拓樸導論

李華介

國立台灣師範大學數學系

前言

本講義希望簡單介紹同學拓樸學的概念. 所需要的基本知識僅簡單的集合概念與相關性質，不過對於抽象的數學表達及論證方式必須有足夠的理解 (以上皆可參見數學導論講義).

本講義雖然主要以中文撰寫, 不過當涉及定義或專有名詞時, 為免翻譯的困擾將以英文取代. 因此將以中英夾雜較不傳統的方式顯現, 若有不便請見諒.

本講義編寫費時, 編寫完後並未經過嚴謹的校對. 疏漏在所難免, 雖不至於有理論性上嚴重的錯誤, 但讀者仍應注意不宜概括全收. 若發現錯誤, 歡迎提出寶貴的意見.

Chapter 1

Topological Spaces

拓樸學簡單來說就是將我們熟悉的實數上的連續函數概念推廣到更一般的狀況 (即所謂的 Topological Space 拓樸空間), 探討一般抽象的拓樸空間經由連續函數作用後那些性質不會改變 (或會改變).

在一個集合中知道了那些子集合是 open sets, 我們便可定義在這些集合間的“連續函數”. 規定好一個集合的 open sets 有哪些後, 我們便稱這個集合是一個 topological space.

我們將介紹 topological space 及其上的連續函數的定義和基本性質, 然後介紹 subspace 的概念.

1.1. Standard Topology on $\mathbb{R}$

以後我們會知道在實數線上是可以定義許多種的 topology. 這裡我們先回顧大家所熟悉的一種, 所謂的 standard topology, 以便進一步了解抽象 topology 的意義.

首先我們回顧實數上的連續函數的定義. 這裡我們假設大家對於此定義已非常了解, 就不再說明此定義的意義了.

Definition 1.1.1. 考慮函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 若 $a\in\mathbb{R}$, 我們稱 f is a continuous function at a (在 a 點連續) 如果對任意的 $\epsilon>0$ 皆存在 $\delta>0$ 使得當 $|x-a|<\delta$ 時皆滿足 $\left|f(x)-f(a)\right|<\epsilon$. 特別的, 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上的每一點皆連續, 則稱 f is a continuous function on $\mathbb{R}$.

這個大家熟悉的定義, 我們可以將它用集合的方式表達. 其中 $|x-a|<\delta$ 可用 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 這個開區間來表示, 而 $\left|f(x)-f(a)\right|<\epsilon$ 就可用 $f(x)\in(f(a)-\epsilon,f(a)+\epsilon)$ 來表示. 所以 Definition 1.1.1 的後面我們可改寫成: 對所有 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 皆滿足 $f(x)\in(f(a)-\epsilon,f(a)+\epsilon)$. 我們甚至可以利用有關函數的 image 以及 inverse image 的寫法將它寫成集合的形式. 首先我們回顧一下, 函數的 image 以及 inverse image 的定義.

給定一個 function $f:X\to Y$ 以及 X 的 subset A, 所謂 A 在 f 的作用之下所得 image 就是收集 A 中的元素代入 f 後所得元素的集合. 我們用 $f(A)$ 來表示, 也就是說 $f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$. 特別的, the image of X under f, 即 $f(X)$ 稱為 f 的 *range* (值域). 從

$f(A)$ 的定義, 我們知道 $f(A)$ 是對應域 Y 的 subset. 這個定義很直接, 很容易讓人理解這個元素的組成元素. 不過它卻不容易掌握, 主要是很難描繪其元素. 另外要注意的是, 有的同學可能會誤解 $f(a) \in f(A)$ 表示 $a \in A$. 其實這在邏輯上是錯誤的, 因為有可能有元素 $b \notin A$ 但是 $f(b) \in f(A)$. 關於 $f(A)$ 一個比較好的寫法是, 直接將 $f(A)$ 裡的元素看成是 Y 中的元素. 也就是考慮 $y \in f(A)$, 表示存在 $a \in A$ 使得 $y = f(a)$. 反之, 若 $y \in A$ 且存在 $a \in A$ 使得 $y = f(a)$ 依定義就表示 $y \in f(A)$. 所以 $f(A)$ 有另一個等價的定義是

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A, y = f(a)\}.$$

這個定義感覺較不自然, 不過反而比較容易讓我們掌握 $f(A)$ 的元素.

接下來, 我們來探討所謂的 inverse image. 簡單來說, 給定一個 function $f : X \to Y$ 以及 Y 的 subset C, 所謂 C 在 f 的作用之下所得 inverse image 就是收集那些經由 f 會落在 C 中的元素所成的集合. 我們用 $f^{-1}(C)$ 來表示, 也就是說 $f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$. 從 $f^{-1}(C)$ 的定義, 我們知道 $f^{-1}(C)$ 是定義域 X 的 subset. 這個 inverse image 的定義已充分描繪其元素, 所以我們可以直接利用這個定義處理 inverse image 的性質.

利用函數的 image 以及 inverse image 我們得到以下有關連續性的另一寫法.

Proposition 1.1.2. 考慮函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且設 $a \in \mathbb{R}$. 以下敘述是等價的.

(1) *f is a continuous function at a*

(2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $f\Big((a-\delta, a+\delta)\Big) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$.

(3) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得 $(a-\delta, a+\delta) \subseteq f^{-1}\Big((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)\Big)$.

Question 1.1. 試證明 Proposition 1.1.2. (你看得出來 (2) $\Leftrightarrow$ (3) 嗎?)

對任意兩相異實數 r, s, 若 $r < s$, 我們稱集合 $(r, s) = \{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}$ 為一個 *open interval* (開區間). 所以 $(a-\delta, a+\delta)$ 就可以說是一個包含 a 的 open interval, 而 $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ 就是一個包含 $f(a)$ 的 open interval. 不過要注意 Proposition 1.1.2 (2) 看起來是說一個包含 a 的 open interval 皆可經由 f 傳送到一個包含 $f(a)$ 的 open interval. 不過事實並非如此, 因為在 Proposition 1.1.2 (2) 中, 我們事先任取 ϵ 再由這個 ϵ 找出 δ, 這個順序很重要. 也就是說 ϵ 是關於對應域中一個包含 $f(a)$ 的 open interval, 而 δ 是關於對應域中一個包含 a 的 open interval. 我們是要先在對應域中任取一個包含 $f(a)$ 的 open interval $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$, 再由它找到定義域中一個包含 a 的 open interval $(a-\delta, a+\delta)$ 使得 $f\Big((a-\delta, a+\delta)\Big) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$. 這裡弄清楚了, 我們就可得到以下的結論.

Corollary 1.1.3. 考慮函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且設 $a \in \mathbb{R}$. 以下敘述是等價的.

(1) *f is a continuous function at a.*

(2) 任取一個包含 $f(a)$ 的 *open interval* I 皆可找到一個包含 a 的 *open interval* J 使得 $f(J) \subseteq I$.

(3) 任取一個包含 $f(a)$ 的 *open interval* I 皆可找到一個包含 a 的 *open interval* J 使得 $J \subseteq f^{-1}(I)$.

Proof. 我們將證明 (1) $\Leftrightarrow$ (3), 其他的證明就當作習題囉!

(1) $\Rightarrow$ (3): 假設 f is a continuous function at a. 任取一個包含 $f(a)$ 的 open interval $I = (r,s)$, 由於 $f(a) \in I$, 故 $r < f(a) < s$. 此時令 $\epsilon = \min\{f(a)-r, s-f(a)\}$. 由 Proposition 1.1.2 ((1) $\Rightarrow$ (3)) 知存在 $\delta > 0$ 使得 $(a-\delta, a+\delta) \subseteq f^{-1}\big((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)\big)$. 故若令 $J = (a-\delta, a+\delta)$, 則 J 是一個包含 a 的 open interval 且滿足

$$J \subseteq f^{-1}\big((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)\big) \subseteq f^{-1}(I).$$

(3) $\Rightarrow$ (1): 我們要證明 Proposition 1.1.2 (3) 成立. 現任取 $\epsilon > 0$, 由於 $I = (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ 是一個包含 $f(a)$ 的 open interval, 故由假設知可找到一個包含 a 的 open interval $J = (r,s)$ 使得 $J \subseteq f^{-1}(I)$. 由於 $r < a < s$, 若令 $\delta = \min\{a-r, s-a\}$, 則可得 $\delta > 0$ 且滿足

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq J \subseteq f^{-1}(I) = f^{-1}\big((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)\big).$$

□

Question 1.2. 試利用上面的證明方法證明 Corollary 1.1.3 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

觀察 Proposition 1.1.2 和 Corollary 1.1.3, 其實我們是用到了關於 open interval 一個重要的特點. 也就是說任取一個包含 a 的 open interval $I = (r,s)$ 我們都可找到一個 $\gamma > 0$ 使得 $(a-\gamma, a+\gamma) \subseteq I$ (令 $\gamma = \min\{a-r, s-a\}$ 即可). 其實這樣的特點並不是只有 (r,s) 這樣的 open interval 才有. 例如 $(2,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ 以及 $(-2,1) \cup (3,5)$ 這些集合都有這樣的性質. 因此我們有以下的定義.

Definition 1.1.4. 假設 $S \subseteq \mathbb{R}$ 滿足對所有 $a \in S$ 皆存在 $\gamma > 0$ 使得 $(a-\gamma, a+\gamma) \subseteq S$, 則稱 S 為一個 *open set.* 又若 $a \in \mathbb{R}$ 且 $S \subseteq \mathbb{R}$ 是一個包含 a 的 open set, 則稱 S 為 a 的一個 *open neighborhood.*

依照定義 $\mathbb{R}$ 本身是 open set. 另外空集合 $\emptyset$ 也是 open set. 這是因為 $\emptyset$ 不包含任何元素, 所以邏輯上並未違背 open set 的定義. 定 $\emptyset$ 為 open set, 不僅在邏輯上是正確的, 它也使得 open set 在取交集之下能保持封閉性. 這點以後我們會再談到.

很容易看出, 前面所提 $(2,\infty)$, $(-\infty,2)$ 以及 $(-2,1) \cup (3,5)$ 這些集合都是 open set. 事實上我們有以下之性質.

Proposition 1.1.5. 假設 $\{S_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family* 其中每個 $S_i \subseteq \mathbb{R}$ 為 *open set.* 則 $\bigcup_{i \in I} S_i$ 亦為 *open set.*

Proof. 任取 $a \in \bigcup_{i \in I} S_i$, 由於存在 $k \in I$ 使得 $a \in S_k$ 且 S_k 是 open set, 我們可以找到 $\gamma > 0$ 使得 $(a-\gamma, a+\gamma) \subseteq S_k$. 故得 $(a-\gamma, a+\gamma) \subseteq S_k \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$. □

注意 Proposition 1.1.5 中的 index set I 並無任何限制, 也就是說不管是有限多個或無限多個 open set, 它們的聯集依然是 open set. 甚至不可數多個 open set 的聯集也會

是 open set. 不過這在取交集時就不對了. 例如考慮 index set 為 $\mathbb{N}$, 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 令 $S_n = (-1/n, 1/n)$, 此時 S_n 皆為 open set, 但是 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{0\}$, 不是 open set.

Question 1.3. 你能說明 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1/n, 1/n) = \{0\}$ 且不是 open set 嗎?

事實上只有在有限多個 open sets 取交集時可以確認一定會是 open set. 我們有以下的結果.

Proposition 1.1.6. 假設 $S_1, \ldots, S_n$ 為 $\mathbb{R}$ 的 *open set,* 則 $\bigcap_{1\leq i\leq n} S_i$ 亦為 *open set.*

Proof. 任取 $a \in \bigcap_{1\leq i\leq n} S_i$, 由於對任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a \in S_i$ 且 S_i 為 open set, 故存在 $\gamma_i > 0$ 使得 $(a - \gamma_i, a + \gamma_i) \subseteq S_i$. 令 $\gamma = \min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, 我們有 $\gamma > 0$ 且對所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(a - \gamma, a + \gamma) \subseteq (a - \gamma_i, a + \gamma_i) \subseteq S_i$. 故得證 $(a - \gamma, a + \gamma) \subseteq \bigcap_{1\leq i\leq n} S_i$. □

或許你會問在上面的證明裡, 如果找不到 $a \in \bigcap_{1\leq i\leq n} S_i$, 亦即 $\bigcap_{1\leq i\leq n} S_i = \emptyset$ 怎麼辦? 其實若是找不到 a 前提無法成立, 所以這個論述在邏輯上是成立的. 事實上這也是我們定 $\emptyset$ 為 open set 的原因.

Question 1.4. 任意多個 a 的 open neighborhoods 的聯集仍是 a 的 open neighborhood 嗎? 任意多個 a 的 open neighborhoods 的交集仍是 a 的 open neighborhood 嗎?

由 open set 的概念, 我們馬上可以利用 Proposition 1.1.3 同樣的方法將 Proposition 1.1.2 改寫成以下形式.

Corollary 1.1.7. 考慮函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且設 $a \in \mathbb{R}$. 以下敘述是等價的.

(1) f *is a continuous function at* a*.*

(2) 任取一個 $f(a)$ 的 *open neighborhood* U 皆可找到一個 a 的 *open neighborhood* V 使得 $f(V) \subseteq U$.

(3) 任取一個 $f(a)$ 的 *open neighborhood* U 皆可找到一個 a 的 *open neighborhood* V 使得 $V \subseteq f^{-1}(U)$.

Question 1.5. 試證明 Corollary 1.1.7.

接下來, 我們來探討在整個實數上的連續函數. 若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是連續函數, 依定義這就表示 f 必須在每一個實數上的點皆連續. 所以對於任意 $a \in \mathbb{R}$, 由 Corollary 1.1.7 我們知, 必須要在 $f(a)$ 上任取一個 open neighborhood U 皆可找到一個 a 的 open neighborhood V 使得 $f(V) \subseteq U$. 不過現在問題來了, 由於 f 並不一定是 one-to-one, 有可能存在 $b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq a$ 使得 $f(b) = f(a)$, 也就是說我們不只要找到 a 的一個 open neighborhood 滿足要求, 也要找到 b 的一個 open neighborhood V' 使得 $f(V') \subseteq U$. 事實上這個動作是對任何 $f^{-1}(\{f(a)\})$ 上的元素都要檢查的, 因此我們直接考慮 inverse image 比較方便. 我們有以下重要的結果.

Theorem 1.1.8. 考慮函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 則 f *is a continuous function* 若且唯若對任意 *opens set* $U\subseteq\mathbb{R}$ 皆使得 $f^{-1}(U)$ 是一個 *open set.*

Proof. 首先假設 f 是連續函數, 任取一 open set U, 我們要證明 $f^{-1}(U)$ 是 open set. 依定義就是要證明對任意 $x\in f^{-1}(U)$, 皆可找到 $\gamma>0$ 使得 $(x-\gamma,x+\gamma)\subseteq f^{-1}(U)$. 現由於 $x\in f^{-1}(U)$, 亦即 $f(x)\in U$, 故由 U 是 open 的假設知存在 $\epsilon>0$ 使得 $(f(x)-\epsilon,f(x)+\epsilon)\subseteq U$. 由假設知 f is continuous at x, 故利用 Corollary 1.1.2 我們知存在 $\delta>0$ 使得

$$(x-\delta,x+\delta)\subseteq f^{-1}\Big((f(x)-\epsilon,f(x)+\epsilon)\Big)\subseteq f^{-1}(U).$$

因此令 $\gamma=\delta$ 即得所求.

反之, 假設對任意 opens set $U\subseteq\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ 是一個 open set, 我們要證明 f 是連續函數, 即對於任意 $x\in\mathbb{R}$ 我們要說明 f is continuous at x. 這次我們可以利用 Corollary 1.1.7 來處理. 也就是說任取一個 $f(x)$ 的 open neighborhood U 我們要找到一個 x 的 open neighborhood V 使得 $V\subseteq f^{-1}(U)$. 然而 U 是 open set, 故由假設知 $f^{-1}(U)$ 是一個 open set, 又因為 $x\in f^{-1}(U)$ (因 $f(x)\in U$), 故 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一個 open neighborhood. 因此令 $V=f^{-1}(U)$ 即為所求. □

Question 1.6. 考慮函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 則 f is a continuous function 是否等價於對任意的 opens set $U\subseteq\mathbb{R}$ 皆會使得 $f(U)$ 是一個 open set 呢?

我們可以利用 Theorem 1.1.8 證明 identity map $\mathrm{id}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是連續的. 因為任取 R 的 open set U, 我們有 $f^{-1}(U)=U$ 當然是 open set. Theorem 1.1.8 並沒有簡化我們處理一些實數上特定的函數是否連續的問題, 不過如果沒有牽涉上實數的加減乘除運算問題, 它有時相當有用. 例如大家熟悉的兩個連續函數的合成仍為連續函數, 就可以很輕鬆的利用 Theorem 1.1.8 證明. 不過要證明兩個連續函數相加仍為連續函數, 那麼 Theorem 1.1.8 就可能派不上用場了. Theorem 1.1.8 的重要性, 並不在於提供對於連續函數抽象的證明方法, 而是它讓我們了解到, 我們可以推廣這個概念到任意的集合. 一個集合即使沒有加減乘除的運算, 不過只要在上面給予何謂 open set 的概念, 我們就可以探討它上面的連續函數. 這就是我們以後要探討的課題.

Question 1.7. 試利用 Theorem 1.1.8 證明常數函數是連續函數以及兩個連續函數的合成仍為連續函數.

為了以後方便介紹其他的拓樸概念, 最後我們介紹何謂 closed set.

Definition 1.1.9. 假設 $S\subseteq\mathbb{R}$, 如果 S 的補集 $S^c=\mathbb{R}\setminus S$ 是 open set, 則我們稱 S 是 *closed set.*

例如大家熟悉的閉區間 $[-1,3]$, 由於它的補集是 $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ 是 open, 故 $[-1,3]$ 是 closed set. 這裡要提醒大家, 很多同學以為 closed set 是 open set 的相反, 而誤以為一個集合若不是 open set 則必是 closed set. 這是錯誤的概念. 事實上 $[-1,3)$ 就既不是 open 也不

是 closed. 而依定義 $\mathbb{R}$ 和 $\emptyset$ 就又是 open 也是 closed. 總而言之, 要證明一個集合是 closed, 我們必須依定義證明其補集是 open set 即可.

Question 1.8. 整數所成的集合 $\mathbb{Z}$ 是否為 closed set?

Question 1.9. 假設 $\{S_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family 其中每個 $S_i \subseteq \mathbb{R}$ 是 closed set.

(1) 證明 $\bigcap_{i\in I} S_i$ 為 closed set.

(2) 證明當 I 是一個 finite set 時, $\bigcup_{i\in I} S_i$ 為 closed set.

1.2. Open Sets and Closed Sets

雖然我們簡單的說只要知道哪些是 open sets 就可以定義出連續函數, 但是隨便在一個集合中隨便指定那些 subsets 是 open sets 是沒有意義的. 由 Proposition 1.1.5 和 Proposition 1.1.6, 我們知道在實數上的 open set 符合任意聯集以及有限多個交集仍為 open 的性質, 而且 $\mathbb{R}$ 本身以及 $\emptyset$ 亦為 open set. 所以我們很自然要求 open sets 符合以下的規範.

Definition 1.2.1. 考慮一集合 X, 以及 $\mathcal{T}$ 為 X 的一些子集合所成的集合. 我們稱 $\mathcal{T}$ 為 X 的一個 *topology* 如果 $\mathcal{T}$ 符合以下條件.

(1) $X, \emptyset$ 皆在 $\mathcal{T}$ 中.

(2) 假設 $\{S_i, i \in I\}$ 是以 I 為 index set 的 indexed family 其中每個 S_i 皆在 $\mathcal{T}$ 中, 則 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 亦在 $\mathcal{T}$ 中.

(3) 假設 $S_1, \ldots, S_n$ 皆在 $\mathcal{T}$ 中, 則 $\bigcap_{i\in 1}^{n} S_i$ 亦在 $\mathcal{T}$ 中.

當我們在 X 中給定了一個 topology, 則稱 X 為一個 *topological space* 而且稱 $\mathcal{T}$ 中的元素為 X 的 *open set.* 又若 $x \in X$ 且 $S \subseteq X$ 在 $\mathcal{T}$ 中滿足 $x \in S$, 則稱 S 為 x 的一個 *open neighborhood.*

Question 1.10. 試利用數學歸納法說明 Definition 1.2.1 中 topology 的條件 (3) 等價於 (亦即可改成): 假設 S_1, S_2 皆在 $\mathcal{T}$ 中, 則 $S_1 \cap S_2$ 亦在 $\mathcal{T}$ 中.

要注意同樣的 X, 可以在上面定義不同的 topology, 此時我們認定為不同的 topological space. 所以當我們要討論特定的情況時必須說明是用哪一種 topology. 例如我們要探討如上一章實數系習慣用的利用開區間所訂的 open set, 便要強調使用 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology. 不過以後當我們談論的是一般的狀況時, 為了方便起見我們會直接說 X 為一個 topological space, 而不去提及 $\mathcal{T}$, 這也表示我們推得的結論是適用於任何的 topology 的.

對於任意的集合 X 我們都可以在其上定義出 topology 使其成為一個 topological space. 例如給定集合 X 我們可定其上的 topology 為 $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ 這樣的 *trivial topology* 或稱 *indiscrete topology.* 也可定 $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (X 的 power set, 即所有 X 的子集合所成的集合)

這樣的 *discrete topology*. 很容易檢查, 這兩種都符合 Definition 1.2.1 中 topology 的定義. 我們可以藉這兩個極端的例子順便說明一下為什麼同樣的集合給了不同的 topology, 會讓我們 " 感覺" 不一樣. 其實我們將一個 open set S 稱為在它裡面的一個點 x 的 open neighborhood, 意味著我們將 S 上的點視為在 x 附近 (就像實數上包含某一點的開區間一樣). 又若 $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$ 且 S_1, S_2 皆為 open sets 滿足 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 此時我們可視為 x_1, x_2 兩點可以被兩個開區間所區隔開來. 從這個觀點來看, 對於 X 若使用 indiscrete topology, 表示 X 上的所有點只有一個 open neighborhood X 而且所有點都在裡面. 這意味這大家都擠成一團, 無法被區分開來, 這也是把它稱為 indiscrete (無法區分的) 的原因. 另一方面, 同樣的集合 X 若用 discrete topology, 表示對任意 $x \in X$, $\{x\}$ 是本身 x 的一個 open neighborhood, 這不就意味著每一個 X 上的點都被分得很開啊 (想像實數上的整數點)? 這也是把它稱為 discrete (離開分散的) 的原因.

Question 1.11. 如果 $X = \{1,2\}$ 除了 discrete topology 和 indiscrete topology 外, 還有其他的 topology 嗎?

我們介紹一種重要的 topological space. 在 $\mathbb{R}$ 上, 我們常用的 standard topology, 是用 "距離" 定義出來的, 一般來說有了距離就可以利用它定出 topology. 這樣的 topological space 我們特別稱之為 *metric space*. 首先我們還是定義一下何謂 "距離".

Definition 1.2.2. 給定一集合 X, 若函數 $d : X \times X \to [0,\infty)$ 對於任意 $a,b,c \in X$ 滿足以下性質, 則稱 d 為 X 上的一個 *metric*.

(1) $d(a,b) = d(b,a)$.

(2) $d(a,b) = 0$ if and only if $a = b$.

(3) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

性質 (1) 指的是 a 到 b 的距離等於 b 到 a 的距離. 而性質 (2) 指的是每一點到自己的距離為 0, 而不同的點距離必大於 0. 性質 (3) 便是大家熟悉的三角不等式. 所以符合這三項性質的函數稱為距離函數. 在 $\mathbb{R}$ 中我們定的絕對值 $|a-b| = d(a,b)$ 就符合以上三個性質. 另外在 $\mathbb{R}^2$ 中定 $d((x_1,y_2),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ 也會是 $\mathbb{R}^2$ 上的一個 metric. 甚至我們在 $\mathbb{R}^n$ 中常用的 $d((x_1,\ldots,x_n)-(y_1,\ldots,y_n)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 上的 metric.

對於 X, 給定其上的 metric d 後, 我們便可以定義 X 上的 *open ball*. 亦即對於 $a \in X$, $r > 0$ 我們定義 $B(a;r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$. 然後我們便可如 Definition 1.1.4 定義 X 上的 open set. 也就是說, 若 $S \subseteq X$ 滿足對所有 $a \in S$ 皆存在 $r > 0$ 使得 $B(a;r) \subseteq S$, 則稱 S 為一個 *open set*. 當然了我們必須說明這樣定出的 open set 符合 Definition 1.2.1 的三項要求. 事實上模仿 Proposition 1.1.5 和 Proposition 1.1.6 的證明, 我們確實知道這樣定義出的 open sets 確實賦予 X 一個 topology. 也就是說只要一個集合上有一個 metric, 我們便能利用此 metric 定義出其上的一個 topology.

Question 1.12. 假設集合 X 上有一 metric d, 試證明

$$\mathcal{T}=\{S\subseteq X \mid \forall a\in S,\ \exists r>0,\ B(a;r)\subseteq S\}$$

為 X 上的 topology.

