Example 1.5.10. 當 X 為 topological space, X_1, X_2 為 X 的 open set. 考慮 $X_1 \cup X_2$ 為 X 的 subspace (使用 subspace topology). 我們也可考慮 X_1, X_2 的 disjoint union $X_1 \amalg X_2$, 考慮其 disjoint union topology. 我們有函數 $f_1 : X_1 \to X_1 \cup X_2$, 定義為 $f_1(x) = x$, $\forall\, x \in X_1$. 我們還有函數 $f_2 : X_2 \to X_1 \cup X_2$, 定義為 $f_2(x) = x$, $\forall\, x \in X_2$. 由於 f_1, f_2 皆為 continuous, 由 Proposition 1.4.7, 我們得到一個連續函數 $f : X_1 \amalg X_2 \to X_1 \cup X_2$, 滿足 $f|_{X_1} = f_1$, $f|_{X_2} = f_2$. 函數 f 事實上也會是 open map, 這是因為 $X_1 \amalg X_2$ 的 open set 可表為 $U_1 \amalg U_2$, 其中 U_1, U_2 分別為 X_1, X_2 的 open set. 因此由 $f(U_1 \amalg U_2) = U_1 \cup U_2$, 知 $f(U_1 \amalg U_2)$ 為 $X_1 \cup X_2$ 的 open set.

現考慮 $X_1 \amalg X_2$ 上的一個 equivalence relation $\sim$, 其定義為對任意 $i, j \in \{1, 2\}$, $(x, i) \sim (y, j)$ 若且唯若 $x = y$. 也就是說一般來說若 $x \in X_1$ (resp. $x \in X_2$) 則有 $(x, 1) \sim (x, 1)$ (resp. $(x, 2) \sim (x, 2)$). 而若 $x \in X_1 \cap X_2$, 則除了 $(x, 1) \sim (x, 1)$ 且 $(x, 2) \sim (x, 2)$ 外, 還有 $(x, 1) \sim (x, 2)$. 很容易驗證這是 $X_1 \amalg X_2$ 的一個 equivalence relation. 現考慮 quotient space $(X_1 \amalg X_2)/\sim$. 由於當 $(x, i) \sim (x, j)$ 時, 我們有 $f(x, i) = f(x, j) = x$, 故由 f 是 continuous 以及 Proposition 1.5.8, 我們得到一函數 $h : ((X_1 \amalg X_2)/\sim) \to X_1 \cup X_2$ 滿足 $f = h \circ q$, 其中 h 為 continuous. 又因 f 是 open map, 故由 Exercise 1.19 知 h 亦為 open map. 最後我們很容易檢查 h 為 one-to-one 以及 onto, 得知 $X_1 \cup X_2$ 和 $(X_1 \amalg X_2)/\sim$ 這兩個 topological space 事實上是 homeomorphic.

Question 1.39. 假設 X, Y 為 topological space, X_1, X_2 為 X 的 open set. 對於 X_1, X_2 的 disjoint union $X_1 \amalg X_2$, 考慮其 disjoint union topology. 今有兩連續函數 $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ 滿足 $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X_1 \cap X_2$. 試找到 $X_1 \amalg X_2$ 上的 equivalence relation $\sim$, 以及一函數 $f : ((X_1 \amalg X_2)/\sim) \to Y$ 滿足 $f\big(\overline{(x, i)}\big) = f_i(x)$, $\forall\, i \in \{1, 2\}, x \in X_i$, 並證明 f 為 continuous, 其中 $(X_1 \amalg X_2)/\sim$ 使用 quotient space topology. 試說明此結果與 Proposition 1.4.4 的關係.

內部, 外部以及邊界

給定一個 topological space X 後, 我們知道 X 的 open sets 和 closed sets 有哪些, 還能再談論甚麼呢? 事實上有了 topology 後, 對於一個既非 open 也非 closed 的子集合, 仍然有許多有趣的性質可以討論. 在這一章, 我們主要的便是探討何謂一個集合的內部, 外部以及邊界. 本章內容雖然大部分都是一些名詞, 不過希望大家能著重於了解這些名詞的意義. 以便將來遇見這些名詞時能掌握其特性, 進而能運用這些名詞處理一些拓樸的性質.

2.1. The Interior of a Set

Interior 是內部的意思. 在這節中, 我們將說明一個 topological space 中的子集合, 何謂其內部, 以及其相關的性質. 我們也會介紹何謂一個集合的外部, 及其相關性質. 希望大家對這些名詞的定義與性質, 有較直觀的看法, 而不是單純的記憶.

