2.2. The Closure of a Set

一個集合的 closure 意指和這個集合“非常靠近”的點所成的集合. 在這節中我們介紹 closure 的概念, 我們將發現 closure 和 interior 以及 exterior 是息息相關的.

在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 中, 那些點會和半開半閉的區間 $[1,2)$ 非常靠近呢? 當然了 $[1,2)$ 本身的點和自己是非常靠近的. 還有一個點, 就是 2 也和 $[1,2)$ 非常靠近. 這是因為任何包含 2 的 open interval 一定會和 $[1,2)$ 相交, 所以我們可以認定它與 $[1,2)$ 非常靠近. 除此之外, 其他的點都在 $[1,2)$ 的外部 (即 exterior), 我們都認為和 $[1,2)$ 有一段距離.

現在回到一般的 topological space X. 假設 $S \subseteq X$. 對於 X 的一點 a, 如果任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$, 那麼我們就視為 a 和 S 很靠近. 因此有以下的定義.

Definition 2.2.1. 假設 X 為 topological space, $S \subseteq X$. 對於 $a \in X$, 若任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$, 則稱 a 為 S 的 *closure point* (或是 *adherent point*). 所有 S 的 closure points 所成的集合稱之為 S 的 *closure*, 我們用 $\mathrm{cl}(S)$ 來表示 (有的書用 $\overline{S}$ 來表示).

要注意 S 的 closure 是要考慮所有宇集 X 上與 S 相當靠近的點, 所以考慮的宇集不同, 所得的 closure 有可能會相異, 另外如同 interior 的情況, 使用不同的 topology 所得的 closure 也會不同. 所以在討論 closure 時仍需說明清楚所在的 topological space 為何.

很有趣的, closure 和 interior 有著相對應的性質. 對於底下介紹有關 closure 的性質, 大家可以和前一節有關 interior 的性質相對照. 首先我們看和 Lemma 2.1.2 相對應的性質.

Lemma 2.2.2. *考慮 topological space X 以及 S,T 為 X 子集合, 我們有以下的性質.*

(1) 假設 S 為 X 的 *closed set,* 則 $\mathrm{cl}(S) = S$. 特別地, 我們有 $\mathrm{cl}(X) = X$ 以及 $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 若 $S \subseteq T$, 則 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$.

(3) 假設 T 為 X 的 *closed set,* 則 $S \subseteq T$ 若且唯若 $\mathrm{cl}(S) \subseteq T$.

Proof. 首先注意, 若 $x \in S$, 任何 x 的 open neighborhood U, 皆滿足 $x \in U \cap S$, 因此 $U \cap S \neq \emptyset$. 故依 closure 的定義, 我們得 $x \in \mathrm{cl}(S)$. 因此 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$.

(1) 要證明 $\mathrm{cl}(S) = S$, 我們僅要說明 $\mathrm{cl}(S) \subseteq S$, 即可. 現依假設 S 為 X 的 closed set, 亦即 S^c 為 open. 所以我們反過來證明 $S^c \subseteq \mathrm{cl}(S)^c$. 若 $x \in S^c$, 由 S^c 是 open 知存在 x 的 open neighborhood 滿足 $U \subseteq S^c$, 亦即 $U \cap S = \emptyset$. 故依定義 x 不是 S 的 closure point, 即 $x \in \mathrm{cl}(S)^c$. 我們證明了 $S^c \subseteq \mathrm{cl}(S)^c$, 故得 $\mathrm{cl}(S) \subseteq S$, 也因此得證 $S = \mathrm{cl}(S)$. 又因 X 為 X 的 closed set, 故得 $\mathrm{cl}(X) = X$. 同理 $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 假設 $S \subseteq T$. 現任取 $a \in \mathrm{cl}(S)$, 即對於所有 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$. 因 $S \subseteq T$, 故得 $U \cap T \neq \emptyset$. 因此得證 a 亦為 T 的 closure point, 即 $a \in \mathrm{cl}(T)$. 得證 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$.

(3) 已知 T 為 X 的 closed set. 現若 $S \subseteq T$ 由 (1), (2) 知 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T) = T$. 反之若 $\mathrm{cl}(S) \subseteq T$, 則因 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 得證 $S \subseteq T$.

□

Question 2.5. 一般來說, 可否由 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$ 推導出 $S \subseteq T$ 呢? 可否由 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$ 推導出 $S \subseteq T$ 呢?