其實我們要定義出一個集合 X 上的 topology, 一開始可能無法一下子就能符合 Definition 1.2.1 的三項條件, 一般我們會先注意我們要求的 open set 所需的特性是甚麼, 先收集這些集合然後再擴大之使其符合 topology 的要求. 例如在 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology, 我們基本上所要的是開區間的概念, 最後才擴充到 open sets. 事實上我們可以看出, 在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 上的 open set 就是一些 (可以是無窮多個) open interval 的聯集所組成. 同樣的道理, 在 metric space 中的 topology 其中的 open sets, 事實上也都是由一些 open ball 所聯集而得. 而這些建構 topology 最基本的集合, 我們便稱之為該 topology 的一個 *basis*. 我們有以下正式的定義.

Definition 1.2.3. 假設 X 是由 $\mathcal{T}$ 定義出的一個 topological space. 若 $\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{T}$ 中的一些 open sets 所組成的集合, 滿足任意 $\mathcal{T}$ 中非空的 open set 皆可寫成一些 $\mathcal{B}$ 中的 open sets 的聯集, 則稱 $\mathcal{B}$ 為 $\mathcal{T}$ 的 *basis* (或 *base*).

其實 basis 的意義在於對於任何非空的 open set S, 當 $x\in S$ 時, 我們都可找到 $S_x\in\mathcal{B}$ 滿足 $x\in S_x$ 且 $S_x\subseteq S$, 此時便可將 S 寫成這些 S_x 的聯集, 即 $S=\bigcup_{x\in S}S_x$. 例如在 $\mathbb{R}$ 中, 當我們考慮 standard topology $\mathcal{T}$, 由於對於任意非空的 open set $S\in\mathcal{T}$ 上的一點 $x\in S$, 我們皆可找到 $\gamma_x>0$ 使得 $(x-\gamma_x,x+\gamma_x)\subseteq S$, 所以可得 $S=\bigcup_{x\in S}(x-\gamma_x,x+\gamma_x)$. 因而得知所有的 open intervals 所成的集合是 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 的一組 basis. 同理, 對於 metric space, 所有 open ball 所成的集合就是此 metric space 的 topology 上的一組 basis.

Question 1.13. 假設 S 是非空集合且對於任意 $x\in S$ 時, 我們都可找到 S_x 滿足 $x\in S_x$ 且 $S_x\subseteq S$. 試證明 $S=\bigcup_{x\in S}S_x$, 並依此說明在 metric space 中所有半徑為有理數的 open ball 所成的集合就是此 metric space 的 topology 上的一組 basis.

由 Question 1.13 可知一個 topology 的 basis 並不唯一. 不過反過來一組 basis 僅能定出一個 topology. 這是因為依 basis 的定義, basis 中的元素都應是 open set, 再加上 open sets 的聯集仍為 open set, 因此若兩個 topology 有相同的 basis, 會造成這兩個 topology 有相同的 open sets, 亦即得到相同的 topology. 詳細的證明就留作習題囉.

Question 1.14. 假設 X 為非空的集合且 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 皆為 X 上的 topology. 現若 $\mathcal{B}$ 皆為 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 的一組 basis. 試證明 $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$.

依定義當 $\mathcal{B}$ 是 topological space X 的一組 basis 時, 因為 X 本身是 open, 我們會有 $X=\bigcup_{S\in\mathcal{B}}S$. 另一方面, 若 $S_1,S_2\in\mathcal{B}$ 且 $x\in S_1\cap S_2$, 由於 $S_1\cap S_2$ 亦為 open, 故知 $S_1\cap S_2$ 必可寫成一些 $\mathcal{B}$ 中的集合的聯集, 因此由 $x\in S_1\cap S_2$ 得必存在 $S\in\mathcal{B}$ 滿足 $x\in S$ 且 $S\subseteq S_1\cap S_2$. 我們得到以下有關 basis 的性質.

Proposition 1.2.4. 假設 $\mathcal{B}$ 是 *topological space* X 的一組 *basis*, 則 $\mathcal{B}$ 滿足以下條件:

(1) $X = \bigcup_{S \in \mathcal{B}} S$.

(2) 若 $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$ 且 $x \in S_1 \cap S_2$, 則存在 $S \in \mathcal{B}$ 滿足 $x \in S$ 且 $S \subseteq S_1 \cap S_2$.

反之, 若 $\mathcal{B}$ 為 X 中的一些 *subsets* 所成的集合且滿足上述 (1), (2) 兩個性質, 則存在唯一的 *topology* $\mathcal{T}$, 使得 $\mathcal{B}$ 為 $\mathcal{T}$ 的一組 *basis*.

Proof. 我們僅剩要證明存在唯一的 topology $\mathcal{T}$, 使得 $\mathcal{B}$ 為 $\mathcal{T}$ 的一組 basis. 要證明存在性, 所以我們必須具體定出 $\mathcal{T}$ 來. 由於 $\mathcal{B}$ 要成為 basis 的定義為每個 open set 皆是 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集, 因此 $\mathcal{T}$ 的元素自然皆需可寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集再加上 $\emptyset$. 所以我們只要收集 $\emptyset$ 以及所有可以寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集的 subsets 定之為 $\mathcal{T}$ 再證明 $\mathcal{T}$ 確實符合 topology 的要求即可. 首先已知 $\emptyset \in \mathcal{T}$, 再由 $X = \bigcup_{S \in \mathcal{B}} S$, 故知 X 在 $\mathcal{T}$ 中. 另外由於 $\mathcal{T}$ 的元素皆可寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集, 所以 $\mathcal{T}$ 中任意一些元素的聯集仍可寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集. 最後我們只剩下要證明若 $T_1, \ldots, T_n$ 皆可寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集, 則 $T_1 \cap \cdots \cap T_n$ 亦可寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集. 事實上利用數學歸納法, 我們只要證明 $n = 2$ 的情況 (參見 Question 1.10). 現假設 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, 依定義存在 index sets I, J 使得 $T_1 = \bigcup_{i \in I} S_i$, $T_2 = \bigcup_{j \in J} S'_j$, 其中 S_i, S'_j 皆在 $\mathcal{B}$ 中. 利用聯集交集的分配性質, 我們有

$$T_1 \cap T_2 = \bigcup_{i \in I, j \in J} S_i \cap S'_j.$$

所以我們僅需要證明 $S_i \cap S'_j$ 亦可以寫成 $\mathcal{B}$ 中的一些元素的聯集即可. 然而對於任何 $x \in S_i \cap S'_j$, 由於 S_i, S'_j 皆在 $\mathcal{B}$ 中, 故由性質 (2) 知存在 $S_x \in \mathcal{B}$ 滿足 $x \in S_x$ 且 $S_x \subseteq S_i \cap S'_j$. 由此可推得

$$S_i \cap S'_j = \bigcup_{x \in S_i \cap S'_j} S_x.$$

因此我們得證 $\mathcal{T}$ 確為 X 的一個 Topology 且 $\mathcal{B}$ 為 $\mathcal{T}$ 的一組 basis. □

最後我們介紹 topological space 上的 closed set.

Definition 1.2.5. 假設 X 為 topological space. 對於 $S \subseteq X$, 如果 S 的補集 $S^c = X \setminus S$ 是 open set, 則我們稱 S 是 *closed set*.

再次提醒大家, closed set 不是 open set 的相反, 不要誤以為一個集合若不是 open set 則必是 closed set. 這是錯誤的概念. 事實上有可能一個集合既不是 open 也不是 closed. 另一方面也有可能一個集合既是 open 是 closed. 甚至有可能一個 topological space 上的 open sets 和 closed sets 完全相同. Indiscrete topology 和 discrete topology 就是例子. 總而言之, 要證明一個集合是 closed, 我們必須依定義證明其補集是 open set 即可. 利用補集的性質, 如同 Question 1.9, 我們有以下的結果.

Proposition 1.2.6. 假設 X 為一 *topological space*, 則我們有以下性質.

(1) $X, \emptyset$ 皆為 *closed.*

(2) 假設 $S_1, \ldots, S_n$ 皆為 *closed set,* 則 $\bigcup_{i \in 1}^{n} S_i$ 亦為 *closed set.*

(3) 假設 $\{S_i, i \in I\}$ 是以 I 為 *index set* 的 *indexed family* 其中每個 $S_i \subseteq X$ 皆為 *closed set,* 則 $\bigcap_{i \in I} S_i$ 亦為 *closed set.*

Question 1.15. 試說明在 indiscrete topology 和 discrete topology 中 open set 就是 closed set, 而 closed set 就是 open set.

Question 1.16. 一個 topological space 中, 若知道所有的 closed sets 為何, 是否就可以知道所有的 open sets?

最後要提醒的是在一般的 topological space 上由一個元素所成的集合, 不一定會是 closed. 例如 indiscrete topology 就是一個例子. 這和我們在 $\mathbb{R}$ 上習慣的 standard topology 相當不同, 所以千萬要注意. 不過在特殊的情況, 例如 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology 甚至更一般的 metric space 上, 任意一個元素所成的集合就一定是 closed.

1.3. Continuous Functions and Open Maps

一個集合有了 topology, 我們便可將實數上連續函數的等價性質 (Theorem 1.1.8) 拿來當成連續函數的定義. 事實上, 我們不只談論一個 topological space 自己到自己的函數, 我們可以將之推廣到兩個 topological spaces 之間的函數.

Definition 1.3.1. 假設 X, Y 為 topological spaces 且 $f : X \to Y$ 為一 function. 如果對於 Y 上任意的 open set U 皆得 $f^{-1}(U)$ 為 X 上的 open set, 則稱 f 為 *continuous function.*

再次提醒, continuous function 指的是對應域上的 open set 的 inverse image 仍為定義域上的 open set. 而不是將定義域上的 open set 取 image 後會是對應域的 open set.

Question 1.17. 設 X, Y 為 topological space, $f : X \to Y$ 為 function. 試判斷以下情形何者可確定 f 為 continuous.

(1) X 上的 topology 為 discrete topology.

(2) Y 上的 topology 為 discrete topology.

(3) X 上的 topology 為 indiscrete topology.

(4) Y 上的 topology 為 indiscrete topology.

Question 1.18. 試說明一個集合 X 上的 identity function $\mathrm{id}_X : X \to X$ 有可能不是 continuous function.

由上一節中 closed set 的定義, 我們知道對 open sets 的了解就等同於對於 closed sets 的了解. 因此我們也可利用 closed set 的 inverse image 來判定一個函數是否為 continuous.

Proposition 1.3.2. 假設 X, Y 為 *topological spaces* 且 $f : X \to Y$ 為一 *function.* 則 f 是 *continuous* 若且唯若對於 Y 上任意的 *closed set* C 皆有 $f^{-1}(C)$ 為 X 上的 *closed set.*

Proof. 假設 f 為 continuous, 任取 Y 中的 closed set C, 我們要說明 $f^{-1}(C)$ 會是 X 的 closed set, 也就是說 $X \setminus f^{-1}(C)$ 是 open. 然而 $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$ 且 $Y \setminus C$ 是 open, 故由 f 是 continuous 得證 $f^{-1}(Y \setminus C)$, 亦即 $X \setminus f^{-1}(C)$ 是 open.

反之, 假設對於 Y 上任意的 closed set C 皆有 $f^{-1}(C)$ 為 X 上的 closed set. 任取 Y 上的 open set U, 我們有 $Y \setminus U$ 為 closed. 此時依假設知 $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ 為 X 上的 closed set, 故得 $f^{-1}(U)$ 為 open. 得證 f 為 continuous. □

依定義, 要證明 $f : X \to Y$ 為 continuous, 必須驗證所有 Y 的 open sets U 皆滿足 $f^{-1}(U)$ 為 X 的 open set. 然而考慮 Y 上所有的 open sets 有時會有點繁雜, 此時 basis 的概念便可幫我們降低一些複雜度. 下一個定理便是告訴我們, 若能找到 Y 的一組 basis, 我們只要檢驗此 basis 的 inverse image 即可.

Proposition 1.3.3. 假設 X, Y 為 *topological space,* 其中 $\mathcal{B}$ 為 Y 的 *topology* 的一組 *basis.* 則 $f : X \to Y$ 為 *continuous* 若且唯若對於任意 $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ 皆為 X 的 *open set.*

Proof. 若 f 為 continuous, 則因任意 $U \in \mathcal{B}$ 皆為 Y 的 open set, 故知 $f^{-1}(U)$ 為 X 的 open set.

反之, 若對於任意 $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U)$ 皆為 X 的 open set. 任取 Y 的 open set U, 由於 $\mathcal{B}$ 是 basis, 存在 index I 以及 $S_i \in \mathcal{B}$, $\forall i \in I$ 使得 $U = \bigcup_{i \in I} S_i$. 故由 $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(S_i)$ 以及 $f^{-1}(S_i)$ 為 open 知 $f^{-1}(U)$ 為 open, 得證 f 為 continuous. □

當 X, Y, Z 是 topological spaces, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 為 functions 我們便可將 f, g 合成得 $g \circ f : X \to Z$. 若要了解 $g \circ f$ 是否為 continuous, 我們必須知道 $g \circ f$ 的 inverse image 和 f, g 的 inverse image 的關係. 任取 Z 的一個 subset S, $g^{-1}(S)$ 會是 Y 的 subset, 故 $f^{-1}(g^{-1}(S))$ 會是 X 的 subset. 另一方面 $(g \circ f)^{-1}(S)$ 也會是 X 的 subset, 所以我們自然會問 $f^{-1}(g^{-1}(S))$ 和 $(g \circ f)^{-1}(S)$ 是否相等? 若 $x \in f^{-1}(g^{-1}(S))$, 表示 $f(x) \in g^{-1}(S)$. 又由 $f(x) \in g^{-1}(S)$ 得 $g \circ f(x) = g(f(x)) \in S$, 故知 $x \in (g \circ f)^{-1}(S)$. 反之, 若 $x \in (g \circ f)^{-1}(S)$, 表示 $g(f(x)) = g \circ f(x) \in S$, 故得 $f(x) \in g^{-1}(S)$, 即 $x \in f^{-1}(g^{-1}(S))$. 我們證明了對於任意 $S \subseteq Z$, 皆有 $f^{-1}(g^{-1}(S)) = (g \circ f)^{-1}(S)$. 有了這個性質, 我們便可以推得兩個連續函數的合成亦為連續函數.

Proposition 1.3.4. 假設 X, Y, Z 是 *topological spaces.* 若 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ 為 *continuous functions,* 則 $g \circ f : X \to Z$ 亦為 *continuous function.*

Proof. 任取 U 為 Z 的 open set, 考慮 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. 由於 $g : Y \to Z$ 是 continuous, 我們有 $g^{-1}(U)$ 為 Y 的 open set. 又由於 $f : X \to Y$ 是 continuous, 我們得 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是 X 的 open set. 得證 $g \circ f : X \to Z$ 為 continuous function. □

在數學上, 當有兩個集合雖然是不同集合, 但是當它們在某些我們關注的特定性質來看時是相同時, 我們會希望能有一個方法描繪出這種情形. 由於它們是不同的集合, 所以唯一把它們擺放在一起的方法就是藉由 function, 而且這些 function 必須和我們探討的性質相關. 例如在代數裡, 兩個 group 我們就會談論他們之間的 group homomorphism. 而若兩個 group 之間有一對一且映成的 group homomorphism (即 isomorphism), 我們便稱這兩個 group 為 isomorphic. 對於 topological spaces, 我們要如何認定兩個 topological spaces 它們的拓樸是相同的呢? 當然這兩個 spaces 應該有一對一且映成的函數對應關係, 不過這個函數必需保持拓樸的關係, 我們很自然地認為應該是 continuous function 吧! 不過這仍然有問題. 例如設 X 是一個非空的集合. 考慮 identity map $\mathrm{id}_X : X \to X$, 其中定義域使用 discrete topology, 而對應域使用 indiscrete topology. 在這樣的 topology 之下, id_X 是一個 continuous function, 不過若 X 含有多於一個元素, 我們絕不會認為這兩種 topologies 會相同. 事實上在一般情形, 若 X, Y 是 topological spaces 而 $f : X \to Y$ 是一對一且映成的 continuous function. 對於 Y 上的 open set U, 由於 f 是 continuous, 我們有 $f^{-1}(U)$ 在 X 是 open. 現若有另一個不同的 Y 上的 open set U', 由於 f 是 onto, 我們會得到 $f^{-1}(U)$ 和 $f^{-1}(U')$ 是相異的 (why?). 換句話說在這個條件下我們僅有一個一對一的對應方式將 Y 的 open sets 送到 X 的 open sets; 但不能保證所有 X 的 open sets 都被對應到. 所以感覺上 X 的 open sets 有可能比 Y 的 open sets 多 (這種情形在數學上會稱 X 有 *stronger topology*), 也因此我們不能依此認定 X, Y 有相同的拓樸性質. 然而如果對於任意 X 的 open set S, $f(S)$ 皆為 Y 的 open set, 此時由於 f 是一對一的, 我們便有一個一對一的方式將 X 的 open sets 送到 Y 的 open sets (why?). 因此在此情況之下認定 X, Y 有相同的拓樸性質是頗合理的. 一般來說當一個函數 $f : X \to Y$ 滿足對任意 X 的 open set S 皆會使得 $f(S)$ 是 Y 的 open set (不需 one-to-one and onto 以及 continuous 的假設), 我們便稱 f 為一個 *open map*.

Question 1.19. 假設 X, Y 為 topological spaces 且 $f : X \to Y$ 是 onto 的 continuous function 而 $g : X \to Y$ 是 one-to-one 的 open map.

(1) 試證明若 U_1, U_2 為 Y 中相異的 open sets, 則 $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ 為 X 中相異的 open sets.

(2) 試證明若 S_1, S_2 為 X 中相異的 open sets, 則 $g(S_1), g(S_2)$ 為 Y 中相異的 open sets.

基於上述的理由, 假設 X, Y 為 topological spaces 且 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 分別為 X, Y 的 topology. 如果 $f : X \to Y$ 為一對一且映成的 continuous function 且為 open map, 我們便可以利用 f 得到一個 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{T}'$ (即所有 X 上的 open sets 所成的集合到所有 Y 上的 open sets 所成的集合) 的一個一對一且映成的對應關係. 亦即將 X 上的 open set S 對應到 Y 上的 open set $f(U)$. 也就是說令 $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 其定義為將 $S \in \mathcal{T}$ 映射到 $f(S)$ (即 $F(S) = f(S)$). 由於 f 是 open map, 我們有 $f(S) \in \mathcal{T}'$ 故知 F 是 well-defined. 又因 f 是一對一, 故由 Question 1.19 (2) 知 F 是一對一. 另一方面對任意 $U \in \mathcal{T}'$ 由於 f 是 continuous, 我們有 $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. 此時令 $S = f^{-1}(U)$ 利用 f 是 onto (即 $f(X) = Y$) 可得 $S \in \mathcal{T}$ 滿足

$$F(S) = f(S) = f(f^{-1}(U)) = U \cap f(X) = U \cap Y = U.$$

得證 F 是 onto. 既然此時 X 的拓樸和 Y 的拓樸之間有著一對一且映成的對應關係, 我們很自然地會依此認定 X 與 Y 有相同的拓樸結構, 因此有以下的定義.

Definition 1.3.5. 設 X, Y 為 topological spaces. 如果一個連續函數 $f : X \to Y$ 是一對一且映成的且為 open map, 則稱 f 是 X, Y 之間的 *homeomorphism*. 如果兩個 topological space X, Y 之間存在著 homeomorphism, 則稱 X, Y 為 *homeomorphic* topological spaces.

其實一個一對一且映成的連續函數其反函數未必是連續函數 (以後我們會談到這只有在特殊的拓樸之下才會成立). 但如果 $f : X \to Y$ 是 open map 時, 令 $g : Y \to X$ 為 f 的反函數 (為了避免混淆, 這裡我們不用 f^{-1} 表示 f 的反函數). 此時對於任何 X 的 open set S, 由於 $g^{-1}(S) = f(S)$ (why?) 且 f 是 open map, 我們得 $g^{-1}(S)$ 為 Y 的 open set. 故知 g 為 continuous. 反之如果 f 的反函數 g 是 continuous, 此時對於任意 X 的 open set S, 我們皆有 $f(S) = g^{-1}(S)$ 為 Y 的 open set, 故知 f 為 open map. 我們證得以下結果.

Proposition 1.3.6. 設 X, Y 為 *topological spaces,* $f : X \to Y$ 為 *one-to-one and onto.* 則 f 是 *open map* 若且唯若 f 的 *inverse function* 為 *continuous.*

Question 1.20. 設 X, Y 為 topological spaces, $f : X \to Y$ 為 one-to-one and onto. 試說明 f 為 continuous function 若且唯若 f 的 inverse function 為 open map.

利用 Proposition 1.3.6 我們自然有以下的結果.

Corollary 1.3.7. 設 X, Y 為 *topological spaces,* $f : X \to Y$ 為 X 到 Y 的函數. 則 f 為 *homeomorphism* 若且唯若 f 是 *one-to-one, onto* 以及 *continuous* 而且 f 的 *inverse function* 亦為 *continuous.*

Question 1.21. 假設 X, Y 為 topological spaces, 我們用 $X \simeq Y$ 表示 X, Y 為 homeomorphic. 試證明 "$\simeq$" 是一個 topological spaces 之間的 equivalent relation.

Homeomorphisms 有許多重要的性質, 以後我們會再詳談.

1.4. Subset Topology and Disjoint Union Topology

在這節中我們介紹兩個創造新的 topological space 的方法. 其中一個是定義 topological space 的子集合上的拓樸, 稱為 subset topology. 另一個是將兩個不相關的 topological spaces 合併成一個 topological space, 稱為 disjoint union topology.

1.4.1. Subset Topology. 給定一個函數 $f : X \to Y$, 若 X' 是 X 的 subset, 我們很自然有一個 *restriction function* $f|_{X'} : X' \to Y$. 簡單來說 $f|_{X'}$ 就是將 f 的定義域限定在 X', 也就是說我們僅考慮 X' 上的元素經由 f 送到集合 Y. 當 $f : X \to Y$ 是 continuous 時, 我們當然也希望 $f|_{X'} : X' \to Y$ 也是 continuous. 不過 X' 不是 topological space, 我們要如何定義其上的函數是否為連續函數呢? 很自然的我們必須定義 X' 上的 topology, 而且這個拓樸一定和 X 的拓樸相關. 這種方式定義出的 topology 便稱為 X 上的 subspace topology.

現在我們必須分成兩個步驟處理這個問題, 首先是要找出 X' 上的 open sets 應該有哪些, 接著便是說明這些"可能的" open sets 真的形成 X' 上的 topology. 首先, 要使得 $f|_{X'}: X' \to Y$ 是 continuous, 便必須要求對於所有 Y 上的 open set U 都會使得 $f|_{X'}^{-1}(U)$ 是 X' 上的 open set. 然而 $f|_{X'}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap X'$, 這是因為 $x \in f|_{X'}^{-1}(U)$ 若且唯若 $x \in X'$ 且 $f(x) \in U$ (注意這裡只要 U 是 Y 的 subset 就可成立, 不需 open 的假設). 然而若 $f: X \to Y$ 是 continuous, $f^{-1}(U)$ 會是 X 的 open set. 所以若我們希望對所有的連續函數 $f: X \to Y$, $f|_{X'}: X' \to Y$ 也是連續函數, 最好的選擇就是要求 X' 的 open sets 都是 X 上的 open set 與 X' 的交集. 好了! 我們找到了 X' 上那些集合應該是 open set 後, 接下來便是要說明它們應該形成 X' 的 topology. 也就是說我們要證明, 當 $\mathcal{T}$ 是 X 的 topology, 若我們定義 $\mathcal{T}' = \{S \cap X' : S \in \mathcal{T}\}$, 則 $\mathcal{T}'$ 會是 X' 的 topology. 當然了, 依定義 $\mathcal{T}'$ 上的元素都是 X' 的 subset, 所以我們只要檢查 $\mathcal{T}'$ 是否符合 Definition 1.2.1 上的三個要求即可. 首先因 $X, \emptyset$ 皆在 $\mathcal{T}$, 所以當然 $X' = X \cap X'$, $\emptyset = \emptyset \cap X'$ 也在 $\mathcal{T}'$. 所以 (1) 符合. 至於 (2) 呢? 對於一組 index set I, 如果 $S_i' \in \mathcal{T}'$, $\forall i \in I$, 此時依定義, 存在 $S_i \in \mathcal{T}$ 滿足 $S_i' = S_i \cap X'$. 所以

$$\bigcup_{i \in I} S_i' = \bigcup_{i \in I} (S_i \cap X') = (\bigcup_{i \in I} S_i) \cap X'.$$

又由於 $\mathcal{T}$ 是 X 的 topology, 所以 $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{T}$, 得證 $\bigcup_{i \in I} S_i' \in \mathcal{T}'$. 最後若 $S_1', S_2' \in \mathcal{T}'$, 表示存在 $S_1, S_2 \in \mathcal{T}$ 使得 $S_1' = S_1 \cap X'$, $S_2' = S_2 \cap X'$, 故由 $S_1' \cap S_2' = (S_1 \cap S_2) \cap X'$, 以及 $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{T}$ 得證 $S_1' \cap S_2' \in \mathcal{T}'$, 即 (3) 成立. 由於這個原因, 我們有以下的定義.

Definition 1.4.1. 假設 X 為 topological space 且 $\mathcal{T}$ 為其 topology. 對於 X 的 subset X', 考慮以下 X' 的一些 subsets 所成的集合

$$\mathcal{T}' = \{S' \in \mathcal{P}(X') : S' = S \cap X', \text{ for some } S \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}'$ 會是 X' 的 topology, 我們稱此 topology 為 X 的 *subspace topology*. 當 X' 是使用 X 的 subspace topology 所得的 topological space 時, 我們便直接說 X' 為 X 的 subspace.