在 $\mathbb{R}$ 上使用 standard topology, 何謂閉區間 $[1,2]$ 內部呢? 直覺上, 我們會認為是開區間 $(1,2)$. 這是因為若 $a \in (1,2)$, 表示 a“旁邊”的點都在 $[1,2]$ 中, 所以感覺 a 在 $[1,2]$ 的內部, 然而若 $a = 1$ 或 $a = 2$, 則 a 的“旁邊”有些點不在 $[1,2]$ 中, 所以它們不該算 $[1,2]$ 的內部. 這裡的“旁邊”指的是甚麼呢? 事實上若 $a \in (1,2)$, 即 $1 < a < 2$, 若令 $\varepsilon = \min\{a-1, 2-a\} > 0$, 則 $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 且 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [1,2]$. 這裡 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上的點就是我們說 a 點的附近, 也就是 a 的一個 open neighbor hood. 當然了這個 open neighborhood 可大可小, 不過若找到一個 a 的 open neighborhood 包含於 $[1,2]$, 則比它小的 open neighborhood 也會包含於 $[1,2]$. 所以我們可以這樣說: 在 $[1,2]$ 中的點如果可以找到一個 open neighborhood 包含於 $[1,2]$ 就稱為 $[1,2]$ 的“內點”.

現在我們回到一般的 topological space X. 我們曾經提到, 若 $a \in X$, 且 U 是包含 a 的 open set, 便稱 U 為 a 的 open neighborhood. 基於以上的看法, 我們有以下的定義.

Definition 2.1.1. 假設 X 為 topological space, $S \subseteq X$. 對於 $a \in S$, 若存在 a 的一個 open neighborhood U 滿足 $U \subseteq S$, 則稱 a 為 S 的一個 *interior point*. 所有 S 的 interior points 所成的集合稱之為 S 的 *interior*, 我們用 $\operatorname{int}(S)$ 來表示 (有的書用 $\mathring{S}$ 來表示).

要注意即使 $S \neq \emptyset$, $\mathrm{int}(S)$ 有可能會是 $\emptyset$. 例如在 $\mathbb{R}$ 考慮 standard topology 時, 當 $a \in \mathbb{R}$, $S = \{a\}$ 時, $\mathrm{int}(S)$ 就是 $\emptyset$. 又若 X 考慮 indiscrete topology, 則因 X 是唯一非空的 open set, 所以任何不等於 X 的子集合 S 其 interior 皆為空集合. 另外要注意若 X' 是 X 的 subspace 且 $S \subseteq X'$ 則 S 看成 X 的子集合的 interior 和看成 X' 的子集合的 interior 有可能不同. 例如 $[1,2]$ 用 $\mathbb{R}$ 的 subspace topology 來看 $[1,2]$ 的 interior 就是 $[1,2]$ 而不是 $(1,2)$. 所以在討論 interior 時需說明清楚所在的 topological space 為何.

Question 2.1. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. $S \subseteq \mathbb{R}$ 為 finite set. 試問 $\mathrm{int}(S)$ 為何? 又 $\mathrm{int}(\mathbb{N})$ 為何?

接下來我們看一些有關 interior 的簡單性質.

Lemma 2.1.2. 考慮 *topological space* X 以及 S, T 為 X 子集合, 我們有以下的性質.

(1) 假設 S 為 X 的 *open set,* 則 $\mathrm{int}(S) = S$. 特別地, 我們有 $\mathrm{int}(X) = X$ 以及 $\mathrm{int}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 若 $S \subseteq T$, 則 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$.

(3) 假設 S 為 X 的 *open set,* 則 $S \subseteq T$ 若且唯若 $S \subseteq \mathrm{int}(T)$.

Proof. 首先注意, 依 interior 的定義, 我們知道 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$.

(1) 要證明 $\mathrm{int}(S) = S$, 我們僅要說明 $S \subseteq \mathrm{int}(S)$, 即可. 現依假設 S 為 X 的 open set. 對任意 $a \in S$, S 皆為 a 的 open neighborhood 且滿足 $S \subseteq S$, 故依定義 a 為 S 的一個 interior point, 得 $a \in \mathrm{int}(S)$. 得證 $S = \mathrm{int}(S)$. 又因 X 為 X 的 open set, 故得 $\mathrm{int}(X) = X$. 同理 $\mathrm{int}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 假設 $S \subseteq T$. 現任取 $a \in \mathrm{int}(S)$, 即存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \subseteq S$. 因 $S \subseteq T$, 故得 $U \subseteq T$. 因此得證 a 亦為 T 的 interior point, 即 $a \in \mathrm{int}(T)$. 得證 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$.

