\emptyset \times X_2 = \emptyset$), 但是若 $U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2$, 則 $(U \times X_2) \cap (X_1 \times V) = U \times V$ 未必在此集合內, 也就是說這樣收集的 open sets 並不符合 topology 定義 (3) 的要求. 所以我們必須擴大我們收集的集合為 $\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$. 這樣一來當 $U, U' \in \mathcal{T}_1$, $V, V' \in \mathcal{T}_2$, 我們有 $(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$ 仍然在此集合中 (因 $U \cap U' \in \mathcal{T}_1$, $V \cap V' \in \mathcal{T}_2$). 不過此時雖然 topology 定義 (3) 的要求成立了, 但是定義 (2) 的要求仍有問題. 這是因為 $(U \times V) \cup (U' \times V')$ 未必可以寫成 $U'' \times V''$ 的形式. 所以我們還必須擴大我們的集合需包含 $U \times V$ 這樣形式的集合的聯集, 換言之我們需要的是以 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ 為 basis 的 topology.

Question 1.30. 假設 X, Y 為集合. 考慮 Cartesian product $X \times Y$.

(1) 試證明對任意 $S \subseteq X$, $S \times \emptyset = \emptyset$.

(2) 試證明若 $S, S' \subseteq X$, $T, T' \subseteq Y$, 則 $(S \times T) \cap (S' \times T') = (S \cap S') \times (T \cap T')$.

(3) 試找出例子 $S, S' \subseteq X$, $T, T' \subseteq Y$ 使得 $(S \times T) \cup (S' \times T')$ 無法寫成 $S'' \times T''$, $S'' \subseteq X$, $T'' \subseteq Y$ 的形式.

是否存在以 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ 為 basis 的 topology 呢? 並不是任意的集合都可以是某個 topology 的 basis, 回顧一下 Proposition 1.2.4 便是告訴我們可以形成一個 topology 的 basis 的充要條件. 然而 $X_1 \in \mathcal{T}_1$, $X_2 \in \mathcal{T}_2$, 所以 $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$, 因此 Proposition 1.2.4 條件 (1) 是符合的. 另外若 $S_1 = U \times V$, $S_2 = U' \times V'$ 皆在 $\mathcal{B}$ 中, 則由於 $S_1 \cap S_2 = (U \cap U') \times (V \cap V')$ 也在 $\mathcal{B}$ 中, 故 Proposition 1.2.4 條件 (2) 也符合. 因此會存在一個唯一的 $X_1 \times X_2$ 的 topology 是以 $\mathcal{B}$ 為 basis. 又因為如前面所述, 要使得 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ 以及 $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ 為 continuous, $\mathcal{B}$ 中的元素皆必須是 open set, 所

以這樣造出的 topology 會是 $X_1 \times X_2$ 上使得 π_1, π_2 皆為 continuous function 最弱的拓樸. 於是我們有以下的定義.

Definition 1.5.1. 假設 X_1, X_2 為 topological spaces 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為其 topology. 考慮以 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ 為 basis 所形成的 $X_1 \times X_2$ 的 topology, 我們稱此 topology 為 X_1, X_2 的 *product space topology.* $X_1 \times X_2$ 以 product space topology 形成的 topological space, 便稱為 X_1, X_2 的 *product space.*

Example 1.5.2. 考慮 $\mathbb{R}$ 為以使用 $d_1(x,x') = |x-x'|$ 為 metric 的 metric space, $\mathbb{R}^2$ 為以使用 $d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ 為 metric 的 metric space. 利用這兩個 topology, 很容易驗證 projection $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 為 continuous. 這是因為對於所有實數 $r < s$ 開區間 $\{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}$ 形成 $\mathbb{R}$ 的 basis, 而

$$\pi_1^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < x < s, y \in \mathbb{R}\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的 open set. 事實上令 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < x < s, y \in \mathbb{R}\}$, 對 S 中任意一點 $p(x,y) \in S$, 考慮 $\lambda = \min\{x-r, s-x\} > 0$, 則 p 在以 p 為圓心半徑為 λ 的開圓 $B(p;\lambda)$ 內且 $B(p;\lambda) \subseteq S$. 故由 metric space topology 的定義知 S 是 $\mathbb{R}^2$ 的 open set.