Question 1.22. 假設 $X' \subseteq X$. 試問若 X' 使用 X 的 indiscrete topology 所得的 subspace topology 為何? 又若 X' 使用 X 的 discrete topology 所得的 subspace topology 為何?

Question 1.23. 在區間 $[-1, 1)$ 考慮 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology 的 subspace topology. 試問此時 $[-1, 0)$ 是否為 open? $[0, 1)$ 是否為 closed?

Question 1.24. 假設 X 為 topological space 且 X' 為其 subspace. 試證明 C' 是 X' 的 closed set 若且唯若存在 X 的 closed set C 使得 $C' = C \cap X'$.

在 Question 1.23 中我們看出來, 在 subspace topology 中的 open set 很可能和原來的 topology 的 open set 長得很不一樣, 要小心不要混淆. 不過當 subset 本身是 open 時, 那就不會有混淆的情況了.

Lemma 1.4.2. 假設 X 是 *topological space* 且 X' 是 X 的 *open subset.* 在 X' 上使用 X 的 *subspace topology.* 則 S 是 X' 的 *open set* 若且唯若 S 是 X 的 *open set* 且 $S \subseteq X'$.

Proof. 假設 S 是 X' 的 open set, 依 subspace topology 的定義, 這表示存在 X 的 open set U 使得 $S = U \cap X'$. 然而依假設 X' 是 X 的 open set, 故知 $S = U \cap X' \subseteq X'$ 亦為 X 的 open set. 反之若 S 是 X 的 open set 且 $S \subseteq X'$, 這表示 $S = S \cap X'$, 且依 subspace topology 的定義, 得知 S 為 X' 的 open set. □

Question 1.25. 假設 X 是 topological space 且 X' 是 X 的 open subset. 在 X' 上使用 X 的 subspace topology. 試問 X' 上的 closed set 會是 X 上的 closed set 嗎? 試著修改 Lemma 1.4.2, 使其在 closed set 的情況是對的.

接著我們回到定義 subspace topology 的目的. 當 X' 為 topological space X 的 subset, 我們希望利用 X 的 topology 定出在 X' 的 topology 使得對任意的連續函數 $f : X \to Y$, 都會使得 $f|_{X'} : X' \to Y$ 為 continuous. 而 subspace topology 就符合這個要求. 在 X' 上還有怎樣的 topology 可以符合這樣的性質呢? 當然了我們可以因連續函數 f 的不同改變 X' 的拓樸, 不過這不是我們要的. 我們希望選的拓樸是固定下來的不會因 f 而變. 另一方面如果在 X' 選的拓樸比 subspace topology 強, 那麼 $f|_{X'}$ 當然是 continuous. (回顧一下, 假設 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 為 X 上的 topologies. 如果 $\mathcal{T}$ 的 open set 都是 $\mathcal{T}'$ 的 open set, 即 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, 則稱 $\mathcal{T}'$ 是比 $\mathcal{T}$ 更強 (stronger) 或更細 (finer) 的 topology. 我們也可說 $\mathcal{T}$ 是比 $\mathcal{T}'$ 更弱 (weaker) 或更粗 (coarser) 的 topology.) 例如 X' 選 discrete topology 就可以讓 $f|_{X'}$ 是連續的了. 這不是我們想要的, 我們當然希望是越弱的越好. 事實上 subspace topology 就是達到這個目的之下最弱的 topology. 這是因為當我們考慮 f 是 identity map $\mathrm{id} : X \to X$, 此時 $f|_{X'} : X' \to X$ 要連續必須滿足對所有 X 的 open set U, $f|_{X'}^{-1}(U) = U \cap X'$ 是 X' 的 open set. 換言之, 要讓 $f|_{X'} : X' \to X$ 是連續的話, X' 上的 topology 都必須包含 subspace topology 上的 open set. 也因此 subspace topology 便是擁有這個性質裡最弱的 topology. 我們有以下的結論.

Proposition 1.4.3. 假設 X, Y 是 *topological space* 且 $X' \subseteq X$. 若 X' 使用 X 的 *subspace topology,* 則對任意的 *continuous function* $f : X \to Y$, $f|_{X'} : X' \to Y$ 亦為 *continuous function.* 另一方面 *subspace topology* 是 *weakest topology* 滿足 *continuous function* 的 *restriction* 亦為 *continuous.* 也就是說若 $\mathcal{T}'$ 是 X' 的一個 *topology* 滿足對任意的 *continuous function* $f : X \to Y$, $f|_{X'} : X' \to Y$ 皆為 *continuous function,* 則 *subspace topology* 比起 $\mathcal{T}'$ 會是 *weaker topology.*

Question 1.26. 假設 X 是 topological space 且 $X' \subseteq X$. 若 X' 使用 X 的 subspace topology, 則對任意的 open map $f : X \to Y$, $f|_{X'} : X' \to Y$ 是否仍為 open map?

Subspace topology 的另一個好處是幫我們把兩個 continuous functions "黏成" 一個 continuous function.

Proposition 1.4.4. 假設 X 是 *topological space* 且 X_1, X_2 為 X 的 *open subsets* 滿足 $X_1 \cup X_2 = X$. 設 Y 為 *topological space* 且 X_1, X_2 使用 X 的 *subspace topology,* 假設 $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ 皆為 *continuous* 且 $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall\, x \in X_1 \cap X_2$. 令 $f : X \to Y$ 為函數其定義為

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1; \\ f_2(x), & x \in X_2. \end{cases}$$

則 f 是 *continuous function.*

Proof. 首先注意, 由於 $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X_1 \cap X_2$, 所以 f 是 well-defined. 現要證明 f 是 continuous, 首先我們要說明當 S 是 Y 的 subset, $f^{-1}(S) = f_1^{-1}(S) \cup f_2^{-1}(S)$. 這是因為若 $x \in f_1^{-1}(S) \cup f_2^{-1}(S)$ 表示 $x \in f_1^{-1}(S)$ 或 $x \in f_2^{-1}(S)$. 而當 $x \in f_1^{-1}(S)$ 又表示 $x \in X_1$ 且 $f_1(x) \in S$, 此時自然得 $x \in X$ 且 $f(x) \in S$, 亦即 $x \in f^{-1}(S)$. 同理由 $x \in f_2^{-1}(S)$ 亦可得 $x \in f^{-1}(S)$. 反之如果 $x \in f^{-1}(S)$, 表示 $x \in X$ 且 $f(x) \in S$. 此時因 $X = X_1 \cup X_2$, 我們有 $x \in X_1$ 或 $x \in X_2$. 然而若 $x \in X_1$, 我們有 $f(x) = f_1(x)$, 因此此時可推得 $x \in f_1^{-1}(S)$. 同理當 $x \in X_2$, 可推得 $x \in f_2^{-1}(S)$. 因此得證 $f^{-1}(S) = f_1^{-1}(S) \cup f_2^{-1}(S)$.

現任取 Y 上的 open set U, 由前知 $f^{-1}(U) = f_1^{-1}(U) \cup f_2^{-1}(U)$. 然而因 f_1, f_2 為 continuous, 我們知 $f_1^{-1}(U), f_2^{-1}(U)$ 分別為 X_1, X_2 的 open set. 因此由 X_1, X_2 為 X 的 open sets 以及 Lemma 1.4.2, 可得 $f_1^{-1}(U), f_2^{-1}(U)$ 皆為 X 的 open set. 故由 $f^{-1}(U) = f_1^{-1}(U) \cup f_2^{-1}(U)$ 得知 $f^{-1}(U)$ 為 X 的 open set, 因而得證 $f : X \to Y$ 為 continuous. □

1.4.2. Disjoint Union Topology. 當兩個不相交 (交集為空集合) 的集合聯集起來, 就稱為是 disjoint union. 當 X_1, X_2 是兩個不相交的集合, 我們就特別用 $X_1 \sqcup X_2$ 來表示他們的聯集, 也就是說在這情況之下 $X_1 \sqcup X_2$ 和 $X_1 \cup X_2$ 其實是一樣的, 我們僅利用 $X_1 \sqcup X_2$ 這個符號強調 X_1, X_2 是不相交的.

當 X_1, X_2 是兩個不相交的 topological spaces 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為 X_1, X_2 的 topologies. 我們很自然可將 X_1, X_2 的 topologies 聯集起來, 即 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, 希望能形成 $X_1 \sqcup X_2$ 的 topology. 不過這樣不會是 $X_1 \sqcup X_2$ 的 topology, 至少 $X_1 \sqcup X_2$ 就不在 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ 中. 主要的原因就是依定義 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{S \mid S \in \mathcal{T}_1 \text{ or } S \in \mathcal{T}_2\}$. 所以若 $S_1 \in \mathcal{T}_1, S_2 \in \mathcal{T}_2$, 則 $S_1, S_2 \in \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2$ 但 $S_1 \cup S_2$ 並不會在 $\mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2$ 中. 要解決這個問題可令 $\mathcal{T} = \{S_1 \sqcup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{T}_1, S_2 \in \mathcal{T}_2\}$ 這樣一來就會成為 $X_1 \sqcup X_2$ 的 topology, 使得 $X_1 \sqcup X_2$ 成為 topological space, 我們稱為 *disjoint union topology.*

現在我們說明前面所提 $\mathcal{T} = \{S_1 \sqcup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{T}_1, S_2 \in \mathcal{T}_2\}$ 確為 $X_1 \sqcup X_2$ 的 topology. 首先 $\emptyset \in \mathcal{T}$, 這是因為 $\emptyset \in \mathcal{T}_1$ 且 $\emptyset \in \mathcal{T}_2$ 所以 $\emptyset = \emptyset \sqcup \emptyset \in \mathcal{T}$. 另一方面 $X_1 \in \mathcal{T}_1, X_2 \in \mathcal{T}_2$ 所以 $X_1 \sqcup X_2 \in \mathcal{T}$. 這說明了 Definition 1.2.1 的條件 (1) 是成立的. 現若 I 為 index set 且對於任意 $i \in I$, $U_i \in \mathcal{T}$, 即存在 $S_{i,1} \in \mathcal{T}_1$, $S_{i,2} \in \mathcal{T}_2$ 使得 $U_i = S_{i,1} \sqcup S_{i,2}$. 此時

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (S_{i,1} \sqcup S_{i,2}) = \bigcup_{i \in I} (S_{i,1} \cup S_{i,2}) = (\bigcup_{i \in I} S_{i,1}) \cup (\bigcup_{i \in I} S_{i,2}).$$

由於 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 為 topologies 我們有 $\bigcup_{i \in I} S_{i,1} \in \mathcal{T}_1$ 且 $\bigcup_{i \in I} S_{i,2} \in \mathcal{T}_2$, 故得證 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, 亦及條件 (2) 成立. 至於條件 (3), 我們僅要證明若 $U, U' \in \mathcal{T}$ 則 $U \cap U' \in \mathcal{T}$ 即可. 然而存在 $S_1, S'_1 \in \mathcal{T}_1$, $S_2, S'_2 \in \mathcal{T}_2$ 使得 $U = S_1 \sqcup S_2$, $U' = S'_1 \sqcup S'_2$, 故

$$U \cap U' = (S_1 \sqcup S_2) \cap (S'_1 \sqcup S'_2) = (S_1 \cap S'_1) \cup (S_2 \cap S'_2)$$

(注意 $S_1 \cap S'_2 = S_2 \cap S'_1 = \emptyset$), 因此再由 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 為 topologies 我們有 $S_1 \cap S'_1 \in \mathcal{T}_1$ 且 $S_2 \cap S'_2 \in \mathcal{T}_2$, 故得證 $U \cap U' \in \mathcal{T}$.

當 X_1, X_2 是兩個不相交的 topological spaces, 我們可以將 X_1, X_2 視為 $X_1 \sqcup X_2$ 的 subsets. 此時若考慮 $X_1 \sqcup X_2$ 上的 disjoint union topology, 再利用此 topology 考慮 X_1 的 subspace topology, 是否會和 X_1 原先的 topology 相同呢? 答案是肯定的, 這是因為 $X_1 \sqcup X_2$ 上的 open set 都是 $S_1 \sqcup S_2$ 其中 S_1, S_2 分別是 X_1, X_2 的 open set. 因此由 $(S_1 \sqcup S_2) \cap X_1 = S_1$, $(S_1 \sqcup S_2) \cap X_2 = S_2$, 我們知道 X_1, X_2 上使用 $X_1 \sqcup X_2$ 上的 subspace topology 所得的 open set 都會是 X_1, X_2 本身原來的 open set. 另外對於 X_1 上原本的 open set S_1, 如果考慮 $S_1 \sqcup \emptyset$ 會是 $X_1 \sqcup X_2$ 上 disjoint union topology 的 open set. 此時 $(S_1 \sqcup \emptyset) \cap X_1 = S_1$ 也會是 $X_1 \sqcup X_2$ 對 X_1 使用 subspace topology 的 open set. 所以 X_1 原本的 open set 也會是使用 $X_1 \sqcup X_2$ subspace topology 的 open set. 所以 X_1 上這兩種 topology 是一致的. 同理 X_2 的情況也會一致. 我們有以下的結果.

Proposition 1.4.5. 假設 X_1, X_2 是兩個不相交的 *topological spaces,* 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為其 *topology.* 現考慮 $X_1 \sqcup X_2$ 上的 *disjoint union topology* $\mathcal{T}$. 則 X_1 使用 $\mathcal{T}$ 的 *subspace topology* 就是 $\mathcal{T}_1$, 而 X_2 使用 $\mathcal{T}$ 的 *subspace topology* 就是 $\mathcal{T}_2$.

Question 1.27. 假設 X 為 topological space $\mathcal{T}$ 為其 topology. 又假設 $X_1, X_2 \subseteq X$ 且滿足 $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, 即 $X = X_1 \sqcup X_2$. 現考慮 X_1, X_2 上使用 X 的 subspace topology, 設其分別為 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$. 試問 $\mathcal{T}$ 是否為 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 的 disjoint union topology?

Proposition 1.4.5 告訴我們當 X_1, X_2 是兩個不相交的 topological spaces, 我們可以使用 $X_1 \sqcup X_2$ 上 disjoint union topology 的 subspace topology “還原” X_1, X_2 的 topology. 也因此對任意的 topological space Y 若 $X = X_1 \sqcup X_2$ 使用 disjoint union topology, 則任意的連續函數 $f : X \to Y$, 可以“拆解”成 $f|_{X_1} : X_1 \to Y$ 以及 $f|_{X_2} : X_2 \to Y$, 兩個連續函數. 另一方面, 由於 X_1, X_2 在 $X = X_1 \sqcup X_2$ 的 disjoint union topology 中皆為 open sets, 所以若 $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ 皆為連續函數, 則由於 $X_1 \cup X_2 = \emptyset$, 利用 Proposition 1.4.4 我們可得到一個從 $X = X_1 \sqcup X_2$ 到 Y 的連續函數, $f : X \to Y$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1; \\ f_2(x), & x \in X_2. \end{cases}$ 因此我們有以下之結論.

Proposition 1.4.6. 假設 X_1, X_2, Y 為 *topological spaces.* 令 $X = X_1 \sqcup X_2$ 且使用 X_1, X_2 的 *disjoint union topology.* 考慮

$$F = \{f \mid f : X \to Y \textit{ is continuous}\}, \quad F' = \{(f_1, f_2) \mid f_1 : X_1 \to Y,\ f_2 : X_2 \to Y \textit{ are continuous}\}$$

則 $f \mapsto (f|_{X_1}, f|_{X_2})$ 給了一個從 F 到 F' 上一個一對一且映成的對應關係.

Disjoint union topology 的概念也可以推廣到 X_1, X_2 有交集的情形. 此時我們可已將 X_1 想像成 $X_1' = \{(x,1) \mid x \in X_1\}$, 且將 X_2 想像成 $X_2' = \{(x,2) \mid x \in X_2\}$ 這樣的集合 (此時我們將 universal set X 換成 $X' = \{(x,i) \mid x \in X,\ i \in \{1,2\}\}$). 如此之下 X_1', X_2' 就沒有交集了, 我們因此定義 $X_1 \amalg X_2 = X_1' \sqcup X_2'$, 也稱之為 X_1, X_2 的 disjoint union. 由於 $X_1 \amalg X_2$ 這個 disjoint union 的定義與 X_1, X_2 是否相交無關, 且當 X_1, X_2 不相交時與 $X_1 \sqcup X_2$ 是一致的, 所以今後即使 X_1, X_2 不相交, 我們也都用 $X_1 \amalg X_2$ 表示 X_1, X_2 的 disjoint union.

要注意集合的 disjoint union 和我們以後要談的集合的 product 不同. 例如 $\mathbb{R}\amalg\mathbb{R}$ 的元素是 $(r,1)$ 或 $(s,2)$, 其中 $r,s\in\mathbb{R}$; 而 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的元素是 (r,s), 其中 $r,s\in\mathbb{R}$. 我們可以將 $\mathbb{R}\amalg\mathbb{R}$ 看成是坐標平面上兩條平行直線, 而 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 是整個坐標平面, 兩者差異非常大.

Question 1.28. 考慮開區間 $I_1=(-1,0)$, $I_2=(0,1)$, $I_3=(-0.5,0.5)$. 試比較 $I_1\cup I_2$, $I_1\amalg I_2$, $I_1\cup I_3$, $I_1\amalg I_3$ 的差異性.

當 X_1 是 topological space 且 $\mathcal{T}_1$ 為其 topology, 我們也可將 $X_1'=\{(x,1)\mid x\in X_1\}$ 視為 topological space. 亦即若 $S\in\mathcal{T}_1$, 令 $S'=\{(s,1)\mid s\in S\}$, 此時考慮 $\mathcal{T}_1'=\{S'\mid S\in\mathcal{T}_1\}$, 很容易證得 $\mathcal{T}_1'$ 就會是 X_1' 的 topology. 而且很容易知道利用這個 topology, 函數 $f:X_1\to X_1'$ 定義為 $f(x)=(x,1)$ 就會是一個一對一且映成的連續函數且為 open map, 亦即 f 是一個 homeomorphism. 也就是說 X_1 與 X_1' 是 homeomorphic, 我們可以將之視為是相同的拓樸空間. 同理若 X_2 為 topological space, 我們也將 X_2' 視為是和 X_2 相同的拓樸空間. 因此我們也利用 X_1',X_2' 的 disjoint union topology 得到 $X_1\amalg X_2$ 的 topology. 為了方便, 我們就直接稱這個 topology 為 X_1,X_2 的 disjoint union topology. 又由於我們將 X_1,X_2 視為 $X_1\amalg X_2$ 的 subset, 即 X_1',X_2', 所以前面 Proposition 1.4.5 及 Proposition 1.4.6 的結果都可以直接套用. 這裡我們將結果整理如下, 就不再證明了.

Proposition 1.4.7. 假設 X_1,X_2 是 *topological spaces,* 且 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 分別為其 *topology.* 現考慮 $X=X_1\amalg X_2$ 上的 *disjoint union topology* $\mathcal{T}$, 我們有以下之結果.

(1) X_1, X_2 使用 $\mathcal{T}$ 的 *subspace topology* 分別會是 $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$.

(2) 設 Y 為 *topological space.* 考慮

$$F=\{f\mid f:X\to Y \textit{ is continuous}\},\quad F'=\{(f_1,f_2)\mid f_1:X_1\to Y,\ f_2:X_2\to Y \textit{ are continuous}\}$$

則 $f\mapsto(f|_{X_1},f|_{X_2})$ 給了一個從 F 到 F' 上一個一對一且映成的對應關係.

Question 1.29. 考慮 $I_1=(-1,0)$, $I_2=(0,1)$, $I_3=(-0.5,0.5)$ 為 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology 的 subspaces. 試問 $I_1\cup I_2$, $I_1\cup I_3$ 使用 $\mathbb{R}$ 的 subspace topology, 而 $I_1\amalg I_2$, $I_1\amalg I_3$ 使用 disjoint topology, 這些 topological spaces 那些會是 homeomorphic?

最後我們附註說明一下, disjoint union topology 是可以推廣到多個 topological spaces 的情況, 其中的原理及性質與兩個的情況是一樣的, 我們就不再贅述了.

1.5. Product Space Topology and Quotient Space Topology

我們繼續介紹兩種製造新的 topological spaces 常用的方法. 其中 product space topology 常在拓展空間的維度時使用, 而 quotient space topology 常常在探討將一個拓樸空間上的一些點“黏”在一起時使用.

1.5.1. Product Space Topology. 假設 X_1, X_2 為集合, 我們定義它們的 *Cartesian product* $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. 有了 $X_1 \times X_2$ 我們自然有兩個 *projection* maps:

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \quad \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2,$$

其中 $\pi_1(x_1, x_2) = x_1, \pi_2(x_1, x_2) = x_2, \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. 當 X_1, X_2 為 topological spaces, 我們可以定義 $X_1 \times X_2$ 上的 topology 使得 π_1, π_2 皆為 continuous function. $X_1 \times X_2$ 上使得這個成立最弱的拓樸就是 product space topology.

假設 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為 X_1, X_2 的 topology, 我們看看如何定 $X_1 \times X_2$ 的 topology 會使得 π_1, π_2 為 continuous. 依 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ 需連續的要求, 對於任意 X_1 上的 open set U, 我們必須要求 $\pi_1^{-1}(U) = U \times X_2$ 為 $X_1 \times X_2$ 的 open set. 同理對任意 X_2 的 opens set V, $\pi_2^{-1}(V) = X_1 \times V$ 也應是 $X_1 \times X_2$ 的 open set. 所以很自然的我們會收集 $\{U \times X_2 \mid U \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times V \mid V \in \mathcal{T}_2\}$, 不過這不會是一個 topology. 雖然 $X_1 \times X_2$ 和 $\emptyset$ 在這個集合內 (因為 $\emptyset \times X_2 = \emptyset$), 但是若 $U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2$, 則 $(U \times X_2) \cap (X_1 \times V) = U \times V$ 未必在此集合內, 也就是說這樣收集的 open sets 並不符合 topology 定義 (3) 的要求. 所以我們必須擴大我們收集的集合為 $\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$. 這樣一來當 $U, U' \in \mathcal{T}_1$, $V, V' \in \mathcal{T}_2$, 我們有 $(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$ 仍然在此集合中 (因 $U \cap U' \in \mathcal{T}_1$, $V \cap V' \in \mathcal{T}_2$). 不過此時雖然 topology 定義 (3) 的要求成立了, 但是定義 (2) 的要求仍有問題. 這是因為 $(U \times V) \cup (U' \times V')$ 未必可以寫成 $U'' \times V''$ 的形式. 所以我們還必須擴大我們的集合需包含 $U \times V$ 這樣形式的集合的聯集, 換言之我們需要的是以 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ 為 basis 的 topology.

Question 1.30. 假設 X, Y 為集合. 考慮 Cartesian product $X \times Y$.

(1) 試證明對任意 $S \subseteq X$, $S \times \emptyset = \emptyset$.
(2) 試證明若 $S, S' \subseteq X$, $T, T' \subseteq Y$, 則 $(S \times T) \cap (S' \times T') = (S \cap S') \times (T \cap T')$.
(3) 試找出例子 $S, S' \subseteq X$, $T, T' \subseteq Y$ 使得 $(S \times T) \cup (S' \times T')$ 無法寫成 $S'' \times T''$, $S'' \subseteq X$, $T'' \subseteq Y$ 的形式.

是否存在以 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ 為 basis 的 topology 呢? 並不是任意的集合都可以是某個 topology 的 basis, 回顧一下 Proposition 1.2.4 便是告訴我們可以形成一個 topology 的 basis 的充要條件. 然而 $X_1 \in \mathcal{T}_1$, $X_2 \in \mathcal{T}_2$, 所以 $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$, 因此 Proposition 1.2.4 條件 (1) 是符合的. 另外若 $S_1 = U \times V$, $S_2 = U' \times V'$ 皆在 $\mathcal{B}$ 中, 則由於 $S_1 \cap S_2 = (U \cap U') \times (V \cap V')$ 也在 $\mathcal{B}$ 中, 故 Proposition 1.2.4 條件 (2) 也符合. 因此會存在一個唯一的 $X_1 \times X_2$ 的 topology 是以 $\mathcal{B}$ 為 basis. 又因為如前面所述, 要使得 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ 以及 $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ 為 continuous, $\mathcal{B}$ 中的元素皆必須是 open set, 所以這樣造出的 topology 會是 $X_1 \times X_2$ 上使得 π_1, π_2 皆為 continuous function 最弱的拓樸. 於是我們有以下的定義.

Definition 1.5.1. 假設 X_1, X_2 為 topological spaces 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 分別為其 topology. 考慮以 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ 為 basis 所形成的 $X_1 \times X_2$ 的 topology, 我們稱此 topology

為 X_1, X_2 的 *product space topology.* $X_1 \times X_2$ 以 product space topology 形成的 topological space, 便稱為 X_1, X_2 的 *product space.*

Example 1.5.2. 考慮 $\mathbb{R}$ 為以使用 $d_1(x,x') = |x-x'|$ 為 metric 的 metric space, $\mathbb{R}^2$ 為以使用 $d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ 為 metric 的 metric space. 利用這兩個 topology, 很容易驗證 projection $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 為 continuous. 這是因為對於所有實數 $r < s$ 開區間 $\{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}$ 形成 $\mathbb{R}$ 的 basis, 而

$$\pi_1^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid r < x < s\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < x < s, y \in \mathbb{R}\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的 open set. 事實上令 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r < x < s, y \in \mathbb{R}\}$, 對 S 中任意一點 $p(x,y) \in S$, 考慮 $\lambda = \min\{x-r, s-x\} > 0$, 則 p 在以 p 為圓心半徑為 λ 的開圓 $B(p;\lambda)$ 內且 $B(p;\lambda) \subseteq S$. 故由 metric space topology 的定義知 S 是 $\mathbb{R}^2$ 的 open set.