(3) 已知 S 為 X 的 open set. 現若 $S \subseteq T$ 由 (1), (2) 知 $S = \mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$. 反之若 $S \subseteq \mathrm{int}(T)$, 則因 $\mathrm{int}(T) \subseteq T$, 得證 $S \subseteq T$.

□

Question 2.2. Lemma 2.1.2 (3) 中的若且唯若, 哪一個方向不需用到 S 為 X 的 open set 這個假設?

Lemma 2.1.2 (1) 告訴我們當 S 是 open 時 $\mathrm{int}(S) = S$, 因此此時 $\mathrm{int}(S)$ 會是 X 的 open set. 然而在一般的情形 $\mathrm{int}(S)$ 會是 open 嗎? 要回答這個問題, 我們必需看看 $\mathrm{int}(S)$ 可否寫成一些 X 的 open sets 的聯集. 然而對任意 $x \in \mathrm{int}(S)$, 皆存在 X 的 open set U_x 滿足 $U_x \subseteq S$. 因此我們自然會考慮這些 U_x 的聯集, 即考慮

$$U = \bigcup_{x \in \mathrm{int}(S)} U_x.$$

因為對任意 $x \in \operatorname{int}(S)$ 皆有 $x \in U_x$, 故知 $\operatorname{int}(S) \subseteq U$. 另一方面對任意 $x \in \operatorname{int}(S)$ 皆有 $U_x \subseteq S$, 故知 $U \subseteq S$. 也因此由 U 為 open 以及 Lemma 2.1.2 (3) 得知 $U \subseteq \operatorname{int}(S)$. 我們證得了 $U = \operatorname{int}(S)$, 故得 $\operatorname{int}(S)$ 是 X 的 open set. 事實上我們有以下關於 interior 的等價性質.

Theorem 2.1.3. 假設 X 為以 $\mathcal{T}$ 為 *topology* 的 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) $\operatorname{int}(S)$ 是所有包含於 S 的 *open sets* 的聯集. 亦即
$$\operatorname{int}(S) = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} | U \subseteq S\}} U.$$

(2) $\operatorname{int}(S)$ 是所有包含於 S 的 *open sets* 裡最大的 *open set.* 亦即 $\operatorname{int}(S) \in \mathcal{T}$ 且若 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $U \subseteq S$, 則 $U \subseteq \operatorname{int}(S)$.

Proof. 為了方便起見我們令 $V = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} | U \subseteq S\}} U$. 現若 $x \in \operatorname{int}(S)$, 表示存在 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $x \in U$ 且 $U \subseteq S$, 故 $x \in V$. 證得 $\operatorname{int}(S) \subseteq V$. 反之, 若 $x \in V$, 表示存在 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $U \subseteq S$ 使得 $x \in U$. 因此知 $x \in \operatorname{int}(S)$. 因此 $V \subseteq \operatorname{int}(S)$. 證明了 $V = \operatorname{int}(S)$, 即 (1) 成立.

至於 (2), 由 (1) 我們知 $\operatorname{int}(S)$ 為 open set. 又已知 $\operatorname{int}(S) \subseteq S$. 也就是說 $\operatorname{int}(S)$ 是一個包含於 S 的 open set. 現若 $U \subseteq S$, 且為 open set, 則由 (1) 得 $U \subseteq \operatorname{int}(S)$. □

注意 Theorem 2.1.3 也告訴我們若 W 為 X 的 open set 滿足 $W \subseteq S$ 且對任意滿足 $U \subseteq S$ 的 open set 皆有 $U \subseteq W$, 則 $W = \operatorname{int}(S)$. 這是因為 $\operatorname{int}(S)$ 為滿足 $\operatorname{int}(S) \subseteq S$ 的 open set, 故 $\operatorname{int}(S) \subseteq W$. 反之, W 亦為滿足 $W \subseteq S$ 的 open set, 故由 Theorem 2.1.3 (2) 知 $W \subseteq \operatorname{int}(S)$. 因此得證 $W = \operatorname{int}(S)$.

當 S 為 open 時, 當然 S 本身是包含於 S 最大的 open set, 故由 Theorem 2.1.3, 我們知道此時 $S = \operatorname{int}(S)$. 反之, 若 $S = \operatorname{int}(S)$, 則由於 $\operatorname{int}(S)$ 為 open set, 故得 S 為 open set. 也就是說 S 為 open 等價於 $S = \operatorname{int}(S)$. 至於對於一般的集合 S, 因為 $\operatorname{int}(S)$ 為 open, 故依此結果可得 $\operatorname{int}(\operatorname{int}(S)) = \operatorname{int}(S)$. 我們證得了以下結果.