Lemma 2.2.2 (1) 告訴我們當 S 是 closed 時 $\mathrm{cl}(S) = S$, 因此此時 $\mathrm{cl}(S)$ 會是 X 的 closed set. 然而在一般的情形 $\mathrm{cl}(S)$ 會是 closed 嗎? 要回答這個問題, 我們可以試著將 $\mathrm{cl}(S)$ 寫成一些 X 的 closed sets 的交集. 事實上我們有以下和 Theorem 2.1.3 相對應的性質.

Theorem 2.2.3. *假設 X 為以 $\mathcal{T}$ 為 topology 的 topological space 且 S 為 X 子集合.*

(1) $\mathrm{cl}(S)$ *是所有包含 S 的 closed sets 的交集. 亦即*

$$\mathrm{cl}(S) = \bigcap_{\{Z^c \in \mathcal{T} \mid S \subseteq Z\}} Z.$$

(2) $\mathrm{cl}(S)$ *是所有包含 S 的 closed sets 裡最小的 closed set. 亦即 $\mathrm{cl}(S)$ 是 closed 且若 Z 是 closed 滿足 $S \subseteq Z$, 則 $\mathrm{cl}(S) \subseteq Z$.*

Proof. 為了方便起見我們令 $C = \bigcap_{\{Z^c \in \mathcal{T} \mid S \subseteq Z\}} Z$. 由於這裡每個 Z 皆為 closed 且滿足 $S \subseteq Z$, 故知 C 是 closed 且滿足 $S \subseteq C$. 因此利用 Lemma 2.2.2 (3), 我們得 $\mathrm{cl}(S) \subseteq C$. 至於 $C \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 我們用反證法處理 (因為 open set 較易處理), 也就是說如果 $x \notin \mathrm{cl}(S)$, 我們要說明 $x \notin C$. 然而 $x \notin \mathrm{cl}(S)$ 表示存在 x 的 open neighborhood U, 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 亦即 $U \subseteq S^c$, 也等同 $S \subseteq U^c$. 這告訴我們存在著一個 closed set U^c 它滿足 $S \subseteq U^c$ 但 $x \notin U^c$ (因 $x \in U$), 所以得證 $x \notin C$. 我們證明了 $C = \mathrm{cl}(S)$, 即 (1) 成立.

至於 (2), 由 (1) 我們知 $\mathrm{cl}(S)$ 為 closed set. 又已知 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$. 也就是說 $\mathrm{cl}(S)$ 是一個包含 S 的 closed set. 現若 $S \subseteq Z$, 且為 closed set, 則由 (1) 得 $\mathrm{cl}(S) = C \subseteq Z$. □

注意 Theorem 2.2.3 也告訴我們若 C 為 X 的 closed set 滿足 $S \subseteq C$ 且對任意滿足 $S \subseteq Z$ 的 closed set Z 皆有 $C \subseteq Z$, 則 $C = \mathrm{cl}(S)$. 這是因為 $\mathrm{cl}(S)$ 為滿足 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$ 的 closed set, 故 $C \subseteq \mathrm{cl}(S)$. 反之, C 亦為滿足 $S \subseteq C$ 的 closed set, 故由 Theorem 2.2.3 (2) 知 $\mathrm{cl}(S) \subseteq C$. 因此得證 $C = \mathrm{cl}(S)$.

Question 2.6. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 為何不談論包含於 S 最大的 closed set, 以及包含 S 最小的 open set 呢? (試著考慮 $X = \mathbb{R}$, 而 S 為半閉半開的區間 $[1,2)$ 的情形.)

當然了 Corollary 2.1.4 也有相對應的結果, 由於證明的方法相同, 這裡就不再證明了.

Corollary 2.2.4. *假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合.*

(1) *S 是 X 的 closed set 若且唯若 $S = \mathrm{cl}(S)$.*

(2) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S)$.

Question 2.7. 試證明 Corollary 2.2.4.