同樣的 projection $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 也是 continuous. 所以由 product space topology 的定義知 $\mathbb{R}^2$ 看成 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 product space topology 是弱於其 metric space topology. 也就是說 $\mathbb{R}^2$ 使用 product space topology 上的 open set 也會是 metric space topology 上的 open set. 不過這裏我們要說的是, 事實上這兩個拓樸是相同的, 也就是說 $\mathbb{R}^2$ 的 metric space topology 上的 open set 也會是 product space topology 上的 open set. 這是因為對 $\mathbb{R}^2$ 上任意的開圓 $B(p,\lambda)$ 內一點 $q(x,y)$, 由於 $d_2(p,q) < \lambda$ 我們可以取 $\varepsilon > 0$ 夠小 (例如 $\varepsilon < (\lambda - d_2(p,q))/\sqrt{2}$) 使得 $I_1 \times I_2$ 包含於 $B(p,\lambda)$ 中, 其中 I_1, I_2 分別為開區間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. 也就是說 $\mathbb{R}^2$ 中 metric space topology 的 basis 的元素 (即開圓) 都可以寫成 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 product space topology 的 basis 中一些元素的聯集, 這說明了 metric space topology 的 open set 就是 product space topology 的 open set, 所以這兩個拓樸是相同的.

Question 1.31. 試說明 $\mathbb{R}^2$ 中任意的矩形內部一點皆可以用該點為圓心做一個包含於該矩形內部的圓, 並依此說明 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 使用 product space topology 的 open set 就是 $\mathbb{R}^2$ 中使用 metric space topology 的 opens set.

Product space topology 主要是讓 projection maps 為 continuous. 現若 Z 為 topological space, 而 $X_1 \times X_2$ 為 topological spaces X_1, X_2 的 product space, 給定一函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 我們可得到兩個函數 $g_1 : Z \to X_1$ 和 $g_2 : Z \to X_2$, 其中 $g_1 = \pi_1 \circ g$, $g_2 = \pi_2 \circ g$. 因為使用 product space topology, 所以 π_1, π_2 是 continuous. 故如果 g 為 continuous, 由 Proposition 1.3.4 知 g_1, g_2 皆為 continuous.

Question 1.32. 設 Z 為 topological space, 而 $X_1 \times X_2$ 為 topological spaces X_1, X_2 的 product space. 若函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 為 open map, 是否 $g_1 = \pi_1 \circ g$, $g_2 = \pi_2 \circ g$ 亦為 open map?

接下來我們要說明, 前面所提的, 反過來也是對的, 即 product space topology 幫我們將兩個定義域相同的連續函數連結成一個連續函數. 也就是說如果 Z, X_1, X_2 皆為 topological spaces, 且 $g_1 : Z \to X_1, g_2 : Z \to X_2$ 為連續函數, 我們可利用 X_1, X_2 的 product space $X_1 \times X_2$, 得到一個新的函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 其定義為: $g(z) = (g_1(z), g_2(z))$, $\forall z \in Z$. 很容易看出 g 是 well-defined function, 這個函數通常我們會用 $g_1 \times g_2$ 來表示, 不過這裡為了符號的方便性, 我們暫時用 g 來表示. 要探討 g 是否連續, 由 Proposition 1.3.3, 我們只需了解 product space $X_1 \times X_2$ 的 basis 的元素 $U \times V$ (其中 U, V 分別為 X_1, X_2 的 open set) 是否會使得 $g^{-1}(U \times V)$ 為 Z 的 open set. 事實上 $g^{-1}(U \times V)$ 會等於 $g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$. 這是因為 $z \in g^{-1}(U \times V)$ 等同於 $g(z) = (g_1(z), g_2(z)) \in U \times V$, 亦即 $g_1(z) \in U$ 且 $g_2(z) \in V$, 即 $z \in g_1^{-1}(U)$ 且 $z \in g_2^{-1}(V)$. 得證 $g^{-1}(U \times V) = g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$. 現由於 g_1, g_2 為 continuous, 故知 $g_1^{-1}(U), g_2^{-1}(V)$ 皆為 Z 的 open set, 故 $g^{-1}(U \times V) = g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$ 為 Z 的 open set, 得證 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 為 continuous. 我們有以下的定理.