Corollary 2.1.4. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) S 是 X 的 *open set* 若且唯若 $S = \operatorname{int}(S)$.

(2) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(S)) = \operatorname{int}(S)$.

談論了內部, 我們當然也可談何謂外部. 依定義, 一個集合外部的點應該是和該集合不相交的, 而且它“附近”的點也和該集合不相交. 因此我們有以下的定義.

Definition 2.1.5. 假設 X 為 topological space, $S \subseteq X$. 對於 $a \notin S$, 若存在 a 的一個 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 則稱 a 為 S 的一個 *exterior point.* 所有 S 的 exterior points 所成的集合稱之為 S 的 *exterior*, 我們用 $\operatorname{ext}(S)$ 來表示.

依 exterior 的定義, $x \in \operatorname{ext}(S)$ 的點皆須滿足 $x \notin S$, 即 $x \in S^c$, 所以我們知 $\operatorname{ext}(S) \subseteq S^c$. 另外對於任意 $x \in \operatorname{ext}(S)$, 皆存在 x 的 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 即 $U \subseteq S^c$.

所以 S 的 exterior 其實就是 S^c 的 interior. 也就是說

$$\mathrm{ext}(S) = \mathrm{int}(S^c). \tag{2.1}$$

因此利用 interior 的性質, 我們有以下之結果.

Proposition 2.1.6. 假設 X 為以 $\mathcal{T}$ 為 *topological space* 且 S, T 為 X 子集合.

(1) S 是 *closed* 若且唯若 $\mathrm{ext}(S) = S^c$.

(2) 若 $S \subseteq T$, 則 $\mathrm{ext}(T) \subseteq \mathrm{ext}(S)$.

(3) $\mathrm{ext}(S)$ 是所有與 S 不相交的 *open sets* 的聯集. 亦即

$$\mathrm{ext}(S) = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} | U \cap S = \emptyset\}} U.$$

(4) $\mathrm{ext}(S)$ 是所有與 S 不相交的 *open sets* 裡最大的 *open set.* 亦即 $\mathrm{ext}(S) \in \mathcal{T}$ 且若 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 則 $U \subseteq \mathrm{ext}(S)$.

Question 2.3. 試證明 Proposition 2.1.6.

要注意, 雖然 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{int}(S)$ 但是 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$ 並不會等於 $\mathrm{ext}(S)$. 事實上由於 $\mathrm{ext}(S) \subseteq S^c$, 所以由 Proposition 2.1.6 (2), 我們有 $\mathrm{ext}(S^c) \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$. 再由式子 (2.1), 知 $\mathrm{ext}(S^c) = \mathrm{int}((S^c)^c) = \mathrm{int}(S)$, 因此推得

$$\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S)). \tag{2.2}$$

或許你會認為外部的外部等於內部, 即 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S)) = \mathrm{int}(S)$, 不過這是錯的. 這是因為雖然 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$ 是 open set, 但是一般來說 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$ 不一定會包含於 S (參見以下 Question 2.4), 所以我們無法得到 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S)) \subseteq \mathrm{int}(S)$, 也就是說 $\mathrm{int}(S)$ 未必會等於 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$.

Question 2.4. 考慮 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology. 利用 Question 2.1 以及任意非空的 open interval (r, s) 必有有理數及無理數在其中, 證明 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. 又試問甚麼會是 $\mathrm{ext}(\mathbb{Q})$ 呢? 依此結論說明 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(\mathbb{Q})) \neq \mathrm{int}(\mathbb{Q})$.

Excecise 2.1. 假設 $\mathcal{B}$ 是 topological space X 的一個 basis. 若 $S \subseteq X$. 試證明 $a \in \mathrm{int}(S)$ 若且唯若存在 $B \in \mathcal{B}$ 滿足 $a \in B$ 且 $B \subseteq S$. 並依此證明

$$\mathrm{int}(S) = \bigcup_{\{B \in \mathcal{B} | B \subseteq S\}} B.$$

Excecise 2.2. 假設 X 為 topological space 且 $X' \subseteq X$. 考慮 X' 上的 topology 為 X 的 subspace topology. 假設 $S \subseteq X'$, 我們令 $\mathrm{int}_X(S)$ 為 S 使用 X 的 topology 所得的 interior, 而令 $\mathrm{int}_{X'}(S)$ 為 S 使用 X' 的 topology 所得的 interior.

(1) 證明 $\mathrm{int}_X(S) \subseteq \mathrm{int}_{X'}(S)$.

(2) 試找到一個例子說明 $\mathrm{int}_X(S) = \mathrm{int}_{X'}(S)$ 未必成立.