同樣的 projection $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 也是 continuous. 所以由 product space topology 的定義知 $\mathbb{R}^2$ 看成 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 product space topology 是弱於其 metric space topology. 也就是說 $\mathbb{R}^2$ 使用 product space topology 上的 open set 也會是 metric space topology 上的 open set. 不過這裏我們要說的是, 事實上這兩個拓樸是相同的, 也就是說 $\mathbb{R}^2$ 的 metric space topology 上的 open set 也會是 product space topology 上的 open set. 這是因為對 $\mathbb{R}^2$ 上任意的開圓 $B(p,\lambda)$ 內一點 $q(x,y)$, 由於 $d_2(p,q) < \lambda$ 我們可以取 $\varepsilon > 0$ 夠小 (例如 $\varepsilon < (\lambda - d_2(p,q))/\sqrt{2}$) 使得 $I_1 \times I_2$ 包含於 $B(p,\lambda)$ 中, 其中 I_1, I_2 分別為開區間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. 也就是說 $\mathbb{R}^2$ 中 metric space topology 的 basis 的元素 (即開圓) 都可以寫成 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的 product space topology 的 basis 中一些元素的聯集, 這說明了 metric space topology 的 open set 就是 product space topology 的 open set, 所以這兩個拓樸是相同的.

Question 1.31. 試說明 $\mathbb{R}^2$ 中任意的矩形內部一點皆可以用該點為圓心做一個包含於該矩形內部的圓, 並依此說明 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 使用 product space topology 的 open set 就是 $\mathbb{R}^2$ 中使用 metric space topology 的 opens set.

Product space topology 主要是讓 projection maps 為 continuous. 現若 Z 為 topological space, 而 $X_1 \times X_2$ 為 topological spaces X_1, X_2 的 product space, 給定一函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 我們可得到兩個函數 $g_1 : Z \to X_1$ 和 $g_2 : Z \to X_2$, 其中 $g_1 = \pi_1 \circ g$, $g_2 = \pi_2 \circ g$. 因為使用 product space topology, 所以 π_1, π_2 是 continuous. 故如果 g 為 continuous, 由 Proposition 1.3.4 知 g_1, g_2 皆為 continuous.

Question 1.32. 設 Z 為 topological space, 而 $X_1 \times X_2$ 為 topological spaces X_1, X_2 的 product space. 若函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 為 open map, 是否 $g_1 = \pi_1 \circ g$, $g_2 = \pi_2 \circ g$ 亦為 open map?

接下來我們要說明, 前面所提的, 反過來也是對的, 即 product space topology 幫我們將兩個定義域相同的連續函數連結成一個連續函數. 也就是說如果 Z, X_1, X_2 皆為 topological spaces, 且 $g_1 : Z \to X_1, g_2 : Z \to X_2$ 為連續函數, 我們可利用 X_1, X_2 的 product space $X_1 \times X_2$, 得到一個新的函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 其定義為: $g(z) = (g_1(z), g_2(z))$, $\forall z \in Z$. 很容

易看出 g 是 well-defined function, 這個函數通常我們會用 $g_1 \times g_2$ 來表示, 不過這裡為了符號的方便性, 我們暫時用 g 來表示. 要探討 g 是否連續, 由 Proposition 1.3.3, 我們只需了解 product space $X_1 \times X_2$ 的 basis 的元素 $U \times V$ (其中 U, V 分別為 X_1, X_2 的 open set) 是否會使得 $g^{-1}(U \times V)$ 為 Z 的 open set. 事實上 $g^{-1}(U \times V)$ 會等於 $g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$. 這是因為 $z \in g^{-1}(U \times V)$ 等同於 $g(z) = (g_1(z), g_2(z)) \in U \times V$, 亦即 $g_1(z) \in U$ 且 $g_2(z) \in V$, 即 $z \in g_1^{-1}(U)$ 且 $z \in g_2^{-1}(V)$. 得證 $g^{-1}(U \times V) = g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$. 現由於 g_1, g_2 為 continuous, 故知 $g_1^{-1}(U), g_2^{-1}(V)$ 皆為 Z 的 open set, 故 $g^{-1}(U \times V) = g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(V)$ 為 Z 的 open set, 得證 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 為 continuous. 我們有以下的定理.

Proposition 1.5.3. 假設 Z, X_1, X_2 是 *topological spaces,* 現考慮 X_1, X_2 的 *product space* $X_1 \times X_2$. 若 $g_1 : Z \to X_1$, $g_2 : Z \to X_2$ 為 *continuous,* 則存在 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 為 *continuous,* 滿足 $g_1 = \pi_1 \circ g$, $g_2 = \pi_2 \circ g$.

Question 1.33. 設 Z 為 topological space, 而 $X_1 \times X_2$ 為 topological spaces X_1, X_2 的 product space. 若函數 $g_1 : Z \to X_1$, $g_2 : Z \to X_2$ 皆為 open map. 在 Proposition 1.5.3 中所得的函數 $g : Z \to X_1 \times X_2$ 是否為 open map? (Hint: 考慮 X_1, X_2, Z 為 $\mathbb{R}$ 且 g_1, g_2 為 identity map 的情況.)

Proposition 1.5.3 是 product space 重要的性質, 我們常用以下的圖示來表達這個性質:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "g"] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\
& X_1 \times X_2 \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & X_2 \\
& X_1 &
\end{tikzcd}$$

這樣的圖示, 我們稱之為 *commutative diagram.*

從前面的討論我們知道若令 $X = X_1 \times X_2$, 考慮

$$G = \{g \mid g : Z \to X \text{ is continuous}\},\ G' = \{(g_1, g_2) \mid g_1 : Z \to X_1,\ g_2 : Z \to X_2 \text{ are continuous}\}$$

則 $g \mapsto (\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g)$ 給了一個從 G 到 G' 上一個對應關係. 很容易看出這個對應關係是一對一的, 因為若 $g, g' \in G$ 且 $g \neq g'$, 則表示存在 $z \in Z$ 使得 $g(z) \neq g'(z)$ in $X_1 \times X_2$. 也就是說 $(\pi_1(g(z)), \pi_2(g(z))) \neq (\pi_1(g'(z)), \pi_2(g'(z)))$. 而 Proposition 1.5.3 告訴我們這個對應也是映成的, 因此我們有以下的結果.

Corollary 1.5.4. 假設 Z, X_1, X_2 是 *topological spaces,* 現考慮 X_1, X_2 的 *product space* $X = X_1 \times X_2$. 令

$$G = \{g \mid g : Z \to X \textit{ is continuous}\},\ G' = \{(g_1, g_2) \mid g_1 : Z \to X_1,\ g_2 : Z \to X_2 \textit{ are continuous}\}$$

則 $g \mapsto (\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g)$ 給了一個從 G 到 G' 上一個一對一且映成的對應關係.

Question 1.34. 試說出 Proposition 1.4.7 和 Corollary 1.5.4 有關連續函數的性質的差異. 並試著畫出有關 Proposition 1.4.7 的 commutative diagram.

Product space 的概念可以推廣到兩個以上的 topological spaces 的情況. 例如當 X_1, X_2, X_3 是 topological spaces 且 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ 分別為其 topology, 我們可以定 product space $X_1 \times X_2 \times X_3$ 其 topology 為以 $\{U \times V \times W \mid U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2, W \in \mathcal{T}_3\}$ 為 basis 的 topology. 事實上我們可以定義任意多個 topological spaces 的 product space. 當 I 是 index set, 且對任意 $i \in I$, X_i 為 topological space 及 $\mathcal{T}_i$ 為其 topology, 我們定義它們的 product space 為 $\prod_{i \in I} X_i$. 不過這裡要注意, 它的 topology 的 basis 並不是以 $\mathcal{B}' = \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$ 為 basis 的 topology. 而是以

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i, \text{ and } U_i = X_i \text{ for almost all } i \in I\}$$

為 basis 的 topology. 這裡 $U_i = X_i$ for almost all $i \in I$ 意指幾乎所有的 $i \in I$ 都要求 $U_i = X_i$, 更明確的說法是除了有限多個 (但不規定是那些個) $U_i \in \mathcal{T}_i$ 可以不是 X_i 外, 其餘的 U_i 皆需為 X_i. 為何會這樣呢? 首先大家需了解, 當 I 為 finite set 時, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. 也就是說在談有限多個 topological spaces 的 product space 時, 以 $\mathcal{B}'$ 或 $\mathcal{B}$ 為 basis 所得的 topology 是一樣的. 但是當 I 是 infinite set 時, $\mathcal{B}'$ 的元素遠比 $\mathcal{B}$ 會多得多, 也就是說當談論無限多個 topological spaces 的 product space 時, 以 $\mathcal{B}'$ 為 basis 所得的 topology 會比以 $\mathcal{B}$ 為 basis 所得的 topology 強得多. 回顧一下當初我們定 product space topology 時要求的是 $\prod_{i \in I} X_i$ 上最弱的拓樸使得對任意 $j \in I$, projection map $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ 是 continuous. 也因此對於 $U_j \in \mathcal{T}_j$ (即 U_j 為 X_j 的 open set) 我們要求 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 為 $\prod_{i \in I} X_i$ 的 open set. 不過 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 其實是在 j 的位置是 U_j, 其他的 $i \in I$ 的位置皆為 X_i 的 subset. 這樣的 subset 無法保持拓樸中有限多個的交集仍為這樣形式的 subset, 所以我們必須要求有限多個 $\pi_j^{-1}(U_j)$ 這樣的 subset 的交集仍為 open set. 這樣的交集就是僅有有限多個 $j \in I$ 的位置不是 X_j, 其他 $i \in I$ 的位置皆為 X_i 這樣形式的 subset. 因此僅需加入如 $\mathcal{B}$ 中的元素這樣的 subsets, 便足以利用 Proposition 1.2.4, 使得 $\mathcal{B}$ 為某個 topology 的 basis. 所以請記住, 當 I 為 infinite set 時, product space 的 basis 應為 $\mathcal{B}$ 這樣的集合. 另外多個 topological spaces 的 product space 也會有類似 Proposition 1.5.3 的性質, 請大家自行推廣.

1.5.2. Quotient Space Topology. 在集合 X 中給定一個 equivalence relation $\sim$ 後, 我們可以利用此 equivalence relation 將 X 的元素分類: 就是將在這 relation 之下是相關的元素視為同類. 若我們將同類的元素視為同一個元素, 這樣收集這些新的元素所成的集合, 告訴我們有關利用此 equivalence relation 分類後, 各類別的訊息. 這個集合我們就用 $X/\sim$ 表示. $X/\sim$ 和 X 是截然不同的集合, 不過它們之間有這密切的關係. 當 X 是 topological space 時, 我們將學習如何定義 $X/\sim$ 的 topology, 即 quotient space topology.

我們簡單的回顧一下 equivalence relation. 集合 X 上的 relation, 若符合以下三個性質, 則稱此 relation 為 *equivalence relation*

Reflexive: 對所有 $x \in X$, 皆有 $x \sim x$.

Symmetric: 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \sim y$, 則 $y \sim x$.

Transitive: 若 $x, y, z \in X$ 滿足 $x \sim y$ 且 $y \sim z$, 則 $x \sim z$.

有了一個 equivalence relation $\sim$ 之後, 我們便可以將 X 的元素分類. 分類的方式為: 若 $x \sim y$, 則將 x, y 視為同類. 對任意 $x \in X$, 我們將所有與 x 同類的元素收集起來所成的集合用 $[x]$ 來表示, 即 $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. 這個集合稱為 x 的 *equivalence class*. 依 equivalence relation 的性質, 我們知道 equivalence class 有以下的性質:

(1) $x \in [x]$, $\forall\, x \in X$.

(2) $[x] \cap [y] = \begin{cases} [x](=[y]), & \text{if } x \sim y; \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$

依此性質, 這些 equivalence classes 將集合 X 分割成一個個互不相交的子集合. 這些子集合的聯集就是 X, 且互不相交, 這樣的分割方式稱為 X 的一個 *partition*. 反過來, 如果在集合 X 上有一個 partition 的分割, 我們便可以令在分割的同一個子集合的元素為同類, 這樣定出的 relation 也會是一個 equivalence relation. 換言之給了一個集合 X 上的 partition 等同於定義了 X 上的一個 equivalence relation.

我們可以將 equivalence class $[x]$ 內的元素都視為相同, 而得到一個新的元素, 用 $\overline{x}$ 來表示. 也就是說 $\overline{x} = \overline{y}$ 等同於 $x \sim y$ 也等同於 $[x] = [y]$; 而 $\overline{x} \neq \overline{y}$ 等同於 $x \nsim y$ 也等同於 $[x] \neq [y]$. 我們將這些分類後同類視為相等的新的元素收集起來所得的集合 $\{\overline{x} \mid x \in X\}$ 用 $X/\sim$ 表示. 注意, 有的參考書籍將 $X/\sim$ 的元素仍用 equivalence class $[x]$ 表示. 而這裡我們刻意區分 $\overline{x}$ 和 $[x]$ 的不同, $\overline{x}$ 表示的是 $X/\sim$ 中的元素, 而 $[x]$ 表示的是 X 的子集合.

Example 1.5.5. 考慮 X 為 $\mathbb{R}$ 中的閉區間 $[0,1]$, 定義其中的 equivalence relation 為

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

也就是說在此 equivalence relation 之下, 當 $0 < x < 1$ 時, equivalence class $[x] = \{x\}$ 僅有一個元素, 而 $[0] = [1] = \{0,1\}$ 有兩個元素. 也就是說當 $0 < x < 1$ 時 $\overline{x} \in X/\sim$ 可視為原來在 X 上的點, 不過 $\overline{0} = \overline{1} \in X/\sim$ 就好像把 X 上 $0, 1$ 這兩點“黏”成一點. 所以我們可以將 $X/\sim$ “看成”是一個圓 (circle).

考慮 X 為 $\mathbb{R}^2$ 上的正方形及其內部 $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 定義 X 上的 equivalence relation 為

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow x = x', y - y' \in \mathbb{Z}.$$

當 $0 \leq x \leq 1$ 時, 若 $0 < y < 1$, 我們有 (x,y) 的 equivalence class $[(x,y)] = \{(x,y)\}$, 僅有一個元素; 而 $(x,0)$ 的 equivalence class $[(x,0)] = \{(x,0),(x,1)\}$, 有兩個元素. 所以 $X/\sim$ 就好像將 X 上將兩線段 $\{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $\{(x,1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 上相對的兩點 $(x,0),(x,1)$ “黏”成一點. 所以 $X/\sim$ 就像把正方形上下兩對邊黏起來, 所以我們可以將 $X/\sim$ “看成”是一個圓柱 (cylinder).

Question 1.35. 考慮 X 為 $\mathbb{R}^2$ 上的正方形及其內部 $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 定義 X 上的 equivalence relation 為

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ and } y = y') \text{ or } (x + x' = 1 \text{ and } |y - y'| = 1).$$

當 $0 \le x \le 1$, $0 < y < 1$, 試寫下 equivalence class $[(x,y)]$. 又 equivalence class $[(x,0)]$ 為何? 你看得出 $X/\sim$ 是所謂的 *Möbius band* 嗎?

從 Example 1.5.5 及 Question 1.35, 我們看出 X 和 $X/\sim$ 是完全不同的集合, 千萬不要誤以為 $X/\sim$ 會是 X 的 subset. 既然 $X/\sim$ 是一個和 X 有關的新的集合, 當 X 是 topological space 時, 我們自然想在 $X/\sim$ 中定出一個與 X 相關的 topology.

當 X 是 topological space 且 $\mathcal{T}$ 為其 topology, 給定 X 上的一個 equivalence relation $\sim$, 會有一個很自然的函數從 X 送到 $X/\sim$. 即 $q : X \to X/\sim$ 定義為 $q(x) = \overline{x}$, $\forall x \in X$. 這個函數一般稱為 *quotient map* 或是 *nature map*. 我們希望定義 $X/\sim$ 上的拓樸使得 q 是 continuous. 不過要記得, $X/\sim$ 的拓樸越弱, 表示其 open set 越少, 因此會越容易讓 q 是 continuous (例如 $X/\sim$ 選最弱的 indiscrete topology, 就一定會讓 q 是 continuous). 所以這裡我們要找的是 $X/\sim$ 上使得 q 是 continuous 的拓樸中最強的 topology. 既然是要找最強的, 我們當然是收集那些 $X/\sim$ 上的 subset S 使得 $q^{-1}(S)$ 會是 X 的 open set, 因此我們會考慮 $\tilde{\mathcal{T}} = \{S \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(S) \in \mathcal{T}\}$. 當然了, 若 $\tilde{\mathcal{T}}$ 是 $X/\sim$ 的 topology, 這個 topology 就是使得 q 是 continuous 最強的 topology. 這是因為 $\tilde{\mathcal{T}}$ 以外的 $S' \subseteq X/\sim$, 不能使得 $q^{-1}(S')$ 是 X 的 open set, 所以如果多加了這些 S' 進來, q 就不再是 continuous 了. 因此我們僅要證明 $\tilde{\mathcal{T}}$ 確為 $X/\sim$ 上的 topology.

為了方便起見, 我們用 $\tilde{X}$ 表示 $X/\sim$. 要證明 $\tilde{\mathcal{T}}$ 確為 $\tilde{X}$ 上的 topology, 首先檢查 $\tilde{X}$ 和 $\emptyset$. 因為 $q^{-1}(\tilde{X}) = X \in \mathcal{T}$ 且 $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$, 故知 $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}}$ 和 $\emptyset \in \tilde{\mathcal{T}}$. 即 topology 的性質 (1) 成立. 至於性質 (2), 我們考慮 index set I, 且對於任意 $i \in I$, 皆有 $S_i \in \tilde{\mathcal{T}}$, 即 $q^{-1}(S_i) \in \mathcal{T}$. 此時利用 $\mathcal{T}$ 為 X 的 topology 得

$$q^{-1}(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcup_{i\in S} q^{-1}(S_i) \in \mathcal{T},$$

即 $\bigcup_{i\in I} S_i \in \tilde{\mathcal{T}}$. 最後, 若 $S_1, S_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$, 表示 $q^{-1}(S_1), q^{-1}(S_2) \in \mathcal{T}$. 所以再次利用 $\mathcal{T}$ 為 X 的 topology 得

$$q^{-1}(S_1 \cap S_2) = q^{-1}(S_1) \cap q^{-1}(S_2) \in \mathcal{T},$$

得證 $S_1 \cap S_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$, 即性質 (3) 成立. 我們有以下的定義.

Definition 1.5.6. 假設 X 是 topological space 且 $\mathcal{T}$ 為其 topology, 給定 X 上的一個 equivalence relation $\sim$. 考慮 $X/\sim$ 上使得 quotient map $q : X \to X/\sim$ 為 continuous 最強的 topology $\tilde{\mathcal{T}} = \{S \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(S) \in \mathcal{T}\}$. 此 topology 稱為 *quotient space topology*, 而 $X/\sim$ 利用 quotient space topology 所形成的 topological space, 便稱為 X 在 quotient $\sim$ 之下的 *quotient space*.

Question 1.36. 設 X, Y 為非空集合. 給定函數 $f : X \to Y$.

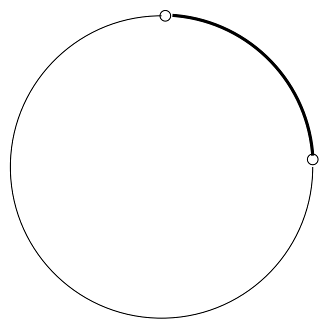
(1) 假設 X 是 topological space 且 $\mathcal{T}$ 為其 topology. 試問 Y 上使得 $f : X \to Y$ 為 continuous 最強的 topology 為何?

(2) 假設 Y 是 topological space 且 $\mathcal{T}'$ 為其 topology. 試問 X 上使得 $f : X \to Y$ 為 continuous 最弱的 topology 為何?

Example 1.5.7. 考慮 X 為 $\mathbb{R}$ 中的閉區間 $[0,1]$, 定義其中的 equivalence relation 為

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

將 X 視為 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 的 subspace. 我們試著描繪 quotient space $X/\sim$ 的 open set. 當 $S \subseteq X/\sim$ 且 $\overline{0} \notin S$, 此時 $q^{-1}(S) = \{x \in X \mid \overline{x} \in S\} \subseteq X \setminus \{0,1\}$ 就是 $(0,1)$ 這個開區間的子集合. 此時由 Lemma 1.4.2 知 $q^{-1}(S)$ 是 open 若且唯若 $q^{-1}(S)$ 是開區間 $(0,1)$ 中一些開區間的聯集. 也就是說, 在這種情況, S 是由 $I_{r,s} = \{\overline{x} \in X/\sim \mid r < x < s\}$, 其中 $0 < r < s < 1$ 這樣的集合聯集而成. 至於另一種情況, 也就是 $S \subseteq X/\sim$ 且 $\overline{0} \in S$. 此時 $\{0,1\} \subseteq q^{-1}(S) = \{x \in X \mid \overline{x} \in S\}$. 因此若 $q^{-1}(S)$ 在 X 是 open, 表示 $q^{-1}(S)$ 必包含 0 和 1 的 open neighborhood. 依 subspace topology 的定義, 這表示 $q^{-1}(S)$ 必包含 $[0,r)$ 和 $(s,1]$, 其中 $0 < r,s < 1$ 這樣的半開半閉的區間. 因此在這種情況, S 是由 $C_{r,s} = \{\overline{x} \in X/\sim \mid 0 \leq x < r \text{ or } s < x \leq 1\}$ 這樣的集合與 $I_{r,s}$ 這樣的集合 $(0 < r < s < 1)$ 聯集而成. 換言之, $X/\sim$ 這個 quotient space topology 的 basis 可以由 $I_{r,s}, C_{r,s}$ 其中 $0 < r < s < 1$ 這樣的集合所組成. 如果我們將 $X/\sim$ 看成是一個 circle, 這些 basis 的元素, 就是在此圓上任意的開區間 (不必在意 $\overline{0} = \overline{1}$ 在哪裡), 如下圖所示.



Question 1.37. 試描繪 Example 1.5.5 中的 quotient space "cylinder" 和 Question 1.35 中的 quotient space " Möbius band", 它們的 basis 中的元素為何.

當 X 是 topological space 且 $\sim$ 為 X 上的 equivalence relation, 考慮 quotient space $X/\sim$. 如果有一個 topological space Y 及一函數 $h : (X/\sim) \to Y$ 是 continuous, 我們很自然可得函數 $f : X \to Y$, 其定義為 $f(x) = h(\overline{x})$, $\forall x \in X$ (亦即 $f = h \circ q$). 函數 f 有兩個特性. 首先, 由於 q 以及 h 皆為 continuous, 由 Proposition 1.3.4 知 $f : X \to Y$ 亦為 continuous. 另外如果 $x \sim x'$, 此時由於 $\overline{x} = \overline{x'}$ 故依 f 的定義, 得 $f(x) = h(\overline{x}) = h(\overline{x'}) = f(x')$. 下一個有關 quotient space 重要的性質是說, 反過來也是對的.

Proposition 1.5.8. 假設 X 是 *topological spaces* 且 $\sim$ 為 X 上的 *equivalence relation,* 考慮 *quotient space* $X/\sim$. 若 Y 為 *topological space* 且函數 $f : X \to Y$ 是 *continuous* 滿足 $f(x) = f(x')$, $\forall x \sim x'$, 則存在函數 $h : (X/\sim) \to Y$ 為 *continuous* 且滿足 $f = h \circ q$.

Proof. 首先我們必須找到函數 $h : (X/\sim) \to Y$ 滿足 $f = h \circ q$, 再說明 h 是 continuous 即可. 由於要求 $f = h \circ q$, 對於任意 $\overline{x} \in X/\sim$, 我們自然希望 $h(\overline{x}) = h(q(x)) = f(x)$. 不過這樣定義的 h 可能會有問題, 我們必須說明它是 well-defined. 也就是說, 任意的 $X/\sim$ 中的元素,

雖然都可以用 $\overline{x}$ 其中 $x\in X$ 這樣的方式表示, 不過這樣的表法並不唯一, 也就是有可能存在 $x'\in X$ 且 $x'\neq x$ 但在 $X/\sim$ 中 $\overline{x'}=\overline{x}$. 此時若 $f(x)\neq f(x')$ 便會造成 h 將同樣的元素 $\overline{x}=\overline{x'}$ 映射到不同的元素 $h(\overline{x})=f(x)$ 和 $h(\overline{x'})=f(x')$, 這種一對多, 不符合函數定義的情況. 然而在 f 的性質中, 告訴我們如果 $\overline{x}=\overline{x'}$, 即 $x\sim x'$, 此時 $f(x)=f(x')$. 也就是說, 我們擔心一對多的情況不會發生, 因此這樣定義出的 h 確為函數.