Closure 和 interior 有許多相對應的性質, 事實上 closure 和 exterior 的關係更密切. 由於 $\mathrm{ext}(S)$ 是 open set 且 $\mathrm{ext}(S) \subseteq S^c$, 我們得到 $\mathrm{ext}(S)^c$ 是 closed 且 $S = (S^c)^c \subseteq \mathrm{ext}(S)^c$. 所以由 Theorem 2.2.3 (2), 我們推得 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{ext}(S)^c$. 另一方面, 若 $x \in \mathrm{ext}(S)^c$, 表示 $x \notin \mathrm{ext}(S)$, 亦即對所有 x 的 open neighborhood U, 皆不滿足 $U \subseteq S^c$, 也就是說 $U \cap S \neq \emptyset$, 得證 $x \in \mathrm{cl}(S)$. 我們證明了以下定理.

Proposition 2.2.5. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合. 則

$$\mathrm{cl}(S) = \mathrm{ext}(S)^c = \mathrm{int}(S^c)^c.$$

Question 2.8. 有的參考書籍是用 Proposition 2.2.5 的式子定為 closure 的定義. 試利用 Proposition 2.2.5 證明 Lemma 2.2.2, Theorem 2.2.3 以及 Corollary 2.2.4.

和 closure 有關的概念就是 dense (稠密) 的概念. 我們說集合 S 在 X 是稠密的, 顧名思義這表示所有 X 上的點都和 S 很靠近, 亦即對任意 $x \in X$ 以及 x 任意的 open neighborhood 皆和 S 有交集. 也就是說 $X = \mathrm{cl}(S)$. 因此我們有以下的定義.

Definition 2.2.6. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 若 $\mathrm{cl}(S) = X$, 則稱 S is *dense* in X, 也稱 S 是 X 的一個 *dense set.*

Question 2.9. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology, 試證明 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一個 dense set.

Question 2.10. 在 discrete topological space 中的 dense set 有哪些? 在 indiscrete topological space 中的 dense set 有哪些?

2.3. The Boundary of a Set

介紹了一個集合的內部以及外部, 我們就可以談論何謂其“邊界”了. 如何定義一個集合的邊界呢? 照理說一個集合邊界應該很靠近這個集合內的點也很靠近這個集合外的點. 所以我們有以下的定義.

Definition 2.3.1. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 對於 $a \in X$, 若任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$ 以及 $U \cap S^c \neq \emptyset$, 則稱 a 為 S 的 *boundary point.* 所有 S 的 boundary points 所成的集合稱之為 S 的 *boundary,* 我們用 $\mathrm{bd}(S)$ 來表示 (有的書用 ∂S 來表示).

依此定義當 a 是 S 的 boundary point, 所有 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$ 表示 a 應是 S 的 closure point (即 $a \in \mathrm{cl}(S)$) 而所有 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S^c \neq \emptyset$ 表示不存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \subseteq S$ (否則 $U \cap S^c = \emptyset$), 也就是說 a 不會是 S 的 interior point (即 $a \notin \mathrm{int}(S)$). 因此我們得 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$. 又因為 $\mathrm{cl}(S) = \mathrm{ext}(S)^c$, 所以

$$\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \cap \mathrm{int}(S)^c = \mathrm{ext}(S)^c \cap \mathrm{int}(S)^c = X \setminus (\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)).$$

我們有以下定理.

Proposition 2.3.2. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合, 則

$$\mathrm{bd}(S)=\mathrm{cl}(S)\setminus\mathrm{int}(S)=X\setminus(\mathrm{ext}(S)\cup\mathrm{int}(S)).$$

Proposition 2.3.2 告訴我們 $\mathrm{bd}(S)\cap\mathrm{int}(S)=\emptyset$. 又由於 $\mathrm{int}(S)\subseteq\mathrm{cl}(S)$,

$$\mathrm{bd}(S)\cup\mathrm{int}(S)=(\mathrm{cl}(S)\cap\mathrm{int}(S)^c)\cup\mathrm{int}(S)=\mathrm{cl}(S)\cup\mathrm{int}(S)=\mathrm{cl}(S).$$

換句話說, 我們可以將 $\mathrm{cl}(S)$ 寫成 $\mathrm{bd}(S)$ 以及 $\mathrm{int}(S)$ 的 disjoint union, 也就是說將 $\mathrm{cl}(S)$ 分割成 S 的邊界與內部兩部分. 同理我們也可把 X 寫成 $\mathrm{int}(S)$, $\mathrm{ext}(S)$ 以及 $\mathrm{bd}(S)$ 這三個集合的 disjoint union. 也就是說我們可以將整個拓樸空間 X 分割成 S 的內部, 外部與邊界三部分.