Proposition 1.5.3. 假設 Z, X_1, X_2 是 *topological spaces,* 現考慮 X_1, X_2 的 *product space* $X_1 \times X_2$. 若 $g_1 : Z \to X_1$, $g_2 : Z \to X_2$ 為 *continuous,* 則存在 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 為 *continuous,* 滿足 $g_1 = \pi_1 \circ g$, $g_2 = \pi_2 \circ g$.

Question 1.33. 設 Z 為 topological space, 而 $X_1 \times X_2$ 為 topological spaces X_1, X_2 的 product space. 若函數 $g_1 : Z \to X_1$, $g_2 : Z \to X_2$ 皆為 open map. 在 Proposition 1.5.3 中所得的函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 是否為 open map? (Hint: 考慮 X_1, X_2, Z 為 $\mathbb{R}$ 且 g_1, g_2 為 identity map 的情況.)

Proposition 1.5.3 是 product space 重要的性質, 我們常用以下的圖示來表達這個性質:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "g"] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\
& X_1 \times X_2 \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & X_2 \\
& X_1 &
\end{tikzcd}$$

這樣的圖示, 我們稱之為 *commutative diagram.*

從前面的討論我們知道若令 $X = X_1 \times X_2$, 考慮

$$G = \{g \mid g : Z \to X \text{ is continuous}\},\ G' = \{(g_1, g_2) \mid g_1 : Z \to X_1,\ g_2 : Z \to X_2 \text{ are continuous}\}$$

則 $g \mapsto (\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g)$ 給了一個從 G 到 G' 上一個對應關係. 很容易看出這個對應關係是一對一的, 因為若 $g, g' \in G$ 且 $g \neq g'$, 則表示存在 $z \in Z$ 使得 $g(z) \neq g'(z)$ in $X_1 \times X_2$. 也就是說 $(\pi_1(g(z)), \pi_2(g(z))) \neq (\pi_1(g'(z)), \pi_2(g'(z)))$. 而 Proposition 1.5.3 告訴我們這個對應也是映成的, 因此我們有以下的結果.

Corollary 1.5.4. 假設 Z, X_1, X_2 是 *topological spaces,* 現考慮 X_1, X_2 的 *product space* $X = X_1 \times X_2$. 令

$$G = \{g \mid g : Z \to X \textit{ is continuous}\},\ G' = \{(g_1, g_2) \mid g_1 : Z \to X_1,\ g_2 : Z \to X_2 \textit{ are continuous}\}$$

則 $g \mapsto (\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g)$ 給了一個從 G 到 G' 上一個一對一且映成的對應關係.

Question 1.34. 試說出 Proposition 1.4.7 和 Corollary 1.5.4 有關連續函數的性質的差異. 並試著畫出有關 Proposition 1.4.7 的 commutative diagram.