接下來我們證明 $h:(X/\sim)\to Y$ 為 continuous. 對任意 Y 的 open set U, 我們要說明 $h^{-1}(U)$ 在 $X/\sim$ 中是 open. 依 quotient space topology 的定義, 要檢查 $h^{-1}(U)$ 是否在 $X/\sim$ 中 open, 就等同於檢查 $q^{-1}(h^{-1}(U))$ 是否在 X 中 open. 然而 $q^{-1}(h^{-1}(U))=(h\circ q)^{-1}(U)=f^{-1}(U)$, 故由 f 是 continuous 的假設, 得知 $q^{-1}(h^{-1}(U))$ 是 X 的 open set, 因此知 $h^{-1}(U)$ 是 $X/\sim$ 的 open set. 得證 $h:(X/\sim)\to Y$ 是 continuous. □

Proposition 1.5.8 可以用下面的 commutative diagram 來表示.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/\sim \arrow[r, dotted, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

從前面的討論我們知道當 X,Y 為 topological spaces, $\sim$ 為 X 上的 equivalence relation 以及 $X/\sim$ 為其 quotient space. 考慮 $H=\{h\mid h:(X/\sim)\to Y,\ h \text{ is continuous}\}$ 以及

$$F=\{f\mid f:X\to Y,\ f \text{ is continuous and } f(x)=f(x'),\ \forall\, x\sim x'\}$$

則 $h\mapsto h\circ q$ 給了一個從 H 到 F 上一個對應關係. 很容易看出這個對應關係是一對一的, 因為若 $h,h'\in H$ 且 $h\neq h'$, 則表示存在 $\overline{x}\in X/\sim$ 使得 $h(\overline{x})\neq h'(\overline{x})$ in Y. 也就是說 $h\circ q(x)\neq h'\circ q(x)$. 而 Proposition 1.5.8 告訴我們這個對應也是映成的, 因此我們有以下的結果.

Corollary 1.5.9. 假設 X,Y 為 *topological space,* $\sim$ 為 X 上的 *equivalence relation* 以及 $X/\sim$ 為其 *quotient space.* 令 $H=\{h\mid h:(X/\sim)\to Y,\ h \text{ is continuous}\}$ 以及

$$F=\{f\mid f:X\to Y,\ f \text{ is continuous and } f(x)=f(x'),\ \forall\, x\sim x'\}$$

則 $h\mapsto h\circ q$ 給了一個從 H 到 F 上一個一對一且映成的對應關係.

Question 1.38. 假設 Z,X 為 topological space, $\sim$ 為 X 上的 equivalence relation 以及 $X/\sim$ 為其 quotient space. 假如函數 $g:Z\to X$ 為 continuous, 則 $q\circ g:Z\to X/\sim$ 為 continuous; 但是反過來對嗎? 也就是說若函數 $h:Z\to X/\sim$ 是 continuous, 是否一定存在 $g:Z\to X$ 是 continuous 滿足 $h=q\circ g$? (Hint: 考慮 Example 1.5.7 的 X 以及 $\sim$, 並考慮 $Z=X/\sim$ 且 h 為 identity 的情形.)

Example 1.5.10. 當 X 為 topological space, X_1,X_2 為 X 的 open set. 考慮 $X_1\cup X_2$ 為 X 的 subspace (使用 subspace topology). 我們也可考慮 X_1,X_2 的 disjoint union $X_1\amalg X_2$, 考慮其 disjoint union topology. 我們有函數 $f_1:X_1\to X_1\cup X_2$, 定義為 $f_1(x)=x,\ \forall\, x\in X_1$. 我們還有函數 $f_2:X_2\to X_1\cup X_2$, 定義為 $f_2(x)=x,\ \forall\, x\in X_2$. 由於 f_1,f_2 皆為 continuous, 由

Proposition 1.4.7, 我們得到一個連續函數 $f: X_1 \amalg X_2 \to X_1 \cup X_2$, 滿足 $f|_{X_1} = f_1$, $f|_{X_2} = f_2$. 函數 f 事實上也會是 open map, 這是因為 $X_1 \amalg X_2$ 的 open set 可表為 $U_1 \amalg U_2$, 其中 U_1, U_2 分別為 X_1, X_2 的 open set. 因此由 $f(U_1 \amalg U_2) = U_1 \cup U_2$, 知 $f(U_1 \amalg U_2)$ 為 $X_1 \cup X_2$ 的 open set.

現考慮 $X_1 \amalg X_2$ 上的一個 equivalence relation $\sim$, 其定義為對任意 $i, j \in \{1,2\}$, $(x,i) \sim (y,j)$ 若且唯若 $x = y$. 也就是說一般來說若 $x \in X_1$ (resp. $x \in X_2$) 則有 $(x,1) \sim (x,1)$ (resp. $(x,2) \sim (x,2)$). 而若 $x \in X_1 \cap X_2$, 則除了 $(x,1) \sim (x,1)$ 且 $(x,2) \sim (x,2)$ 外, 還有 $(x,1) \sim (x,2)$. 很容易驗證這是 $X_1 \amalg X_2$ 的一個 equivalence relation. 現考慮 quotient space $(X_1 \amalg X_2)/\sim$. 由於當 $(x,i) \sim (x,j)$ 時, 我們有 $f(x,i) = f(x,j) = x$, 故由 f 是 continuous 以及 Proposition 1.5.8, 我們得到一函數 $h: ((X_1 \amalg X_2)/\sim) \to X_1 \cup X_2$ 滿足 $f = h \circ q$, 其中 h 為 continuous. 又因 f 是 open map, 故由 Exercise 1.19 知 h 亦為 open map. 最後我們很容易檢查 h 為 one-to-one 以及 onto, 得知 $X_1 \cup X_2$ 和 $(X_1 \amalg X_2)/\sim$ 這兩個 topological space 事實上是 homeomorphic.

Question 1.39. 假設 X, Y 為 topological space, X_1, X_2 為 X 的 open set. 對於 X_1, X_2 的 disjoint union $X_1 \amalg X_2$, 考慮其 disjoint union topology. 今有兩連續函數 $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ 滿足 $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X_1 \cap X_2$. 試找到 $X_1 \amalg X_2$ 上的 equivalence relation $\sim$, 以及一函數 $f: ((X_1 \amalg X_2)/\sim) \to Y$ 滿足 $f\big(\overline{(x,i)}\big) = f_i(x)$, $\forall\, i \in \{1,2\}, x \in X_i$, 並證明 f 為 continuous, 其中 $(X_1 \amalg X_2)/\sim$ 使用 quotient space topology. 試說明此結果與 Proposition 1.4.4 的關係.

Exercise

Excecise 1.1. 假設 X 為非空集合, 定義 $d: X \times X \to [0, \infty)$ 為 $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$ 試證明 d 為 X 上的一個 metric 並說明利用此 metric 所定出的 topology 就是 discrete topology.

Excecise 1.2. 假設 $\mathcal{T}$ 是 X 的 topology 且 $\mathcal{B}$ 為 $\mathcal{T}$ 的一組 basis. 試證明若 $\mathcal{T}'$ 亦為 X 的 topology 且 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}'$, 則 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, 並依此證明 X 上所有包含 $\mathcal{B}$ 的 topology 的交集就是 $\mathcal{T}$.

Excecise 1.3. 考慮 $\mathbb{R}^2$ 中的 standard topology, 即以

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

所定義的 metric space. 對任意一點 $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 以及 $r > 0$, 我們定義

$$\mathrm{Sq}(\mathbf{p}, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < r, |y - y_0| < r\}.$$

證明 $\{\mathrm{Sq}(\mathbf{p}, r) : \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 standard topology 的一組 basis

Excecise 1.4. 假設 X 是一個 metric space. 試證明對於任意 $x \in X$, 集合 $\{x\}$ 是 closed set.

Excecise 1.5. 對任意 $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ 令 $N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$. 考慮 $\mathcal{B} = \{N_{a,b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$.

(1) 利用中國剩餘定理說明 $\mathcal{B}$ 可以成為 $\mathbb{Z}$ 中某一個 topology $\mathcal{T}$ 的 basis.

(2) 說明在 $\mathcal{T}$ 這個 topology 之下, $U \in \mathcal{T}$ (即 U 為此拓樸之下的一個 open set) 若且唯若 $\forall a \in U$, $\exists b \in \mathbb{N}$ 使得 $N_{a,b} \subseteq U$.

(3) 說明在 $\mathcal{T}$ 這個 topology 之下 $N_{a,b}$ 是 open 也是 closed.

Excecise 1.6. 考慮 $P \subseteq \mathbb{N}$ 為所有質數所成的集合, 在此問題中我們將利用定義 P 中的 closed set 來給出 P 的一個 topology. 對任意整數 $m \in \mathbb{Z}$, 我們定義 $V(m) = \{p \in P : p \mid m\}$.

(1) 證明存在 $m, m' \in \mathbb{Z}$ 使得 $\emptyset = V(m)$, $P = V(m')$.

(2) 對任意的 index set I, 任取 $m_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in I$. 證明存在 $m \in \mathbb{Z}$ 滿足

$$\bigcap_{i \in I} V(m_i) = V(m).$$

(3) 對任意 $a, b \in \mathbb{Z}$ 證明存在 $m \in \mathbb{Z}$ 滿足 $V(a) \cup V(b) = V(m)$.

(4) 令 $\mathcal{T} = \{U \subseteq P : P \setminus U = V(m), \text{for some } m \in \mathbb{Z}\}$. 說明 $\mathcal{T}$ 是 P 的一個 topology.

Excecise 1.7. 假設 X, Y 為 topological space, $f : X \to Y$ 為 X 到 Y 的函數. 若對任意 X 上的 closed set C 皆有 $f(C)$ 為 Y 的 closed set, 則稱 f 為 *closed map.*

(1) 試找到 topological spaces X, Y 以及 $f : X \to Y$ 是 one to one 且 onto 的 continuous function 但不是 open map 的例子.

(2) 試找到 topological spaces X, Y 以及 $f : X \to Y$ 是 open map 但不是 closed map 的例子.

(3) 試證明若 X, Y 為 topological spaces 且 $f : X \to Y$ 是 one to one 且 onto 的 open map 則 $F : X \to Y$ 為 closed map.

Excecise 1.8. 假設 X, Y 為 topological spaces 令 $C_{X,Y}$ 為所有 X 到 Y 的 continuous functions 所成的集合. 現假設 X, X', Y 為 topological spaces, 其中 X 和 X' 為 homeomorphic.

(1) 試證明 $C_{X,Y}$ 和 $C_{X',Y}$ 之間存在著一對一且映成的對應關係 (即存在著一個 one-to-one and onto function from $C_{X,Y}$ to $C_{X',Y}$).

(2) 試證明 $C_{Y,X}$ 和 $C_{Y,X'}$ 之間存在著一對一且映成的對應關係.

Excecise 1.9. 考慮 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology 且對任意開區間 (a, b) 考慮其 topology 為 standard topology 下的 subspace topology.

(1) 設 $a, b \in \mathbb{R}$ 滿足 $a < b$. 證明開區間 $(0, 1)$ 和 (a, b) 為 homeomorphic.

(2) 設 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 滿足 $a < b$ 且 $c < d$. 證明開區間 (a, b) 和 (c, d) 為 homeomorphic.

(3) 證明 $(0, 1)$ 和 $\mathbb{R}$ 為 homeomorphic.

Excecise 1.10. 假設 X, Y 是 topological space. 給定一函數 $f : X \to Y$. 令 $Y' = f(X)$ 且考慮其為 Y 的 subspace (使用 subspace topology). 令函數 $g : X \to Y'$ 定義為 $g(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. 證明 $f : X \to Y$ 是 continuous 若且唯若 $g : X \to Y'$ 為 continuous.

Excecise 1.11. 假設 X 是 topological space 且 $\mathcal{B}$ 是其 topology 的一組 basis. 若 $X' \subseteq X$, 考慮 subspace topology, 證明 $\mathcal{B}' = \{B \cap X', B \in \mathcal{B}\}$ 是此 subspace 的一組 basis, 並依此證明當 X' 是 X 的 open set 時, 對任意 X 的 topology 的 basis $\mathcal{B}$, 皆存在 subset $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 為 X' 的 subspace topology 的 basis.

Excecise 1.12. 試證明若 X_1, X_2 皆為 X 的 closed sets, Proposition 1.4.4 依然成立. (Hint: 利用 Proposition 1.3.2 以及 Question 1.25.)

Excecise 1.13. 假設 X_1, X_2 是兩個不相交的 topological spaces, 且 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 分別為其 basis. 試證明 $\{S_1 \sqcup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{B}_1, S_2 \in \mathcal{B}_2\}$ 是 $X_1 \sqcup X_2$ 使用 disjoint union topology 的一組 basis.

Excecise 1.14. 假設 X_1, X_2 為 topological spaces 且 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 分別為其 basis. 試證明 $\{S \times T \mid S \in \mathcal{B}_1, T \in \mathcal{B}_2\}$ 為 product space $X_1 \times X_2$ 的 basis.

Excecise 1.15. 假設 X_1, X_2 為 topological spaces. 考慮 product space $X_1 \times X_2$. 證明 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ 皆為 open map.

Excecise 1.16. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology, 以及 $S = \{1, 2\}$ 使用 discrete topology. 試證明 $\mathbb{R} \times S$ 使用 product space topology 以及 $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 使用 disjoint union topology 是 homeomorphic.

Excecise 1.17. 假設 I 是 index set, 且對任意 $i \in I$, X_i 為 topological space 及 $\mathcal{T}_i$ 為其 topology.

(1) 令 $\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i$, and $U_i = X_i$ for almost all $i \in I\}$, 試證明 $\mathcal{B}$ 符合 Proposition 1.2.4 中, 可成為某個 topology 的 basis 的條件.

(2) 考慮 $\prod_{i \in I} X_i$ 上的 product space topology, 試推廣 Proposition 1.5.3.

Excecise 1.18. 以下是有關 quotient space 的觀念釐清.

(1) 在 Example 1.5.7 中 $S = [0, 1/2)$ 是 $X = [0, 1]$ 的一個 open set, 試說明 $q(S)$ 是否為 $X/\sim$ 的 open set?

(2) 當 X 是 topological space 且 $\sim$ 為 X 上的 equivalence relation, 考慮 quotient space $X/\sim$. 試說明 The quotient map $q : X \to X/\sim$ 未必為 open map.

(3) 假設 U 是 topological space X 的一個 open set, 試說明未必存在 V 為 quotient space $X/\sim$ 的 open set V 滿足 $q^{-1}(V) = U$.

(4) 試利用 Example 1.5.7 說明如果 $\mathcal{B}$ 是 topological space X 的一組 basis, 考慮 $\widetilde{\mathcal{B}} = \{V \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(V) \in \mathcal{B}\}$. 則 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 未必是 $X/\sim$ 的一組 basis.

Excecise 1.19. 假設 X, Y 為 topological space, $\sim$ 為 X 上的 equivalence relation 以及 $X/\sim$ 為其 quotient space. 試證明若 $f : X \to Y$ 為 open map 滿足 $f(x) = f(x')$, $\forall\, x \sim x'$, 則存在函數 $h : (X/\sim) \to Y$ 為 open map 使得 $f = h \circ q$.

Chapter 2

內部, 外部以及邊界

給定一個 topological space X 後, 我們知道 X 的 open sets 和 closed sets 有哪些, 還能再談論甚麼呢? 事實上有了 topology 後, 對於一個既非 open 也非 closed 的子集合, 仍然有許多有趣的性質可以討論. 在這一章, 我們主要的便是探討何謂一個集合的內部, 外部以及邊界. 本章內容雖然大部分都是一些名詞, 不過希望大家能著重於了解這些名詞的意義. 以便將來遇見這些名詞時能掌握其特性, 進而能運用這些名詞處理一些拓樸的性質.

2.1. The Interior of a Set

Interior 是內部的意思. 在這節中, 我們將說明一個 topological space 中的子集合, 何謂其內部, 以及其相關的性質. 我們也會介紹何謂一個集合的外部, 及其相關性質. 希望大家對這些名詞的定義與性質, 有較直觀的看法, 而不是單純的記憶.

在 $\mathbb{R}$ 上使用 standard topology, 何謂閉區間 $[1,2]$ 內部呢? 直覺上, 我們會認為是開區間 $(1,2)$. 這是因為若 $a \in (1,2)$, 表示 a "旁邊" 的點都在 $[1,2]$ 中, 所以感覺 a 在 $[1,2]$ 的內部, 然而若 $a = 1$ 或 $a = 2$, 則 a 的 "旁邊" 有些點不在 $[1,2]$ 中, 所以它們不該算 $[1,2]$ 的內部. 這裡的 "旁邊" 指的是甚麼呢? 事實上若 $a \in (1,2)$, 即 $1 < a < 2$, 若令 $\varepsilon = \min\{a-1, 2-a\} > 0$, 則 $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 且 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq [1,2]$. 這裡 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 上的點就是我們說 a 點的附近, 也就是 a 的一個 open neighbor hood. 當然了這個 open neighborhood 可大可小, 不過若找到一個 a 的 open neighborhood 包含於 $[1,2]$, 則比它小的 open neighborhood 也會包含於 $[1,2]$. 所以我們可以這樣說: 在 $[1,2]$ 中的點如果可以找到一個 open neighborhood 包含於 $[1,2]$ 就稱為 $[1,2]$ 的 "內點".

現在我們回到一般的 topological space X. 我們曾經提到, 若 $a \in X$, 且 U 是包含 a 的 open set, 便稱 U 為 a 的 open neighborhood. 基於以上的看法, 我們有以下的定義.

Definition 2.1.1. 假設 X 為 topological space, $S \subseteq X$. 對於 $a \in S$, 若存在 a 的一個 open neighborhood U 滿足 $U \subseteq S$, 則稱 a 為 S 的一個 *interior point*. 所有 S 的 interior points 所成的集合稱之為 S 的 *interior*, 我們用 $\mathrm{int}(S)$ 來表示 (有的書用 $\mathring{S}$ 來表示).

要注意即使 $S \neq \emptyset$, $\mathrm{int}(S)$ 有可能會是 $\emptyset$. 例如在 $\mathbb{R}$ 考慮 standard topology 時, 當 $a \in \mathbb{R}$, $S = \{a\}$ 時, $\mathrm{int}(S)$ 就是 $\emptyset$. 又若 X 考慮 indiscrete topology, 則因 X 是唯一非空的 open set, 所以任何不等於 X 的子集合 S 其 interior 皆為空集合. 另外要注意若 X' 是 X 的 subspace 且 $S \subseteq X'$ 則 S 看成 X 的子集合的 interior 和看成 X' 的子集合的 interior 有可能不同. 例如 $[1,2]$ 用 $\mathbb{R}$ 的 subspace topology 來看 $[1,2]$ 的 interior 就是 $[1,2]$ 而不是 $(1,2)$. 所以在討論 interior 時需說明清楚所在的 topological space 為何.

Question 2.1. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. $S \subseteq \mathbb{R}$ 為 finite set. 試問 $\mathrm{int}(S)$ 為何? 又 $\mathrm{int}(\mathbb{N})$ 為何?

接下來我們看一些有關 interior 的簡單性質.

Lemma 2.1.2. 考慮 *topological space* X 以及 S, T 為 X 子集合, 我們有以下的性質.

(1) 假設 S 為 X 的 *open set*, 則 $\mathrm{int}(S) = S$. 特別地, 我們有 $\mathrm{int}(X) = X$ 以及 $\mathrm{int}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 若 $S \subseteq T$, 則 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$.

(3) 假設 S 為 X 的 *open set*, 則 $S \subseteq T$ 若且唯若 $S \subseteq \mathrm{int}(T)$.

Proof. 首先注意, 依 interior 的定義, 我們知道 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$.

(1) 要證明 $\mathrm{int}(S) = S$, 我們僅要說明 $S \subseteq \mathrm{int}(S)$, 即可. 現依假設 S 為 X 的 open set. 對任意 $a \in S$, S 皆為 a 的 open neighborhood 且滿足 $S \subseteq S$, 故依定義 a 為 S 的一個 interior point, 得 $a \in \mathrm{int}(S)$. 得證 $S = \mathrm{int}(S)$. 又因 X 為 X 的 open set, 故得 $\mathrm{int}(X) = X$. 同理 $\mathrm{int}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 假設 $S \subseteq T$. 現任取 $a \in \mathrm{int}(S)$, 即存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \subseteq S$. 因 $S \subseteq T$, 故得 $U \subseteq T$. 因此得證 a 亦為 T 的 interior point, 即 $a \in \mathrm{int}(T)$. 得證 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$.

(3) 已知 S 為 X 的 open set. 現若 $S \subseteq T$ 由 (1), (2) 知 $S = \mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$. 反之若 $S \subseteq \mathrm{int}(T)$, 則因 $\mathrm{int}(T) \subseteq T$, 得證 $S \subseteq T$.

□

Question 2.2. Lemma 2.1.2 (3) 中的若且唯若, 哪一個方向不需用到 S 為 X 的 open set 這個假設?

Lemma 2.1.2 (1) 告訴我們當 S 是 open 時 $\mathrm{int}(S) = S$, 因此此時 $\mathrm{int}(S)$ 會是 X 的 open set. 然而在一般的情形 $\mathrm{int}(S)$ 會是 open 嗎? 要回答這個問題, 我們必需看看 $\mathrm{int}(S)$ 可否寫成一些 X 的 open sets 的聯集. 然而對任意 $x \in \mathrm{int}(S)$, 皆存在 X 的 open set U_x 滿足 $U_x \subseteq S$. 因此我們自然會考慮這些 U_x 的聯集, 即考慮

$$U = \bigcup_{x \in \mathrm{int}(S)} U_x.$$

因為對任意 $x \in \operatorname{int}(S)$ 皆有 $x \in U_x$, 故知 $\operatorname{int}(S) \subseteq U$. 另一方面對任意 $x \in \operatorname{int}(S)$ 皆有 $U_x \subseteq S$, 故知 $U \subseteq S$. 也因此由 U 為 open 以及 Lemma 2.1.2 (3) 得知 $U \subseteq \operatorname{int}(S)$. 我們證得了 $U = \operatorname{int}(S)$, 故得 $\operatorname{int}(S)$ 是 X 的 open set. 事實上我們有以下關於 interior 的等價性質.

Theorem 2.1.3. 假設 X 為以 $\mathcal{T}$ 為 *topology* 的 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) $\operatorname{int}(S)$ 是所有包含於 S 的 *open sets* 的聯集. 亦即

$$\operatorname{int}(S) = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq S\}} U.$$

(2) $\operatorname{int}(S)$ 是所有包含於 S 的 *open sets* 裡最大的 *open set.* 亦即 $\operatorname{int}(S) \in \mathcal{T}$ 且若 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $U \subseteq S$, 則 $U \subseteq \operatorname{int}(S)$.

Proof. 為了方便起見我們令 $V = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq S\}} U$. 現若 $x \in \operatorname{int}(S)$, 表示存在 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $x \in U$ 且 $U \subseteq S$, 故 $x \in V$. 證得 $\operatorname{int}(S) \subseteq V$. 反之, 若 $x \in V$, 表示存在 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $U \subseteq S$ 使得 $x \in U$. 因此知 $x \in \operatorname{int}(S)$. 因此 $V \subseteq \operatorname{int}(S)$. 證明了 $V = \operatorname{int}(S)$, 即 (1) 成立.

至於 (2), 由 (1) 我們知 $\operatorname{int}(S)$ 為 open set. 又已知 $\operatorname{int}(S) \subseteq S$. 也就是說 $\operatorname{int}(S)$ 是一個包含於 S 的 open set. 現若 $U \subseteq S$, 且為 open set, 則由 (1) 得 $U \subseteq \operatorname{int}(S)$. □

注意 Theorem 2.1.3 也告訴我們若 W 為 X 的 open set 滿足 $W \subseteq S$ 且對任意滿足 $U \subseteq S$ 的 open set 皆有 $U \subseteq W$, 則 $W = \operatorname{int}(S)$. 這是因為 $\operatorname{int}(S)$ 為滿足 $\operatorname{int}(S) \subseteq S$ 的 open set, 故 $\operatorname{int}(S) \subseteq W$. 反之, W 亦為滿足 $W \subseteq S$ 的 open set, 故由 Theorem 2.1.3 (2) 知 $W \subseteq \operatorname{int}(S)$. 因此得證 $W = \operatorname{int}(S)$.

當 S 為 open 時, 當然 S 本身是包含於 S 最大的 open set, 故由 Theorem 2.1.3, 我們知道此時 $S = \operatorname{int}(S)$. 反之, 若 $S = \operatorname{int}(S)$, 則由於 $\operatorname{int}(S)$ 為 open set, 故得 S 為 open set. 也就是說 S 為 open 等價於 $S = \operatorname{int}(S)$. 至於對於一般的集合 S, 因為 $\operatorname{int}(S)$ 為 open, 故依此結果可得 $\operatorname{int}(\operatorname{int}(S)) = \operatorname{int}(S)$. 我們證得了以下結果.

Corollary 2.1.4. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) S 是 X 的 *open set* 若且唯若 $S = \operatorname{int}(S)$.

(2) $\operatorname{int}(\operatorname{int}(S)) = \operatorname{int}(S)$.

談論了內部, 我們當然也可談何謂外部. 依定義, 一個集合外部的點應該是和該集合不相交的, 而且它“附近”的點也和該集合不相交. 因此我們有以下的定義.

Definition 2.1.5. 假設 X 為 topological space, $S \subseteq X$. 對於 $a \notin S$, 若存在 a 的一個 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 則稱 a 為 S 的一個 *exterior point.* 所有 S 的 exterior points 所成的集合稱之為 S 的 *exterior*, 我們用 $\operatorname{ext}(S)$ 來表示.