Question 2.11. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 證明 $\mathrm{bd}(S)=\mathrm{cl}(S)\cap\mathrm{cl}(S^c)$.

注意, 即使 S 不等於 X 其 boundary 有可能是 X. 因為 $\mathrm{bd}(S)=\mathrm{cl}(S)\setminus\mathrm{int}(S)$, 所以 $\mathrm{bd}(S)=X$ 等價於 $\mathrm{cl}(S)=X$ 且 $\mathrm{int}(S)=\emptyset$. 也就是說當 S 在 X 是 dense 且 S 的內部是空集合時, S 的 boundary 就會是整個 X. 例如在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下, 我們有 $\mathrm{bd}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$. 另外 $\mathrm{bd}(S)$ 也有可能是 $\emptyset$. 此時表示 $\mathrm{cl}(S)=\mathrm{int}(S)$, 但 $\mathrm{int}(S)\subseteq S\subseteq\mathrm{cl}(S)$, 故這等同於 $S=\mathrm{cl}(S)=\mathrm{int}(S)$. 由於 $\mathrm{cl}(S)$ 是 closed, 而 $\mathrm{int}(S)$ 是 open, 因此我們知道 $\mathrm{bd}(S)=\emptyset$ 等價於 S 是 open 且是 closed. 這種既是 open 又是 closed 的集合, 有的書會稱之為 *clopen set.*

以下我們列出一些有關 boundary 的性質, 希望大家不要光記憶其結果, 而是多了解其實質意義.

Proposition 2.3.3. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) $\mathrm{bd}(S)$ 是 X 的 *closed set.*

(2) $\mathrm{bd}(S)=\mathrm{bd}(S^c)$.

(3) S 是 X 的 *closed set* 若且唯若 $\mathrm{bd}(S)\subseteq S$.

(4) S 是 X 的 *open set* 若且唯若 $\mathrm{bd}(S)\cap S=\emptyset$.

Proof. 因為 $\mathrm{cl}(S)$ 是 closed 而 $\mathrm{int}(S)$ 是 open, 故由 $\mathrm{bd}(S)=\mathrm{cl}(S)\setminus\mathrm{int}(S)$ 得知 $\mathrm{bd}(S)$ 是 closed, 即 (1) 成立. 至於 (2) 因為 $\mathrm{ext}(S)=\mathrm{int}(S^c)$, 故由

$$\mathrm{bd}(S)=X\setminus(\mathrm{ext}(S)\cup\mathrm{int}(S))=X\setminus(\mathrm{int}(S^c)\cup\mathrm{int}(S))=X\setminus(\mathrm{int}(S^c)\cup\mathrm{int}((S^c)^c))=\mathrm{bd}(S^c),$$

得證 (2) 成立.

至於 (3), 若 S 是 closed, 此時 $\mathrm{cl}(S)=S$ 故 $\mathrm{bd}(S)=\mathrm{cl}(S)\setminus\mathrm{int}(S)=S\setminus\mathrm{int}(S)\subseteq S$. 反之, 如果 $\mathrm{bd}(S)\subseteq S$ 表示 $\mathrm{cl}(S)=\mathrm{bd}(S)\cup\mathrm{int}(S)\subseteq S$ (因為 $\mathrm{int}(S)\subseteq S$). 再由 $S\subseteq\mathrm{cl}(S)$ 得 $\mathrm{cl}(S)=S$, 因此得證 S 是 closed (Corollary 2.2.4).

最後我們處理 (4). 若 S 是 open, 則由 Lemma 2.1.2 知 $\mathrm{int}(S)=S$, 此時 $\mathrm{bd}(S)=\mathrm{cl}(S)\setminus\mathrm{int}(S)=\mathrm{cl}(S)\setminus S$ 因此 $\mathrm{bd}(S)\cap S=\emptyset$. 反之, 若 $\mathrm{bd}(S)\cap S=\emptyset$, 表示 $S\subseteq\mathrm{bd}(S)^c=$

$\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)$, 因此由 $S \cap \mathrm{ext}(S) = \emptyset$ 得 $S \subseteq (\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)) \cap S = \mathrm{int}(S)$. 再由 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$ 得 $\mathrm{int}(S) = S$, 因此得證 S 是 open (Corollary 2.1.4). □