Product space 的概念可以推廣到兩個以上的 topological spaces 的情況. 例如當 X_1, X_2, X_3 是 topological spaces 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ 分別為其 topology, 我們可以定 product space $X_1 \times X_2 \times X_3$ 其 topology 為以 $\{U \times V \times W \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2, W \in \mathcal{T}_3\}$ 為 basis 的 topology. 事實上我們可以定義任意多個 topological spaces 的 product space. 當 I 是 index set, 且對任意 $i \in I$, X_i 為 topological space 及 $\mathcal{T}_i$ 為其 topology, 我們定義它們的 product space 為 $\prod_{i\in I} X_i$. 不過這裡要注意, 它的 topology 的 basis 並不是以 $\mathcal{B}' = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$ 為 basis 的 topology. 而是以

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i, \text{ and } U_i = X_i \text{ for almost all } i \in I\}$$

為 basis 的 topology. 這裡 $U_i = X_i$ for almost all $i \in I$ 意指幾乎所有的 $i \in I$ 都要求 $U_i = X_i$, 更明確的說法是除了有限多個 (但不規定是那些個) $U_i \in \mathcal{T}_i$ 可以不是 X_i 外, 其餘的 U_i 皆需為 X_i. 為何會這樣呢? 首先大家需了解, 當 I 為 finite set 時, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. 也就是說在談有限多個 topological spaces 的 product space 時, 以 $\mathcal{B}'$ 或 $\mathcal{B}$ 為 basis 所得的 topology 是一樣的. 但是當 I 是 infinite set 時, $\mathcal{B}'$ 的元素遠比 $\mathcal{B}$ 會多得多, 也就是說當談論無限多個 topological spaces 的 product space 時, 以 $\mathcal{B}'$ 為 basis 所得的 topology 會比以 $\mathcal{B}$ 為 basis 所得的 topology 強得多. 回顧一下當初我們定 product space topology 時要求的是 $\prod_{i\in I} X_i$ 上最弱的拓樸使得對任意 $j \in I$, projection map $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ 是 continuous. 也因此對於 $U_j \in \mathcal{T}_j$ (即 U_j 為 X_j 的 open set) 我們要求 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 為 $\prod_{i\in I} X_i$ 的 open set. 不過 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 其實是在 j 的位置是 U_j, 其他的 $i \in I$ 的位置皆為 X_i 的 subset. 這樣的 subset 無法保持拓樸中有限多個的交集仍為這樣形式的 subset, 所以我們必須要求有限多個 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 這樣的 subset 的交集仍為 open set. 這樣的交集就是僅有有限多個 $j \in I$ 的位置不是 X_j, 其他 $i \in I$ 的位置皆為 X_i 這樣形式的 subset. 因此僅需加入如 $\mathcal{B}$ 中的元素這樣的 subsets, 便足以利用 Proposition 1.2.4, 使得 $\mathcal{B}$ 為某個 topology 的 basis. 所以請記住, 當 I 為 infinite set 時, product space 的 basis 應為 $\mathcal{B}$ 這樣的集合. 另外多個 topological spaces 的 product space 也會有類似 Proposition 1.5.3 的性質, 請大家自行推廣.

Excecise 1.14. 假設 X_1, X_2 為 topological spaces 且 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 分別為其 basis. 試證明 $\{S \times T \mid S \in \mathcal{B}_1, T \in \mathcal{B}_2\}$ 為 product space $X_1 \times X_2$ 的 basis.

Excecise 1.15. 假設 X_1, X_2 為 topological spaces. 考慮 product space $X_1 \times X_2$. 證明 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ 皆為 open map.

Excecise 1.16. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology, 以及 $S = \{1, 2\}$ 使用 discrete topology. 試證明 $\mathbb{R} \times S$ 使用 product space topology 以及 $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 使用 disjoint union topology 是 homeomorphic.

Excecise 1.17. 假設 I 是 index set, 且對任意 $i \in I$, X_i 為 topological space 及 $\mathcal{T}_i$ 為其 topology.

(1) 令 $\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i,\text{ and } U_i = X_i \text{ for almost all } i \in I\}$, 試證明 $\mathcal{B}$ 符合 Proposition 1.2.4 中, 可成為某個 topology 的 basis 的條件.

(2) 考慮 $\prod_{i\in I} X_i$ 上的 product space topology, 試推廣 Proposition 1.5.3.