依 exterior 的定義, $x \in \operatorname{ext}(S)$ 的點皆須滿足 $x \notin S$, 即 $x \in S^c$, 所以我們知 $\operatorname{ext}(S) \subseteq S^c$. 另外對於任意 $x \in \operatorname{ext}(S)$, 皆存在 x 的 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 即 $U \subseteq S^c$.

所以 S 的 exterior 其實就是 S^c 的 interior. 也就是說

$$\mathrm{ext}(S) = \mathrm{int}(S^c). \tag{2.1}$$

因此利用 interior 的性質, 我們有以下之結果.

Proposition 2.1.6. 假設 X 為以 $\mathcal{T}$ 為 *topological space* 且 S, T 為 X 子集合.

(1) S 是 *closed* 若且唯若 $\mathrm{ext}(S) = S^c$.

(2) 若 $S \subseteq T$, 則 $\mathrm{ext}(T) \subseteq \mathrm{ext}(S)$.

(3) $\mathrm{ext}(S)$ 是所有與 S 不相交的 *open sets* 的聯集. 亦即

$$\mathrm{ext}(S) = \bigcup_{\{U \in \mathcal{T} \mid U \cap S = \emptyset\}} U.$$

(4) $\mathrm{ext}(S)$ 是所有與 S 不相交的 *open sets* 裡最大的 *open set*. 亦即 $\mathrm{ext}(S) \in \mathcal{T}$ 且若 $U \in \mathcal{T}$ 滿足 $U \cap S = \emptyset$, 則 $U \subseteq \mathrm{ext}(S)$.

Question 2.3. 試證明 Proposition 2.1.6.

要注意, 雖然 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{int}(S)$ 但是 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$ 並不會等於 $\mathrm{ext}(S)$. 事實上由於 $\mathrm{ext}(S) \subseteq S^c$, 所以由 Proposition 2.1.6 (2), 我們有 $\mathrm{ext}(S^c) \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$. 再由式子 (2.1), 知 $\mathrm{ext}(S^c) = \mathrm{int}((S^c)^c) = \mathrm{int}(S)$, 因此推得

$$\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S)). \tag{2.2}$$

或許你會認為外部的外部等於內部, 即 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S)) = \mathrm{int}(S)$, 不過這是錯的. 這是因為雖然 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$ 是 open set, 但是一般來說 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$ 不一定會包含於 S (參見以下 Question 2.4), 所以我們無法得到 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S)) \subseteq \mathrm{int}(S)$, 也就是說 $\mathrm{int}(S)$ 未必會等於 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(S))$.

Question 2.4. 考慮 $\mathbb{R}$ 上的 standard topology. 利用 Question 2.1 以及任意非空的 open interval (r, s) 必有有理數及無理數在其中, 證明 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$. 又試問甚麼會是 $\mathrm{ext}(\mathbb{Q})$ 呢? 依此結論說明 $\mathrm{ext}(\mathrm{ext}(\mathbb{Q})) \neq \mathrm{int}(\mathbb{Q})$.

2.2. The Closure of a Set

一個集合的 closure 意指和這個集合 "非常靠近" 的點所成的集合. 在這節中我們介紹 closure 的概念, 我們將發現 closure 和 interior 以及 exterior 是息息相關的.

在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 中, 那些點會和半開半閉的區間 $[1, 2)$ 非常靠近呢? 當然了 $[1, 2)$ 本身的點和自己是非常靠近的. 還有一個點, 就是 2 也和 $[1, 2)$ 非常靠近. 這是因為任何包含 2 的 open interval 一定會和 $[1, 2)$ 相交, 所以我們可以認定它與 $[1, 2)$ 非常靠近. 除此之外, 其他的點都在 $[1, 2)$ 的外部 (即 exterior), 我們都認為和 $[1, 2)$ 有一段距離.

現在回到一般的 topological space X. 假設 $S \subseteq X$. 對於 X 的一點 a, 如果任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$, 那麼我們就視為 a 和 S 很靠近. 因此有以下的定義.

Definition 2.2.1. 假設 X 為 topological space, $S \subseteq X$. 對於 $a \in X$, 若任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$, 則稱 a 為 S 的 *closure point* (或是 *adherent point*). 所有 S 的 closure points 所成的集合稱之為 S 的 *closure*, 我們用 $\mathrm{cl}(S)$ 來表示 (有的書用 $\overline{S}$ 來表示).

要注意 S 的 closure 是要考慮所有宇集 X 上與 S 相當靠近的點, 所以考慮的宇集不同, 所得的 closure 有可能會相異, 另外如同 interior 的情況, 使用不同的 topology 所得的 closure 也會不同. 所以在討論 closure 時仍需說明清楚所在的 topological space 為何.

很有趣的, closure 和 interior 有著相對應的性質. 對於底下介紹有關 closure 的性質, 大家可以和前一節有關 interior 的性質相對照. 首先我們看和 Lemma 2.1.2 相對應的性質.

Lemma 2.2.2. 考慮 *topological space* X 以及 S, T 為 X 子集合, 我們有以下的性質.

(1) 假設 S 為 X 的 *closed set,* 則 $\mathrm{cl}(S) = S$. 特別地, 我們有 $\mathrm{cl}(X) = X$ 以及 $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 若 $S \subseteq T$, 則 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$.

(3) 假設 T 為 X 的 *closed set,* 則 $S \subseteq T$ 若且唯若 $\mathrm{cl}(S) \subseteq T$.

Proof. 首先注意, 若 $x \in S$, 任何 x 的 open neighborhood U, 皆滿足 $x \in U \cap S$, 因此 $U \cap S \neq \emptyset$. 故依 closure 的定義, 我們得 $x \in \mathrm{cl}(S)$. 因此 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$.

(1) 要證明 $\mathrm{cl}(S) = S$, 我們僅要說明 $\mathrm{cl}(S) \subseteq S$, 即可. 現依假設 S 為 X 的 closed set, 亦即 S^c 為 open. 所以我們反過來證明 $S^c \subseteq \mathrm{cl}(S)^c$. 若 $x \in S^c$, 由 S^c 是 open 知存在 x 的 open neighborhood 滿足 $U \subseteq S^c$, 亦即 $U \cap S = \emptyset$. 故依定義 x 不是 S 的 closure point, 即 $x \in \mathrm{cl}(S)^c$. 我們證明了 $S^c \subseteq \mathrm{cl}(S)^c$, 故得 $\mathrm{cl}(S) \subseteq S$, 也因此得證 $S = \mathrm{cl}(S)$. 又因 X 為 X 的 closed set, 故得 $\mathrm{cl}(X) = X$. 同理 $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) 假設 $S \subseteq T$. 現任取 $a \in \mathrm{cl}(S)$, 即對於所有 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$. 因 $S \subseteq T$, 故得 $U \cap T \neq \emptyset$. 因此得證 a 亦為 T 的 closure point, 即 $a \in \mathrm{cl}(T)$. 得證 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$.

(3) 已知 T 為 X 的 closed set. 現若 $S \subseteq T$ 由 (1), (2) 知 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T) = T$. 反之若 $\mathrm{cl}(S) \subseteq T$, 則因 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 得證 $S \subseteq T$.

□

Question 2.5. 一般來說, 可否由 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$ 推導出 $S \subseteq T$ 呢? 可否由 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$ 推導出 $S \subseteq T$ 呢?

Lemma 2.2.2 (1) 告訴我們當 S 是 closed 時 $\mathrm{cl}(S) = S$, 因此此時 $\mathrm{cl}(S)$ 會是 X 的 closed set. 然而在一般的情形 $\mathrm{cl}(S)$ 會是 closed 嗎? 要回答這個問題, 我們可以試著將 $\mathrm{cl}(S)$ 寫成一些 X 的 closed sets 的交集. 事實上我們有以下和 Theorem 2.1.3 相對應的性質.

Theorem 2.2.3. 假設 X 為以 $\mathcal{T}$ 為 *topology* 的 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) $\mathrm{cl}(S)$ 是所有包含 S 的 *closed sets* 的交集. 亦即

$$\mathrm{cl}(S)=\bigcap_{\{Z^c\in\mathcal{T}\mid S\subseteq Z\}} Z.$$

(2) $\mathrm{cl}(S)$ 是所有包含 S 的 *closed sets* 裡最小的 *closed set.* 亦即 $\mathrm{cl}(S)$ 是 *closed* 且若 Z 是 *closed* 滿足 $S\subseteq Z$, 則 $\mathrm{cl}(S)\subseteq Z$.

Proof. 為了方便起見我們令 $C=\bigcap_{\{Z^c\in\mathcal{T}\mid S\subseteq Z\}} Z$. 由於這裡每個 Z 皆為 closed 且滿足 $S\subseteq Z$, 故知 C 是 closed 且滿足 $S\subseteq C$. 因此利用 Lemma 2.2.2 (3), 我們得 $\mathrm{cl}(S)\subseteq C$. 至於 $C\subseteq\mathrm{cl}(S)$, 我們用反證法處理 (因為 open set 較易處理), 也就是說如果 $x\notin\mathrm{cl}(S)$, 我們要說明 $x\notin C$. 然而 $x\notin\mathrm{cl}(S)$ 表示存在 x 的 open neighborhood U, 滿足 $U\cap S=\emptyset$, 亦即 $U\subseteq S^c$, 也等同 $S\subseteq U^c$. 這告訴我們存在著一個 closed set U^c 它滿足 $S\subseteq U^c$ 但 $x\notin U^c$ (因 $x\in U$), 所以得證 $x\notin C$. 我們證明了 $C=\mathrm{cl}(S)$, 即 (1) 成立.

至於 (2), 由 (1) 我們知 $\mathrm{cl}(S)$ 為 closed set. 又已知 $S\subseteq\mathrm{cl}(S)$. 也就是說 $\mathrm{cl}(S)$ 是一個包含 S 的 closed set. 現若 $S\subseteq Z$, 且為 closed set, 則由 (1) 得 $\mathrm{cl}(S)=C\subseteq Z$. □

注意 Theorem 2.2.3 也告訴我們若 C 為 X 的 closed set 滿足 $S\subseteq C$ 且對任意滿足 $S\subseteq Z$ 的 closed set Z 皆有 $C\subseteq Z$, 則 $C=\mathrm{cl}(S)$. 這是因為 $\mathrm{cl}(S)$ 為滿足 $S\subseteq\mathrm{cl}(S)$ 的 closed set, 故 $C\subseteq\mathrm{cl}(S)$. 反之, C 亦為滿足 $S\subseteq C$ 的 closed set, 故由 Theorem 2.2.3 (2) 知 $\mathrm{cl}(S)\subseteq C$. 因此得證 $C=\mathrm{cl}(S)$.

Question 2.6. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 為何不談論包含於 S 最大的 closed set, 以及包含 S 最小的 open set 呢? (試著考慮 $X=\mathbb{R}$, 而 S 為半閉半開的區間 $[1,2)$ 的情形.)

當然了 Corollary 2.1.4 也有相對應的結果, 由於證明的方法相同, 這裡就不再證明了.

Corollary 2.2.4. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) S 是 X 的 *closed set* 若且唯若 $S=\mathrm{cl}(S)$.

(2) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S))=\mathrm{cl}(S)$.

Question 2.7. 試證明 Corollary 2.2.4.

Closure 和 interior 有許多相對應的性質, 事實上 closure 和 exterior 的關係更密切. 由於 $\mathrm{ext}(S)$ 是 open set 且 $\mathrm{ext}(S)\subseteq S^c$, 我們得到 $\mathrm{ext}(S)^c$ 是 closed 且 $S=(S^c)^c\subseteq\mathrm{ext}(S)^c$. 所以由 Theorem 2.2.3 (2), 我們推得 $\mathrm{cl}(S)\subseteq\mathrm{ext}(S)^c$. 另一方面, 若 $x\in\mathrm{ext}(S)^c$, 表示 $x\notin\mathrm{ext}(S)$, 亦即對所有 x 的 open neighborhood U, 皆不滿足 $U\subseteq S^c$, 也就是說 $U\cap S\neq\emptyset$, 得證 $x\in\mathrm{cl}(S)$. 我們證明了以下定理.

Proposition 2.2.5. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合. 則

$$\mathrm{cl}(S)=\mathrm{ext}(S)^c=\mathrm{int}(S^c)^c.$$

Question 2.8. 有的參考書籍是用 Proposition 2.2.5 的式子定為 closure 的定義. 試利用 Proposition 2.2.5 證明 Lemma 2.2.2, Theorem 2.2.3 以及 Corollary 2.2.4.

和 closure 有關的概念就是 dense (稠密) 的概念. 我們說集合 S 在 X 是稠密的, 顧名思義這表示所有 X 上的點都和 S 很靠近, 亦即對任意 $x \in X$ 以及 x 任意的 open neighborhood 皆和 S 有交集. 也就是說 $X = \mathrm{cl}(S)$. 因此我們有以下的定義.

Definition 2.2.6. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 若 $\mathrm{cl}(S) = X$, 則稱 S is *dense* in X, 也稱 S 是 X 的一個 *dense set*.

Question 2.9. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology, 試證明 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一個 dense set.

Question 2.10. 在 discrete topological space 中的 dense set 有哪些? 在 indiscrete topological space 中的 dense set 有哪些?

2.3. The Boundary of a Set

介紹了一個集合的內部以及外部, 我們就可以談論何謂其“邊界”了. 如何定義一個集合的邊界呢? 照理說一個集合邊界應該很靠近這個集合內的點也很靠近這個集合外的點. 所以我們有以下的定義.

Definition 2.3.1. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 對於 $a \in X$, 若任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$ 以及 $U \cap S^c \neq \emptyset$, 則稱 a 為 S 的 *boundary point*. 所有 S 的 boundary points 所成的集合稱之為 S 的 *boundary*, 我們用 $\mathrm{bd}(S)$ 來表示 (有的書用 ∂S 來表示).

依此定義當 a 是 S 的 boundary point, 所有 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S \neq \emptyset$ 表示 a 應是 S 的 closure point (即 $a \in \mathrm{cl}(S)$) 而所有 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap S^c \neq \emptyset$ 表示不存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \subseteq S$ (否則 $U \cap S^c = \emptyset$), 也就是說 a 不會是 S 的 interior point (即 $a \notin \mathrm{int}(S)$). 因此我們得 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$. 又因為 $\mathrm{cl}(S) = \mathrm{ext}(S)^c$, 所以

$$\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \cap \mathrm{int}(S)^c = \mathrm{ext}(S)^c \cap \mathrm{int}(S)^c = X \setminus (\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)).$$

我們有以下定理.

Proposition 2.3.2. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合, 則

$$\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = X \setminus (\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)).$$

Proposition 2.3.2 告訴我們 $\mathrm{bd}(S) \cap \mathrm{int}(S) = \emptyset$. 又由於 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S)$,

$$\mathrm{bd}(S) \cup \mathrm{int}(S) = (\mathrm{cl}(S) \cap \mathrm{int}(S)^c) \cup \mathrm{int}(S) = \mathrm{cl}(S) \cup \mathrm{int}(S) = \mathrm{cl}(S).$$

換句話說, 我們可以將 $\mathrm{cl}(S)$ 寫成 $\mathrm{bd}(S)$ 以及 $\mathrm{int}(S)$ 的 disjoint union, 也就是說將 $\mathrm{cl}(S)$ 分割成 S 的邊界與內部兩部分. 同理我們也可把 X 寫成 $\mathrm{int}(S)$, $\mathrm{ext}(S)$ 以及 $\mathrm{bd}(S)$ 這三個集

合的 disjoint union. 也就是說我們可以將整個拓樸空間 X 分割成 S 的內部, 外部與邊界三部分.

Question 2.11. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 證明 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \cap \mathrm{cl}(S^c)$.

注意, 即使 S 不等於 X 其 boundary 有可能是 X. 因為 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$, 所以 $\mathrm{bd}(S) = X$ 等價於 $\mathrm{cl}(S) = X$ 且 $\mathrm{int}(S) = \emptyset$. 也就是說當 S 在 X 是 dense 且 S 的內部是空集合時, S 的 boundary 就會是整個 X. 例如在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下, 我們有 $\mathrm{bd}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. 另外 $\mathrm{bd}(S)$ 也有可能是 $\emptyset$. 此時表示 $\mathrm{cl}(S) = \mathrm{int}(S)$, 但 $\mathrm{int}(S) \subseteq S \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 故這等同於 $S = \mathrm{cl}(S) = \mathrm{int}(S)$. 由於 $\mathrm{cl}(S)$ 是 closed, 而 $\mathrm{int}(S)$ 是 open, 因此我們知道 $\mathrm{bd}(S) = \emptyset$ 等價於 S 是 open 且是 closed. 這種既是 open 又是 closed 的集合, 有的書會稱之為 *clopen set*.

以下我們列出一些有關 boundary 的性質, 希望大家不要光記憶其結果, 而是多了解其實質意義.

Proposition 2.3.3. *假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合.*

(1) *$\mathrm{bd}(S)$ 是 X 的 closed set.*

(2) *$\mathrm{bd}(S) = \mathrm{bd}(S^c)$.*

(3) *S 是 X 的 closed set 若且唯若 $\mathrm{bd}(S) \subseteq S$.*

(4) *S 是 X 的 open set 若且唯若 $\mathrm{bd}(S) \cap S = \emptyset$.*

Proof. 因為 $\mathrm{cl}(S)$ 是 closed 而 $\mathrm{int}(S)$ 是 open, 故由 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$ 得知 $\mathrm{bd}(S)$ 是 closed, 即 (1) 成立. 至於 (2) 因為 $\mathrm{ext}(S) = \mathrm{int}(S^c)$, 故由

$$\mathrm{bd}(S) = X \setminus (\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)) = X \setminus (\mathrm{int}(S^c) \cup \mathrm{int}(S)) = X \setminus (\mathrm{int}(S^c) \cup \mathrm{int}((S^c)^c)) = \mathrm{bd}(S^c),$$

得證 (2) 成立.

至於 (3), 若 S 是 closed, 此時 $\mathrm{cl}(S) = S$ 故 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = S \setminus \mathrm{int}(S) \subseteq S$. 反之, 如果 $\mathrm{bd}(S) \subseteq S$ 表示 $\mathrm{cl}(S) = \mathrm{bd}(S) \cup \mathrm{int}(S) \subseteq S$ (因為 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$). 再由 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$ 得 $\mathrm{cl}(S) = S$, 因此得證 S 是 closed (Corollary 2.2.4).

最後我們處理 (4). 若 S 是 open, 則由 Lemma 2.1.2 知 $\mathrm{int}(S) = S$, 此時 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus S$ 因此 $\mathrm{bd}(S) \cap S = \emptyset$. 反之, 若 $\mathrm{bd}(S) \cap S = \emptyset$, 表示 $S \subseteq \mathrm{bd}(S)^c = \mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)$, 因此由 $S \cap \mathrm{ext}(S) = \emptyset$ 得 $S \subseteq (\mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int}(S)) \cap S = \mathrm{int}(S)$. 再由 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$ 得 $\mathrm{int}(S) = S$, 因此得證 S 是 open (Corollary 2.1.4). □

要注意的是若 $S \subseteq T$, $\mathrm{bd}(S)$ 未必包含於 $\mathrm{bd}(T)$. 雖然我們有 $\mathrm{cl}(S) \subseteq \mathrm{cl}(T)$ 但是因為 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(T)$, 所以 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$ 未必會包含於 $\mathrm{bd}(T) = \mathrm{cl}(T) \setminus \mathrm{int}(T)$. 例如在 $\mathbb{R}$ 中考慮 standard topology, 開區間 $(1,2)$ 包含於開區間 $(0,3)$, 但是 $(1,2)$ 的 boundary 為 $\{1,2\}$ 並不包含於 $(0,3)$ 的 boundary $\{0,3\}$. 當然了在特殊狀況之下這會對, 例如 $\mathrm{int}(S) \subseteq S$, 而我們確實有 $\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$. 不過有趣的是 $S \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 但我們卻有 $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$. 它們成立的原因如下.

Proposition 2.3.4. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合. 則

$$\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S), \quad \mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S).$$

Proof. 由於 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{int}(S)$ 且 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 故

$$\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(S)) \setminus \mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = \mathrm{bd}(S).$$

同理由於 $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S)$ 且 $\mathrm{int}(S) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))$, 故

$$\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{cl}(S)) \subseteq \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = \mathrm{bd}(S).$$

□

要注意一般來說 $\mathrm{bd}(S)$ 未必等於 $\mathrm{bd}(\mathrm{int}(S))$. 從 Proposition 2.3.4 的證明我們看出來, 問題出自於 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(S))$ 未必等於 $\mathrm{cl}(S)$. 例如在 $\mathbb{R}$ 中考慮 standard topology, 此時 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ 且 $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, 因此 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathbb{Q})) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ 不等於 $\mathrm{cl}(\mathbb{Q})$. 同樣的, $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(S))$ 也未必等於 $\mathrm{bd}(S)$, 理由是 $\mathrm{int}(S)$ 未必等於 $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(S))$. 例如 $\mathrm{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ 就不等於 $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathbb{Q})) = \mathrm{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Question 2.12. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. 試寫下以下的集合: $\mathrm{bd}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{bd}(\mathrm{int}(\mathbb{Q}))$, $\mathrm{bd}(\mathrm{cl}(\mathbb{Q}))$, $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathbb{Q}))$ 以及 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathbb{Q}))$.

另外要注意的是不像 interior 和 closure 我們有 $\mathrm{int}(\mathrm{int}(S)) = \mathrm{int}(S)$, $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(S)) = \mathrm{cl}(S)$; $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$ 未必等於 $\mathrm{bd}(S)$. 理由是 $\mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S)$, 然而因 $\mathrm{bd}(S)$ 是 closed, 我們有

$$\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{cl}(\mathrm{bd}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(S) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)).$$

這裡 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(S))$ 有可能不是空集合 (參見 Question 2.12), 所以我們有 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$ 但未必 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$ 會等於 $\mathrm{bd}(S)$. 不過 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$ 就會等於 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$. 我們有以下之結果.

Proposition 2.3.5. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合. 則

$$\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S), \quad \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)).$$

Proof. 由於 $\mathrm{bd}(S)$ 是 closed, 故由 Proposition 2.3.3 (3) 知 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$. 接下來, 我們要說明 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$.

首先由於 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$ 是 closed, 我們有

$$\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \mathrm{cl}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \setminus \mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))).$$

現由於 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$, 要證明 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$, 等同於要證明 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \emptyset$. 然而因 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(S)$, 我們有 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S))$. 另一方面 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$, 因此得 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) \cap \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))$. 然而, $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{bd}(S)) = \emptyset$, 得證 $\mathrm{int}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S))) = \emptyset$. 故知 $\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)) = \mathrm{bd}(\mathrm{bd}(\mathrm{bd}(S)))$. □

2.4. The Limit Points and Isolate Points of a Set

在這一節中我們介紹何謂一個集合的“極限”點以及“孤立”點. 我們知道可將 $\mathrm{cl}(S)$ 分割成 $\mathrm{bd}(S)$ 和 $\mathrm{int}(S)$ 這不相交的兩類子集合. 事實上 $\mathrm{cl}(S)$ 還有其他有意思的分類. 若 $x \in \mathrm{cl}(S)$, 表示 x 任意的 open neighborhood U 皆和 S 相交. 這在 $x \in S$ 時, 一點都不特別, 因為 $x \in U$ 且 $x \in S$, 自然有 $x \in U \cap S$, 所以 $U \cap S \neq \emptyset$. 不過若 $x \notin S$, 就很特別了, 因為 $x \notin S$, 所以 $x \in \mathrm{cl}(S)$ 表示任意 x 的 neighborhood 皆存在著不是 x 但是是 S 的元素在其中. 當我們考慮的 open neighborhood 越來越“ 縮小”, 這表示存在著一些 S 中的點越來越靠近 x. 這個現象很像微積分中一個數列的極限, 因為一個數列 $\{a_n\}$ 的極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 就表示任意包含 a 的 open interval 皆包含著 a_n (當 n 足夠大). 所以在拓樸中, 我們將有此特性的點稱為 S 的 *limit point*. 當然了 S 的 limit point 並不局限於不屬於 S 的點, 只要 x 任意的 open neighborhood, 皆包含除了 x 以外其他 S 的元素, 皆稱為 S 的 limit point. 和 limit point 相反意思的點指的是 $x \in S$ 且存在 x 的 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \{x\}$, 也就是說除了 x 以外, 其他 S 上的點都不在 U 中. 這樣的點稱為 S 的 *isolate point*, 意指 S 中的“孤立”點. 顧名思義 S 的 isolate point 指的便是這個點和 S 中其他的點是被“隔開”的. 我們看正式的定義.

Definition 2.4.1. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 對於 $a \in X$, 若任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $S \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, 則稱 a 為 S 的 *limit point*; 而若存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $S \cap U = \{a\}$, 則稱 a 為 S 的 *isolate point*.

為了方便起見以下我們用 $\ell(S)$ 表示 S 的 limit point 所成的集合, 而用 $\imath(S)$ 表示 S 的 isolate point 所成的集合. 從這個定義我們知道 $\mathrm{cl}(S) = \ell(S) \cup \imath(S)$, 而且 $\ell(S) \cap \imath(S) = \emptyset$. 從定義來看, 我們知道 $\imath(S) \subseteq S$, 也就是說 S 的 isolate point 皆在 S 中. 但是 limit point 就沒有限制, 它可以在 S 中, 也可以不在 S 中, 但無論如何 S 的 limit point 一定在 S 的 closure $\mathrm{cl}(S)$ 中. 另外我們要說明一下, 在拓樸中 limit point 中還有所謂的 *accumulation point*, 不過因為它牽涉到 open neighborhood 與 S 交集的元素多寡, 且怕和大家高微所學的 accumulation point 相混淆, 這裡就不再介紹了.