要注意的是若 $S \subseteq T$, $\mathrm{bd}(S)$ 未必包含於 $\mathrm{bd}(T)$. 雖然我們有 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$ 但是因為 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$, 所以 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$ 未必會包含於 $\mathrm{bd}(T) = \mathrm{cl}(T) \setminus \mathrm{int}(T)$. 例如在 $\mathbb{R}$ 中考慮 standard topology, 開區間 $(1,2)$ 包含於開區間 $(0,3)$, 但是 $(1,2)$ 的 boundary 為 $\{1,2\}$ 並不包含於 $(0,3)$ 的 boundary $\{0,3\}$. 當然了在特殊狀況之下這會對, 例如 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$, 而我們確實有 $\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$. 不過有趣的是 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 但我們卻有 $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$. 它們成立的原因如下.

Proposition 2.3.4. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合. 則

$$\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S), \quad \mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S).$$

Proof. 由於 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{int}(S)$ 且 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 故

$$\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \setminus \mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = \mathrm{bd}(S).$$

同理由於 $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S)$ 且 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))$, 故

$$\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)) \subseteq \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = \mathrm{bd}(S).$$

□

要注意一般來說 $\mathrm{bd}(S)$ 未必等於 $\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S))$. 從 Proposition 2.3.4 的證明我們看出來, 問題出自於 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(S))$ 未必等於 $\mathrm{cl}(S)$. 例如在 $\mathbb{R}$ 中考慮 standard topology, 此時 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ 且 $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, 因此 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathbb{Q})) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ 不等於 $\mathrm{cl}(\mathbb{Q})$. 同樣的, $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S))$ 也未必等於 $\mathrm{bd}(S)$, 理由是 $\mathrm{int}(S)$ 未必等於 $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))$. 例如 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ 就不等於 $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathbb{Q})) = \mathrm{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Question 2.12. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. 試寫下以下的集合: $\mathrm{bd}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{bd}(\mathrm{int}(\mathbb{Q}))$, $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(\mathbb{Q}))$, $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathbb{Q}))$ 以及 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathbb{Q}))$.

另外要注意的是不像 interior 和 closure 我們有 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{int}(S)$, $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S)$; $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$ 未必等於 $\mathrm{bd}(S)$. 理由是 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$, 然而因 $\mathrm{bd}(S)$ 是 closed, 我們有

$$\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{bd}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(S) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)).$$

這裡 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(S))$ 有可能不是空集合 (參見 Question 2.12), 所以我們有 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$ 但未必 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$ 會等於 $\mathrm{bd}(S)$. 不過 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$ 就會等於 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$. 我們有以下之結果.

Proposition 2.3.5. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合. 則

$$\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S), \quad \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)).$$

Proof. 由於 $\mathrm{bd}(S)$ 是 closed, 故由 Proposition 2.3.3 (3) 知 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$. 接下來, 我們要說明 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$.

首先由於 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$ 是 closed, 我們有

$$\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \mathrm{cl}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))).$$

現由於 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$, 要證明 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$, 等同於要證明 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \emptyset$. 然而因 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$, 我們有 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S))$. 另一方面 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$, 因此得 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) \cap \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$. 然而, $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) = \emptyset$, 得證 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \emptyset$. 故知 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$. □

Excecise 2.3. 假設 X 為 topological space 且 $S_1, \ldots, S_n$ 為 X 的 subsets. 證明

$$\mathrm{cl}(S_1 \cup \cdots \cup S_n) = \mathrm{cl}(S_1) \cup \cdots \cup \mathrm{cl}(S_n).$$

Excecise 2.4. 假設 X 為 topological space 且 $X' \subseteq X$. 考慮 X' 上的 topology 為 X 的 subspace topology. 假設 $S \subseteq X'$, 我們令 $\mathrm{cl}_X(S)$ 為 S 使用 X 的 topology 所得的 closure, 而令 $\mathrm{cl}_{X'}(S)$ 為 S 使用 X' 的 topology 所得的 closure. 證明 $\mathrm{cl}_{X'}(S) = X' \cap \mathrm{cl}_X(S)$.

Excecise 2.5. 假設 X 為 topological space 且 $S \subseteq X$. 試證明 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{int}(S)$ 若且唯若 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) = \emptyset$. 依此說明當 S 是 closed 時, 其邊界是沒有內部的 (即 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) = \emptyset$) 並證明若 S 是 closed, 則 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(S)$.