我們看看一些特殊情況. 令 S 是 X 的非空子集. 當 X 使用 discrete topology, 則對於任意非空的 subset S, 由於任意 $a \in S$, $\{a\}$ 是 a 的一個 open neighborhood 且 $\{a\} \cap S = \{a\}$, 所以 a 是 S 的 isolated point. 也就是說, 在這個情況, 所有 S 的點都是 S 的 isolated point. 另一方面, 如果 X 使用 indiscrete topology, 則對任意 $a \in X$, X 是 a 唯一的 open neighborhood, 所以當 S 有多於一個元素時, $S \cap (X \setminus \{a\}) = S \setminus \{a\} \neq \emptyset$, 也就是說, 在這個情況, X 中所有的元素都是 S 的 limit point. 我們再看一個例子.

Example 2.4.2. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 以及 $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. 由於對於任意 $1/n \in S$, 我們可取 $0 < \varepsilon < 1/(n(n+1))$ 使得 $1/n$ 的 open neighborhood $I = ((1/n) - \varepsilon, (1/n) + \varepsilon)$ 滿足 $I \cap S = \{1/n\}$. 因此我們知道 S 中所有的點都是 S 的 isolated point. 而對於任意 0 的 open neighborhood U, 由於 U 必包含 open interval $(-\lambda, \lambda)$, 其中 $\lambda > 0$, 且對於任意

$n \in \mathbb{N}$ 滿足 $n > \lambda$, 皆有 $1/n \in (-\lambda, \lambda)$. 也就是說一定存在 $1/n \in S$ 滿足 $1/n \in U$. 換言之, $S \cap (U \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. 得知 0 是 S 的 limit point.

雖然 $\mathrm{cl}(S)$ 可以分割成 $\mathrm{bd}(S)$ 和 $\mathrm{int}(S)$ 兩部分, 也可分割成 $\ell(S)$ 和 $\imath(S)$ 兩部分, 但是 $\ell(S)$, $\imath(S)$ 與 $\mathrm{bd}(S)$, $\mathrm{int}(S)$ 之間沒有太大的關係. 很多同學會被名詞誤導, 誤以為"孤立"點既然被孤立就不應在內部. 其實 S 的 isolated point 有可能是 S 的 interior point. 現若 a 是 S 的 isolated point 也是 S 的 interior point, 表示存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \{a\}$, 因此 $U \cap \mathrm{int}(S) \subseteq U \cap S = \{a\}$, 然而 $a \in U \cap \mathrm{int}(S)$ (因假設 $a \in \mathrm{int}(S)$), 故此表示 $\{a\} = U \cap \mathrm{int}(S)$ 是一個 open set. 所以我們知道若 a 是 S 的 isolated point 也是 S 的 interior point, 則 $\{a\}$ 是 X 的 open set. 另一方面, 若 $a \in S$ 且 $\{a\}$ 是 X 的 open set, 則 $\{a\}$ 是 a 的一個 open neighborhood 且滿足 $\{a\} \cap S = \{a\}$, 故 a 是 S 的 isolated point.

至於 S 的 limit point 當然可能在 S 的內部, 也可能在 S 的邊界上. 要注意的是, 由於 S 的 isolated point 有可能發生在 S 的 boundary 上 (參見 Example 2.4.2) 所以 boundary 上的點未必是 limit point. 不過 S 的 limit point 有和 S 的 boundary 一個類似的性質, 可以幫助我們判斷 S 是否為 closed (參見 Proposition 2.3.3 (3)). 以下我們列出一些有關 limit point 的性質.

Proposition 2.4.3. 假設 X 為 *topological space* 且 S 為 X 子集合.

(1) 若 $a \in \mathrm{cl}(S) \setminus S$, 則 a 是 S 的 *limit point.*

(2) a 是 S 的 *limit point* 若且唯若 $a \in \mathrm{cl}(S \setminus \{a\})$.

(3) S 是 X 的 *closed set* 若且唯若 $\ell(S) \subseteq S$.

Proof. (1) $a \in \mathrm{cl}(S) \setminus S$ 表示任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $S \cap U \neq \emptyset$, 然而

$$S \cap (U \setminus \{a\}) = S \cap U \cap \{a\}^c = U \cap (S \setminus \{a\}) \tag{2.3}$$

所以由 $a \notin S$ 得 $S \cap (U \setminus \{a\}) = U \cap S \neq \emptyset$, 亦即 a 為 S 的 limit point.

(2) 假設 a 是 S 的 limit point, 表示對於任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $S \cap (U \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, 然而由式子 (2.3) 知這等價於對於任意 a 的 open neighborhood U 皆滿足 $U \cap (S \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, 即 $a \in \mathrm{cl}(S \setminus \{a\})$.

(3) 由於 $\ell(S) \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 故若 S 為 closed, 則由 $\mathrm{cl}(S) = S$ 得 $\ell(S) \subseteq S$. 反之, 因 $\mathrm{cl}(S) = \ell(S) \cup \imath(S)$, 故由 $\imath(S) \subseteq S$ 加上 $\ell(S) \subseteq S$ 的假設, 可得 $\mathrm{cl}(S) \subseteq S$. 因此得 $\mathrm{cl}(S) = S$ 得證 S 是 closed. □

最後我們談論 limit point 和 isolated point 是否保持集合的包含關係. 也就是說若 $S \subseteq T$, 是否 $\ell(S) \subseteq \ell(T)$? 又是否 $\imath(S) \subseteq \imath(T)$? 由於 $S \subseteq T$ 我們有 $(S \setminus \{a\}) \subseteq (T \setminus \{a\})$, 因此得 $\mathrm{cl}(S \setminus \{a\}) \subseteq \mathrm{cl}(T \setminus \{a\})$. 故由 Proposition 2.4.3 (2) 知可由 $a \in \ell(S)$, 推得 $a \in \mathrm{cl}(T \setminus \{a\})$, 再推得 $a \in \ell(T)$, 亦即

$$\ell(S) \subseteq \ell(T). \tag{2.4}$$

不過 $\iota(S) \subseteq \iota(T)$ 是不正確的. 這是因為 $a \in \iota(S)$, 表示存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \cap S = \{a\}$, 但 $S \subseteq T$, 此時有可能有其他 T 的元素在 U 之中, 所以無法保證 $a \in \iota(T)$. 然而若 $a \in \iota(T)$, 表示存在 a 的 open neighborhood U 滿足 $U \cap T = \{a\}$, 所以此時因 $U \cap S \subseteq U \cap T$, 故若 $a \in S$, 則可得 $U \cap S = \{a\}$, 亦即 $a \in \iota(S)$. 因此我們有

$$S \cap \iota(T) \subseteq \iota(S). \tag{2.5}$$

Question 2.13. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. 試求 $\ell(\mathbb{Q})$, $\ell(\mathbb{Z})$, $\iota(\mathbb{Q})$ 以及 $\iota(\mathbb{Z})$. 並驗證式子 (2.4), (2.5) 關於它們的之間的包含關係.

Exercise

Excecise 2.1. 假設 $\mathcal{B}$ 是 topological space X 的一個 basis. 若 $S \subseteq X$. 試證明 $a \in \operatorname{int}(S)$ 若且唯若存在 $B \in \mathcal{B}$ 滿足 $a \in B$ 且 $B \subseteq S$. 並依此證明

$$\operatorname{int}(S) = \bigcup_{\{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq S\}} B.$$

Excecise 2.2. 假設 X 為 topological space 且 $X' \subseteq X$. 考慮 X' 上的 topology 為 X 的 subspace topology. 假設 $S \subseteq X'$, 我們令 $\operatorname{int}_X(S)$ 為 S 使用 X 的 topology 所得的 interior, 而令 $\operatorname{int}_{X'}(S)$ 為 S 使用 X' 的 topology 所得的 interior.

(1) 證明 $\operatorname{int}_X(S) \subseteq \operatorname{int}_{X'}(S)$.

(2) 試找到一個例子說明 $\operatorname{int}_X(S) = \operatorname{int}_{X'}(S)$ 未必成立.

Excecise 2.3. 假設 X 為 topological space 且 $S_1, \ldots, S_n$ 為 X 的 subsets. 證明

$$\operatorname{cl}(S_1 \cup \cdots \cup S_n) = \operatorname{cl}(S_1) \cup \cdots \cup \operatorname{cl}(S_n).$$

Excecise 2.4. 假設 X 為 topological space 且 $X' \subseteq X$. 考慮 X' 上的 topology 為 X 的 subspace topology. 假設 $S \subseteq X'$, 我們令 $\operatorname{cl}_X(S)$ 為 S 使用 X 的 topology 所得的 closure, 而令 $\operatorname{cl}_{X'}(S)$ 為 S 使用 X' 的 topology 所得的 closure. 證明 $\operatorname{cl}_{X'}(S) = X' \cap \operatorname{cl}_X(S)$.

Excecise 2.5. 假設 X 為 topological space 且 $S \subseteq X$. 試證明 $\operatorname{int}(\operatorname{bd}(S)) \subseteq \operatorname{int}(S)$ 若且唯若 $\operatorname{int}(\operatorname{bd}(S)) = \emptyset$. 依此說明當 S 是 closed 時, 其邊界是沒有內部的 (即 $\operatorname{int}(\operatorname{bd}(S)) = \emptyset$) 並證明若 S 是 closed, 則 $\operatorname{bd}(\operatorname{bd}(S)) = \operatorname{bd}(S)$.

Excecise 2.6. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 證明 $\operatorname{int}(S) \cap \iota(S)$ 是 X 的 open set.

Excecise 2.7. 假設 X 為 topological space 且 S 為 X 子集合. 試證明若 S 不是 closed, 則 $\ell(S) \neq \emptyset$.

Chapter 3

一些特殊的拓樸性質

這一章中, 我們將探討一些特殊的拓樸性質, 包括 *connectedness*, *compactness* 以及 *Hausdorff property*. 這些性質並不是一般的 topological space 都會有的性質, 不過它們是我們在數學上常用的拓樸空間中所常有的性質. 有了這些性質可以讓我們更清楚的看到這些拓樸空間中的許多特性.

3.1. Connectedness

Connected 是 "連通" 的意思, 我們都知道實數 $\mathbb{R}$ 是連通的, 也就是說整個實數系是相連的, 沒有斷掉的地方. 不過在一般抽象的拓樸空間, 我們怎麼去說它是否連通的呢? 在這一節中, 我們將了解如何去定義一個 topological space 是 connected, 並學習其相關的性質.

3.1.1. Connected Topological Spaces. 要了解怎樣是 "連通", 應該從怎樣是 "不連通" 著手較易了解. 我們還是從實數 $\mathbb{R}$ 的情況來看. 如果實數系 $\mathbb{R}$ 少了 0 這一點, 那毫無疑問的, 大家會認定這一個集合 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 是不連通的, 因為在 0 斷掉了. 此時 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 可以寫成兩個不相交的 open interval 的聯集, 即 $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. 把這個概念放在一般的拓樸空間來說一個空間是不連通的, 似乎滿合理的. 也就是說若整個空間可以被兩個不相交且非空的 open set 區隔開來, 我們便視為不連通. 因此有以下的定義.

Definition 3.1.1. 假設 X 是 topological space, 若存在兩個非空的 open sets U,V 滿足 $U\cap V=\emptyset$ 且 $X=U\cup V$, 則稱 X 為 *disconnected space*. 否則, (即找不到兩個非空且不相交的 open sets U,V 使得 $X=U\cup V$) 我們稱 X 為 *connected space*.

例如若 X 有兩個以上的元素, 考慮 X 的 discrete topology, 由於 X 的所有子集合皆為 open, 所以任取 X 的一個 nonempty proper subset S (即 $S\neq\emptyset$, 且 $S\subsetneq X$), 我們可以將 X 寫成 S,S^c 這兩個非空且不相交的 open sets 的聯集 (即 $X=S\cup S^c$), 所以知此時 X 是 disconnected. 而若考慮 X 的 indiscrete topology, 此時 X 中僅有一個 nonempty open set, 即 X 本身. 因此 X 無法寫成兩個不相交且非空的 open sets 的聯集, 因此此時 X 是 connected. 從這裡可以看出, 一個 topological space 是否為 connected 是和它的拓樸有關

的. 所以前面一開始說, $\mathbb{R}$ 是連通的, 這個說法有誤. 應該說 $\mathbb{R}$ 在 standard topology 之下是連通的. 不過這是要證明的, 它的證明因較技巧性, 我們擺在本節的最後再做證明.

接下來我們要探討一些與 connected (或 disconnected) topological space 等價的性質. 由於這些性質牽涉不同的概念, 我們不把它們擺在一起, 而用個別探討的方式處理. 首先我們觀察, 依定義 X 是 disconnected, 表示存在 U, V 是非空的 open sets 滿足 $U \cap V = \emptyset$ and $X = U \cup V$. 此時

$$U^c = X \setminus U = (U \cup V) \setminus U = V \setminus U = V \setminus (U \cap V) = V.$$

然而 U 是 open, 所以 U^c 是 closed, 也就是說 V 是 closed. 回顧一下我們曾提及一個集合是 open 且是 closed 時, 我們稱之為 *clopen*. 所以此時 V 是 X 的 clopen set (同理 U 也是 clopen). 我們得知當 X 是 disconnected 時, 除了 X 和 $\emptyset$ 外, X 中存在其他的 clopen set. 反之, 若 $U \subsetneq X$ 為非空的 clopen set, 此時令 $V = U^c$, 則 V 為非空的 open set 滿足 $U \cap V = \emptyset$ 且 $X = U \cup V$. 我們得到以下的性質.

Proposition 3.1.2. 假設 X 為 *topological space,* 則 X 是 *connected* 若且唯若 X 中除了 X 和 $\emptyset$ 外沒有既 *open* 又 *closed* 的集合.

Question 3.1. 證明 topological space X 是 disconnected 若且唯若存在 W, Z 是非空的 closed sets 滿足 $W \cap Z = \emptyset$ 且 $X = W \cup Z$.

我們曾在上一章介紹 boundary 時提到拓樸空間中一個集合 S 是 clopen 若且唯若 S 的 boundary 是空集合, 所以由 Proposition 3.1.2, 我們有以下之結果.

Corollary 3.1.3. 假設 X 為 *topological space,* 則 X 是 *connected* 若且唯若對所有不等於 X 的非空子集 S, 皆滿足 $\mathrm{bd}(S) \neq \emptyset$.

要談論 “連通” connected, 離不開談論 “分隔” separated 的概念. 在拓樸中, 我們說兩集合 S, T 是 *separated* sets, 不是只指 $S \cap T = \emptyset$ (這僅是集合的定義無關拓樸). 例如在 $\mathbb{R}$ 中的兩區間 $(0,1)$ 和 $[1,2)$, 雖然它們沒有交集, 但是在 1 這一點, 感覺它們是連在一起的. 不過開區間 $(0,1)$ 和 $(1,2)$, 我們就感覺它們是被 1 這一點隔開了. 也就是說要說兩個集合 S, T 是分隔的, 我們不只要求 S 不會碰觸到 T, 我們也要求 S 不碰觸到 T 的邊界, 意即 $S \cap (T \cup (\mathrm{bd}(T))) = \emptyset$. 又由於 $T \cup (\mathrm{bd}(T)) = \mathrm{cl}(T)$, 所以我們希望的是 $S \cap (\mathrm{cl}(T)) = \emptyset$. 不過要注意 $S \cap (\mathrm{cl}(T)) = \emptyset$ 不等同於 $T \cap (\mathrm{cl}(S)) = \emptyset$. 例如在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下, 當 $S = (0,1)$, $T = [1,2)$ 時, $\mathrm{cl}(T) = [1,2]$ 故 $S \cap (\mathrm{cl}(T)) = \emptyset$. 但 $\mathrm{cl}(S) = [0,1]$, 我們有 $T \cap (\mathrm{cl}(S)) \neq \emptyset$. 也就是說, 我們還要要求 T 也不碰觸到 S 和 S 的邊界, 才能說 S, T 是分隔的兩集合. 我們有以下的定義.

Definition 3.1.4. 假設 X 為 topological space, S, T 為 X 的 subsets. 若 $S \cap (\mathrm{cl}(T)) = \emptyset$ 且 $T \cap (\mathrm{cl}(S)) = \emptyset$, 則稱 S, T 為 *separated sets.*

再次強調一次, separated sets 概念是和拓樸有關的. Connected topological space 和 separated sets 有甚麼關係呢? 簡單的說, X 是 connected 等同於我們無法將 X 寫成兩個非空的 separated sets 的聯集.

Proposition 3.1.5. 假設 X 為 *topological space,* 則 X 是 *connected* 若且唯若 X 中不存在非空的 *separated sets* S,T 滿足 $X = S \cup T$.

Proof. 我們用反面論證, 也就是證明 X 是 disconnected 若且唯若 X 中存在非空的 separated sets S,T 滿足 $X = S \cup T$. 首先假設 X 是 disconnected, 由 Proposition 3.1.2 的證明知此即表示存在 U,V 皆非空且為 clopen 滿足 $U \cap V = \emptyset$ 且 $X = U \cup V$. 由於 V 是 closed, 故 $V = \mathrm{cl}(V)$, 因此由 $U \cap V = \emptyset$ 得 $U \cap (\mathrm{cl}(V)) = \emptyset$, 同理得 $V \cap (\mathrm{cl}(U)) = \emptyset$. 證得存在非空的 U,V 為 separated sets 滿足 $X = U \cap V$.

反之, 假設 X 中存在非空的 separated sets S,T 滿足 $X = S \cup T$. 由於 $T \subseteq \mathrm{cl}(T)$, 我們有 $S \cup (\mathrm{cl}(T)) = X$, 即 $\mathrm{cl}(T)^c \subseteq S$. 又因 $S \cap (\mathrm{cl}(T)) = \emptyset$, 得 $S \subseteq \mathrm{cl}(T)^c$. 因此證得 $S = \mathrm{cl}(T)^c$ 為 X 的 open set. 同理知 T 亦為 X 的 open set. 故由 S,T 不為空集合, 得證 X 為 disconnected. ◻

Proposition 3.1.5 其實證明了當 topological space X 可以寫成兩個集合 S,T 的聯集, 此時 S,T 是 separated sets 就等同於 S,T 皆為 open sets. 因此當我們要說明拓樸空間是 disconnected 時, 若有困難說明蓋住 X 的兩個不相交的集合是 open 時, 可嘗試說明它們是 separated.

拓樸的性質, 當然和連續函數脫不了關係. 若 $Y = \{0,1\}$, 考慮其 discrete topology. 若函數 $f : X \to Y$ 是 continuous, 則 $U = f^{-1}(\{0\})$ 和 $V = f^{-1}(\{1\})$ 皆為 X 的 open set, 滿足 $X = U \cup V$ 以及 $U \cap V = \emptyset$. 現若又假設 f 是 onto, 表示 U,V 皆不為空集合, 因此由定義知此時 X 是 disconnected. 反之, 若 X 是 disconnected, 即存在非空且不相交的 open sets U,V 滿足 $X = U \cup V$. 此時考慮函數 $g : X \to Y$, 定義為 $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in U; \\ 1, & \text{if } x \in V. \end{cases}$ 由於 $X = U \cup V$ 且 $U \cap V = \emptyset$, 知 g 為 well-defined function. 又由於 $Y, \{0\}, \{1\}, \emptyset$ 為 Y 中所有的 open sets, 且 $g^{-1}(Y) = X$, $g^{-1}(\{0\}) = U$, $g^{-1}(\{1\}) = V$, $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ 皆為 X 的 open sets, 故知 $g : X \to Y$ 是 continuous. 我們證得了 X 是 disconnected 若且唯若存在函數 $f : X \to \{0,1\}$ 為映成的連續函數. 因此有以下的定理.

Proposition 3.1.6. 假設 X 為 *topological space* 且 $Y = \{0,1\}$ 考慮其 *discrete topology.* 則 X 是 *connected* 若且唯若任何連續函數 $f : X \to Y$ 皆不是 *onto.*

Proposition 3.1.6 告訴我們如果 X 是 connected, 則任何連續函數 $f : X \to \{0,1\}$ 皆不是 onto; 而若 X 是 disconnected, 則存在連續函數 $f : X \to \{0,1\}$ 是 onto. 這個定理看似簡單, 卻有一個重要的應用.

Corollary 3.1.7. 假設 X,Y 皆為 *topological space* 且 X 是 *connected,* Y 是 *disconnected.* 則任何連續函數 $f : X \to Y$ 皆不是 *onto.*

Proof. 我們用反證法處理. 假設存在連續函數 $f : X \to Y$ 是 onto. 令 $Z = \{0,1\}$ 為 discrete topological space, 則由 Proposition 3.1.6 知存在 onto 的連續函數 $g : Y \to Z$. 此時考慮函數 $g \circ f : X \to Z$. 因 f,g 皆為 continuous, 我們知 $g \circ f$ 亦為 continuous. 而由 f,g 皆為 onto,

也知 $g\circ f$ 亦為 onto. 我們推得了 $g\circ f: X\to Z$ 是 continuous 且 onto. 此與 Proposition 3.1.6 相矛盾, 得證本定理. □

Question 3.2. 假設 X, Y 皆為 topological space 且 X 是 connected, Y 是 disconnected. 是否存在函數 $h: Y\to X$ 是連續且映成的呢?

或許同學會疑問, 在 Proposition 3.1.6 中為何要特別考慮 $\{0,1\}$ 這一個 discrete topological space 呢? 說穿了, 它是所有 disconnected topological spaces 中, 元素個數最少的情況, 也就是最簡單的情況. 而 Corollary 3.1.7 只是將最簡單的 disconnected 的情況推廣到一般的 disconnected 的情況. 事實上 $\{0,1\}$ 這個 discrete topological space 還有一個特點, 就是它是 discrete. 關於 discrete topological space, 我們有以下的性質.

Lemma 3.1.8. *假設 X 為 discrete topological space 且 $Y=\{0,1\}$ 考慮其 discrete topology. 若 X 中存在兩個相異的元素, 則存在連續函數 $f: X\to Y$ 是 onto.*

Proof. 假設任取 $a\in X$, 由於 X 中存在兩相異元素, 故 $X\setminus\{a\}$ 不為空集合. 考慮 $f: X\to Y$ 定義為 $f(x)=\begin{cases}0, & \text{if } x=a;\\ 1, & \text{if } x\neq a.\end{cases}$ 依定義 f 是 onto 又因 X 為 discrete, f 是 continuous, 故得證本定理. □

Question 3.3. 可否由 Lemma 3.1.8 知, 所有元素個數多於一個的 discrete topological space 皆為 disconnected?

給定一函數 $f: X\to Y$, 如果 f 的值域 $f(X)$ 僅有一個元素 (即 $f(x)=b$, $\forall\, x\in X$), 我們稱 f 是一個 *constant function.*

Proposition 3.1.9. *假設 X 為 topological space. 則 X 是 connected 若且唯若對於任意的 discrete topological space Y, 所有連續函數 $f: X\to Y$ 皆為 constant function.*

Proof. 假設 X 為 connected topological space. 任取 Y 為 discrete topological space. 假設存在連續函數 $f: X\to Y$ 不是 constant function. 此時令 $Y'=f(X)$ 且考慮其在 Y 的 subspace topology, 我們知 Y' 也是 discrete topological space, 且函數 $g: X\to Y'$ 定義為 $g(x)=f(x)$, $\forall\, x\in X$ 仍為 continuous (參見 Question 1.10). 然而 f 不是 constant, 表示 Y' 中至少有兩個相異元素, 因此若考慮 discrete topological space $Z=\{0,1\}$, 由 Lemma 3.1.8 知存在連續函數 $h: Y'\to Z$ 是 onto. 因此得 $h\circ g: X\to Z$ 是 continuous 且為 onto. 此與 Proposition 3.1.6 相矛盾, 因此得證 f 必為 constant function.

反之, 若 X 為 disconnected topological space, 此時由 Lemma 3.1.6 知若令 Y 為 discrete topological space $\{0,1\}$, 則存在 $f: X\to Y$ 是 continuous 且為 onto, 得證 f 不是 constant function. □

Question 3.4. 假設 X 為 connected topological space 且 Y 為 discrete topological space. 試直接 (不用 Lemma 3.1.8) 證明任意連續函數 $f: X\to Y$ 皆為 constant function.

通常我們探討一個性質時, 會去關心這個性質是否會被 homeomorphism 所保持, 也就是說當一個 topological space X 具有某一性質時, 那麼對任意和 X 是 homeomorphic 的 topological space Y, 是否保有該性質? 若該性質仍保持住, 我們便稱該性質是一個 "拓樸性質". 從前面的定理, 我們知道 connected 的性質就是一個拓樸性質.

Question 3.5. 假設 X,Y 為 topological spaces 且 X,Y 為 homeomorphic. 試證明, 若 X 為 connected 則 Y 亦為 connected.

談論一個拓樸的性質, 接下來會關心的是, 這些性質在我們前面談的 subspace topology, disjoint union topology, product space topology 以及 quotient space topology 的情況. 我們來看看, 關於 connected 的性質, 在上述情況之下, 它們是否會改變.

假設 X,Y 皆為非空的 topological space. 考慮 disjoint union space $X \amalg Y$. 由於用 disjoint union topology X 對應的是 $X \amalg Y$ 上非空的 clopen subset. 故由 Proposition 3.1.2 知 $X \amalg Y$ 絕不會是 connected topological space. 至於 product space, 我們有以下的結果.

Proposition 3.1.10. 假設 X,Y 是非空的 *topological spaces,* 考慮 *produce space* $X \times Y$. 則 $X \times Y$ 是 *connected* 若且唯若 X,Y 皆為 *connected.*

Proof. 首先假設 X,Y 皆為 connected topological spaces. 我們要證明 product space $X \times Y$ 亦為 connected. 考慮 discrete topological space $Z = \{0,1\}$. 藉由 Proposition 3.1.9, 我們要證明任意的連續函數 $f : X \times Y \to Z$ 皆為 constant function. 首先任取 $(x_0,y_0) \in X \times Y$, 不失一般性我們假設 $f(x_0,y_0) = 0$. 現考慮函數 $h_{y_0} : X \to X \times Y$, 其定義為 $h_{y_0}(x) = (x,y_0)$. 利用 product space topology 的定義, 很容易驗證 h_{y_0} 是 continuous. 因此 $f \circ h_{y_0} : X \to Z$ 是一個連續函數, 也因此由 X 是 connected 的假設以及 Proposition 3.1.9 知 $f \circ h_{y_0}$ 是一個 constant function, 亦即

$$f(x,y_0) = f \circ h_{y_0}(x) = f \circ h_{y_0}(x_0) = f(x_0,y_0) = 0, \ \forall\, x \in X.$$

接下來我們要說明對任意 $(a,b) \in X \times Y$, 皆有 $f(a,b) = 0$, 因此得證 f 為 constant function. 事實上因 $a \in X$, 由上式我們知 $f(a,y_0) = 0$. 現考慮函數 $l_a : Y \to X \times Y$, 定義為 $l_a(y) = (a,y)$. 同樣的, 由 l_a 為 continuous 以及 Y 為 connected, 我們得 $f \circ l_a : Y \to Z$ 是 constant function, 亦即

$$f(a,y) = f \circ l_a(y) = f \circ l_a(y_0) = f(a,y_0) = 0, \ \forall\, y \in Y.$$

因此由 $b \in Y$ 得證 $f(a,b) = 0$.

另一方面, 若 $X \times Y$ 是 connected, 由 $\pi_1 : X \times Y \to X$ 以及 $\pi_2 : X \times Y \to Y$ 皆為 onto 的 continuous functions, Corollary 3.1.7 告訴我們 X,Y 必為 connected. □

我們可以用數學歸納法將 Proposition 3.1.10 推廣到有限多個 topological spaces 的 product space 的情況. 事實上它也可以推廣到無窮多個 topological spaces 的 product space 的情況, 不過它的證明牽涉到 *axiom of choice*, 這裡就不多談了.

對於 connected 與 quotient space 的關係, 我們有以下的結果.

Proposition 3.1.11. 假設 X 是 *topological spaces* 且 $\sim$ 是 X 上的一個 *equivalence relation.* 若 X 是 *connected,* 則 *quotient space* $X/\sim$ 亦為 *connected.*

Proof. 由 quotient space topology 的定義知 quotient map $q: X \to X/\sim$ 是 onto 的 continuous function. 因此由 X 是 connected 以及 Corollary 3.1.7 知 $X/\sim$ 亦為 connected. □

Question 3.6. 假設 X 是 topological spaces 且 $\sim$ 是 X 上的一個 equivalence relation. 若 quotient space $X/\sim$ 是 connected, 是否可推得 X 亦為 connected?

接下來, 我們要探討 connected 與 subspace topology 的關係.

3.1.2. Connected Subsets. 前面我們僅探討一個 topological space 是否為 connected, 其實對於一個 topological space 上的 subset 我們仍可探討其是否為 connected. 這個方法很簡單, 就是要將此 subset 視為 topological space. 至於要如何將其視為 topological space 呢? 當然就是使用 subspace topology 了.

Definition 3.1.12. 假設 X 是 topological spaces 且 S 為其 subset. 若在考慮 subspace topology 將 S 視為 topological space 之下, S 是 connected, 則稱 S 是 X 的 *connected subset*; 否之則稱為 *disconnected subset.*

例如在任何的 topological space X, 一個點 $a \in X$ 所成的集合 $\{a\}$ 一定是 connected. 而在 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 來看, $(0,1)$, $(1,2)$ 這兩個開區間的聯集 $(0,1) \cup (1,2)$ 就是 disconnected subset.

再次強調一下, subspace topology 和原來的 topological space 上的 topology 息息相關, 所以一個子集合是否為 connected, 仍和原來的 space 的 topology 有關. 使用 subspace topology 的好處是當 X, Y 是 topological spaces 且 $f: X \to Y$ 是 continuous, 依 subspace topology 的定義可得對於任何 $S \subseteq X$ 利用 subspace topology, 函數 $f|_S : S \to Y$ 仍為 continuous. 另外又因 $f(S)$ 是 Y 的 subset, 若我們考慮函數 $g: S \to f(S)$, 定義為 $g(s) = f(s)$, $\forall s \in S$ (即將 $f|_S$ 視為是一個 S 到 $f(S)$ 的函數), 對於 $f(S)$ 使用 subspace topology, 我們知 $g: S \to f(S)$ 亦為 continuous (參見 Question 1.10). 底下我們將一直用到這個特性, 就不再個別強調了.

Proposition 3.1.13. 假設 X, Y 是 *topological spaces* 且 $f: X \to Y$ 是 *continuous.* 若 S 是 X 的 *connected subset,* 則 $f(S)$ 是 Y 的 *connected subset.*

Proof. 考慮 $S, f(S)$ 分別為 X, Y 的 subspace. 另外考慮函數 $g: S \to f(S)$, 定義為 $g(s) = f(s)$, $\forall s \in S$. 現若 S 是 connected, 知 g 是從 connected topological space S 映射到 $f(S)$ 的連續函數且為 onto. 故由 Corollary 3.1.7 知 $f(S)$ 必為 connected. □

Question 3.7. 假設 X, Y 是 topological spaces 且 $f: X \to Y$ 是 continuous. 若 S 是 X 的 disconnected subset, 是否 $f(S)$ 是 Y 的 disconnected subset?

很容易理解兩個 connected subsets 的聯集不一定是 connected (只要考慮兩個集合不相交的情形即可), 不過若兩個 connected subsets 有交集, 那麼它們的聯集就會是 connected.

Proposition 3.1.14. 假設 X 是 *topological space* 且 S, S' 是 X 的 *connected subsets.* 若 $S \cap S' \neq \emptyset$, 則 $S \cup S'$ 是 X 的 *connected subset.*

Proof. 首先若 $S = S'$, 則 $S \cup S' = S$ 為 connected. 而若 $S \neq S'$, 由 $S \cap S' \neq \emptyset$, 我們知 $S \cup S'$ 有多於一個的元素, 此時我們用反證法假設 $S \cup S'$ 是 disconnected. 由 Lemma 3.1.8 知存在 continuous 且 onto 的函數 $f : S \cup S' \to \{0, 1\}$, 其中 $\{0, 1\}$ 使用 discrete topology. 現因 S 是 connected 且 $f|_S : S \to \{0, 1\}$ 是 continuous, 由 Proposition 3.1.9 知 $f|_S$ 是 constant function. 不失一般性我們假設對於任意 $s \in S$ $f(s) = 0$. 同理 $f|_{S'} : S' \to \{0, 1\}$ 亦為 constant function. 由於 $f : S \cup S' \to \{0, 1\}$ 是 onto, 此時我們有 $f(s') = 1, \forall s' \in S'$. 不過存在 $a \in S \cap S'$, 此時會有 $f(a) = 0$ (因 $a \in S$) 且 $f(a) = 1$ (因 $a \in S'$) 之矛盾情況發生, 故得證 $S \cup S'$ 必為 connected. □

Question 3.8. 假設 X 是 topological space. 考慮以 I 為 index set 的 indexed family $\{S_i\}_{i \in I}$, 其中 S_i 皆為 X 的 connected subset. 假設對所有 $i, j \in I$, 皆有 $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. 證明 $\bigcup_{i \in I} S_i$ 是 X 的 connected subset.

Question 3.9. 假設 X 是 topological space 且 S, S' 是 X 的 connected subsets. 是否可得 $S \cap S'$ 是 connected 呢?

前面處理 connected 的性質, 我們大多是使用連續函數來幫忙處理, 不過下一個重要的性質, 就不容易這樣處理了.

Proposition 3.1.15. 假設 X 是 *topological space* 且 S 是 X 的 *connected subset.* 若 $S' \subseteq X$ 滿足 $S \subseteq S' \subseteq \mathrm{cl}(S)$, 則 S' 是 X 的 *connected subset.*

Proof. 假設 S' 不是 connected, 由 Proposition 3.1.2 知, 在 S' 使用 X 的 subspace topology 之下, 存在著非空且不等於 S' 的 clopen subset T. 這表示存在 U 在 X 是 open 以及 C 在 X 是 closed 滿足 $U \cap S' = C \cap S' = T$. 現因 $T \neq \emptyset$, 任取 $a \in T$, 由於 $a \in U$ (因 $T = U \cap S'$), 故 U 是 a 在 X 中的一個 open neighborhood, 又由 $a \in \mathrm{cl}(S)$ (因 $T \subseteq S' \subseteq \mathrm{cl}(S)$), 知必存在 $s \in U \cap S$. 換言之 $U \cap S$ 是 S 中一個非空的 open set. 另外

$$C \cap S = C \cap (S' \cap S) = (C \cap S') \cap S = (U \cap S') \cap S = U \cap S,$$

得 $U \cap S$ 亦為 S 中的 closed set, 亦即 $U \cap S$ 是 S 中非空的 clopen set. 故由 S 是 connected 以及 Proposition 3.1.2 知 $S = U \cap S = C \cap S$, 亦即 $S \subseteq C$. 但 $\mathrm{cl}(S)$ 是 X 中包含 S 最小的 closed set (Theorem 2.2.3), 故得 $\mathrm{cl}(S) \subseteq C$. 因此由 $S' \subseteq \mathrm{cl}(S)$ 得 $T = C \cap S' = S'$. 此與當初假設 $T \neq S'$ 相矛盾, 故知 S' 必為 connected. □

Question 3.10. 假設 S 是 topological space X 中的 connected subset. 試說明 $\mathrm{cl}(S)$ 是 connected. 另外 $\mathrm{int}(S)$ 會是 connected 嗎?

Connected topological space 有很多好的性質, 比方說我們可以有實數的連續函數的中間值定理 (底下會探討). 所以當 topological space X 不是 connected 時, 給定 $a \in X$, 我們會考慮包含 a 最大的 connected subset, 稱之為包含 a 的 *connected component*. 對任意的點 a 其 connected component 一定存在嗎? 答案是肯定的. 大家別忘了 $\{a\}$ 就是包含 a 的一個 connected subset, 所以包含 a 的 connected subset 一定存在. 現在要找到包含 a 最大的 connected subset, 我們自然會想到將所有包含 a 的 connected subset 都聯集起來, 也就是令 $\mathfrak{S} = \{S \in \mathcal{P}(X) \mid a \in S$ 且 S is connected$\}$, 我們考慮 $D = \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S$. 由於 a 在每一個 S 中, 我們當然有 $a \in D$. 不只如此, 由於對任意 $S, S' \in \mathfrak{S}$ 我們有 $a \in S \cap S'$, 故知 $S \cap S' \neq \emptyset$. 因此由這些 S 都是 connected 以及 Question 3.8 的結果, 我們知 D 是 connected. 由此可知包含 a 的 connected component 是存在且唯一的. 接下來我們給 connected component 正式的定義.

Definition 3.1.16. 假設 X 是 topological space 且 S 是 X 的 connected subset. 若 X 中除了 S 外沒有其他的 connected subset 會包含 S, 則稱 S 是 X 的一個 *connected component*.

要注意, 一些拓樸的書籍是用 "最大" 的 connected subset 來定義 connected component. 這裡最大並不是指會包含所有的 connected subset, 而是指沒有其他的 connected subset 會包含它. 主要的原因是集合的包含關係不是 total order 的關係 (即任意兩個集合都可比大小), 所以在這情況之下的 "最大" 指的便是沒有其他的集合比它大. 因此別的書籍的定義和我們的定義是一致的. 不過從前面的討論中我們知道包含 a 的 connected component 確實是所有包含 a 的 connected subset 都會包含於它.

Connected component 有以下幾個重要性質.

Proposition 3.1.17. 假設 X 是 *topological space.*

(1) X 的 *connected components* 形成 X 的一個 *partition.*

(2) 所有 X 的 *connected component* 皆為 X 的 *closed subset.*

(3) 若 S 是 X 的 *connected subset,* 則存在唯一的 *connected component* 包含 S.

Proof. (1) 要說明 X 的 connected components 形成 X 的一個 partition, 就是要說明兩件事. 第一: 所有的元素 $a \in X$ 必在某個 connected component 中. 這在前面的討論中已證實了. 第二: 兩個相異的 connected component 不相交. 這是因為若 S, S' 為相異的 connected component 滿足 $S \cap S' \neq \emptyset$. 此時由 Proposition 3.1.14 知 $S \cup S'$ 為 connected. 但因 S 是 connected component 依其最大的性質, 得 $S = S \cup S'$, 即 $S' \subseteq S$. 同理由 S' 為 connected component, 得 $S' = S$. 此與 $S \neq S'$ 相矛盾, 故知 $S \cap S' = \emptyset$.

(2) 假設 S 是 X 的一個 connected component. 由於 S 是 connected, Proposition 3.1.15 告訴我們 $\mathrm{cl}(S)$ 也是 connected. 若 S 不是 closed (即 $S \subsetneq \mathrm{cl}(S)$, 表示 $\mathrm{cl}(S)$ 是比 S 還大的 connected set, 此與 S 是 connected component 之假設相矛盾, 故證得 S 是 closed.

(3) 假設 S 是 connected. 任取 $a \in S$. 我們知必存在一個 connected component C 滿足 $a \in C$. 此時因 $S \cap C \neq \emptyset$ 且 S, C 皆為 connected, 由 Proposition 3.1.14 知 $S \cup C$ 是

connected. 再由 C 是 connected component 知 $C = C \cup S$, 得證 $S \subseteq C$, 亦即 S 包含於 connected component C. 現若 C, C' 皆為包含 S 的 connected component 則因 $S \subseteq C \cap C'$ 知 $C \cap C' \neq \emptyset$. 再由 C, C' 皆為 connected 得 $C \cup C'$ 亦為 connected. 因此由 C 為 connected component 得 $C = C \cup C'$, 即 $C' \subseteq C$. 同理得 $C \subseteq C'$, 得 $C = C'$, 因此得證唯一性. □

Question 3.11. 假設 X 為 topological space 且假設 X 僅有有限多個 connected component. 試證明 X 的 connected component 皆為 X 的 open subset.

Question 3.12. 假設 X 是 topological space 且 $S \subseteq X$. 令

$$\mathcal{E} = \{C \in \mathcal{P}(X) \mid S \subseteq C \text{ 且 } C \text{ is connected}\}.$$

(1) 假設 S 是 connected. 試證明 $\bigcup_{C \in \mathcal{E}} C$ 就是包含 S 唯一的 connected component.

(2) 假設 S 是 disconnected. 試說明為何 $\bigcup_{C \in \mathcal{E}} C$ 不一定會是包含 S 的 connected component?

從 Proposition 3.1.17 我們知道 connected component 一定是 closed set. 不過有一種拓樸空間其 connected component 會是 open set. 我們先看這種拓樸空間的定義.

Definition 3.1.18. 假設 X 為 topological space. 若對任意 $a \in X$ 及其任意的 open neighborhood U 皆存在 a 的 open neighborhood V 滿足 $V \subseteq U$ 且 V 為 connected. 則稱 X 為 *locally connected space*.

例如 $\mathbb{R}$ 在 standard topology 之下, 我們將會說明 $\mathbb{R}$ 上的開區間都是 connected, 所以在 standard topology 之下 $\mathbb{R}$ 會是 locally connected space. 要注意 locally connected space 是"局部"的性質, 並未要求整個 space 要 connected. 事實上 locally connected space 和 connected space 是兩個互不相關的拓樸性質. 我們可以找到一個 topological space 不是 connected 但卻是 locally connected. 例如兩開區間的聯集 $(0,1) \cup (1,2)$ 視為 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下的 subspace 是 disconnected, 但卻是 locally connected. 另外也有可能一個 topological space 是 connected 但卻不是 locally connected. 例如所謂的 "topologist's sine curve" 視為 $\mathbb{R}^2$ 的 standard topology 的 subspace 就是 connected, 但不是 locally connected. Topologist's sine curve 是一個有趣的拓樸空間, 有興趣的同學可以參考一般拓樸書籍的介紹, 在此我們就不多作介紹了.

接下來我們說明在 locally connected space 中的 connected component 會是 open set. 假設 X 是 locally connected space. 對於任意 X 的 connected component S, 任取 $a \in S$. 由於 X 是 a 的一個 open neighborhood, 由 locally connected 的性質, 我們知存在 a 的 open neighborhood V 是 connected. 由於 $S \cap V \neq \emptyset$ 且 S, V 皆為 connected, 我們得 $S \cup V$ 是 connected. 故由 S 是 connected component, 得 $S \cup V = S$, 因此得 $V \subseteq S$. 也就是說對任意 $a \in S$, 我們皆可找到 a 的 open neighborhood V 滿足 $V \subseteq S$, 因此得證 S 是 open set. 我們證得了以下的定理.

Proposition 3.1.19. 假設 X 是 *locally connected topological space,* 則任何 X 的 *connected component* 皆為 X 的 *open subset.*

其實上面 Proposition 3.1.19 的證明, 我們僅用到 X 中任一點 a 皆存在著 connected open neighborhood 這個性質, 便可推得 X 的 connected component 皆為 open. 不過要注意, 每一個點皆存在著 connected open neighborhood, 並不是 locally connected 的定義. Locally connected space 由於條件更強, 事實上我們可以推得以下更好的性質.

Proposition 3.1.20. 假設 X 是 *topological space.* 則 X 是 *locally connected* 若且唯若任意 X 的 *open set* 都可以寫成一些 X 的 *connected open sets* 的聯集.

Proof. 假設 X 是 locally connected 且 S 是 X 的 open subset. 對任意 $a \in S$, 由於 S 是 open 且 X 為 locally connected, 故由定義知存在 V_a 為 X 中的一個 connected open set 且滿足 $a \in V_a$ 及 $V_a \subseteq S$. 現由於 $\cup_{a\in S} V_a = S$, 得證 S 可以寫成一些 X 的 connected open sets 的聯集.

反之, 若任意 X 的 open set 都可以寫成一些 connected open sets 的聯集. 現任取 $a \in X$, 且令 U 為 a 的 open neighborhood. 依假設 U 可以寫成一些 connected open sets 的聯集, 亦即存在 indexed family $\{V_i\}_{i\in I}$ 其中對任意 $i \in I$, V_i 為 X 的 connected open set, 使得 $U = \bigcup_{i\in I} V_i$. 因此存在 $i \in I$ 使得 $a \in V_i$. 即 V_i 為 a 的一個 connected open neighborhood 且滿足 $V_i \subseteq U$, 得證 X 為 locally connected. □

3.1.3. Connectedness of $\mathbb{R}$. 我們要證明 $\mathbb{R}$ 在 standard topology 之下是 connected. 實數系的建立, 需用到一些公設, 不過我們這裡不探討這個問題, 就直接假設實數系具有所謂的 *least upper bound* property. 也就是說任意實數的非空子集合, 如果有上界, 就會有 "最小上界". 同樣的若有下界, 就會有 "最大下界".

首先我們證明任意的開區間 (a,b) 會是 connected. 這裡我們用反證法, 也就是說假設存在兩個非空的 open set U, V 滿足 $(a,b) = U \cup V$ 且 $U \cap V = \emptyset$, 我們要得到矛盾. 首先任取 $c \in U$, 我們自然有 $a < c < b$. 現考慮集合 $S = \{r \in \mathbb{R} \mid [c,r) \subseteq U\}$. 由於 U 是 open, 而 $c \in U$, 故存在 $\varepsilon > 0$, 滿足 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq U$. 因此知 $c+\varepsilon \in S$, 也就是說 S 是非空的集合. 又因 $U \subseteq (a,b)$, 我們知對任意 $r \in S$, 皆有 $[c,r) \subseteq (a,b)$, 因此得 $r \leq b$, 也就是說 b 是 S 的一個上界. 故存在 $l \in \mathbb{R}$ 是 S 的最小上界. S 的最小上界未必在 S 中, 不過接下來我們要說明 $l \in S$, 亦即 $[c,l) \subseteq U$. 這是因為對任意 $x \in [c,l)$, 由於 $x < l$ 且 l 是 S 的最小上界, 我們知存在 $r \in S$ 滿足 $x < r < l$ (否則 x 會是 S 的上界, 此與 l 是最小上界相違背) 也就是說 $[c,r) \subseteq U$, 故得 $x \in U$, 證明了 $[c,l) \subseteq U$. 要注意, 因為 l 是 S 的上界, 所以 $l \notin U$. 這是因為若 $l \in U$, 則再次利用 U 是 open, 會存在 $\epsilon > 0$ 使得 $(l-\epsilon, l+\epsilon) \subseteq U$, 也因此會得到 $[c, l+\epsilon) \subseteq U$, 即 $l+\epsilon \in S$, 此與 l 是 S 的上界相矛盾. 最後我們要說明 $l = b$. 由於已知 $l \leq b$ (因 b 是 S 的上界), 若 $l \neq b$, 表示 $l < b$. 因此由 $l \in (a,b) = U \cup V$ 以及 $l \notin U$, 得 $l \in V$. 然而依假設 V 為 open, 亦即存在 $\gamma > 0$ 滿足 $(l-\gamma, l+\gamma) \subseteq V$. 這表示 $[c,l) \cap (l-\gamma, l+\gamma) \subseteq U \cap V$, 造成與 $U \cap V = \emptyset$ 的假設相矛盾. 因此得證 $l = b$, 也因此得 $[c,b) \subseteq U$. 同樣道理, 我們也可得 $(a,c] \subseteq U$. 也因此得到 $(a,b) = (a,c] \cup [c,b) = U$ 之矛盾 (因此時表示 $V = \emptyset$). 證得 (a,b) 是 connected.

利用 (a,b) 是 connected 以及 Proposition 3.1.15 我們可得區間 $[a,b)$, $(a,b]$ 以及 $[a,b]$ 皆為 connected. 又利用 Question 3.8, 我們可得 (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ 以及 $\mathbb{R}$ 皆為 connected. 我們有以下的定理.

Proposition 3.1.21. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 *standard topology.* 所有的開區間, 閉區間, 半開半閉區間, 以及 $\mathbb{R}$ 皆為 *connected.*

Question 3.13. 請完成 Proposition 3.1.21 的證明.

其實 Proposition 3.1.21 的反向也是對的, 也就是說 $\mathbb{R}$ 中的 connected subsets 就是所有的開區間, 閉區間, 半開半閉區間, 以及 $\mathbb{R}$ 本身. 這是因為 $\mathbb{R}$ 中的 connected subsets 有以下的性質.

Proposition 3.1.22. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 *standard topology.* 假設 S 是 $\mathbb{R}$ 的 *connected subsets* 且 $a,b\in S$ 其中 $a<b$. 若 $a<c<b$, 則 $c\in S$.

Proof. 我們用反證法, 假設 $c\notin S$. 此時考慮 $\mathbb{R}$ 中的開區間 $U=(-\infty,c)$, $V=(c,\infty)$. 在 subspace topology 之下, $U\cap S$ 是 S 中非空的 open set (因 $a\in U\cap S$). 同理 $V\cap S$ 也是 S 中非空的 open set. 又由於 $S=(U\cap S)\cup(V\cap S)$ 且 $(U\cap S)\cap(V\cap S)=(U\cap V)\cap S=\emptyset$, 我們得 S 是 disconnected. 此與 S 是 connected 的結果相矛盾, 故得 $c\in S$. □

我們可以用 Proposition 3.1.22 找到所有 $\mathbb{R}$ 的 connected subsets. 例如, 如果 S 是 $\mathbb{R}$ 的 connected subset 且無上界與下界. 此時任取 $\mathbb{R}$ 中一點 c, 由於 S 無上界, 故之必存在 $b\in S$ 滿足 $c<b$. 又因 S 無下界, 也存在 $a\in S$ 滿足 $a<c$, 因此由 Proposition 3.1.22, 得 $c\in S$. 我們證得了此時 $S=\mathbb{R}$. 要注意, 這不是 $\mathbb{R}$ 是 connected 的證明. 這裡僅說明了, 如果 S 是 $\mathbb{R}$ 中無上界與下界的 connected subset, 那麼唯一可能的情況就是 $S=\mathbb{R}$. 不過有可能 $\mathbb{R}$ 中沒有既無上界又無下界的 connected subset, 所以這並未說明 $\mathbb{R}$ 是 connected. 要證明 $\mathbb{R}$ 是 connected 還是要用到如前面 least upper bound property 這樣的性質才能做到.

Question 3.14. 試利用 Proposition 3.1.22 證明如果 S 是 $\mathbb{R}$ 中有上下界的 connected subset, 則存在 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 S 為區間 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ 或 $[a,b]$ (需用到 least upper bound 和 greatest lower bound). 同樣假設 S 是 connected, 也請說明當 S 分別為無上界但有下界以及 S 無下界但有上界時, S 可能的情況.

知道 $\mathbb{R}$ 中的 connected subsets 有哪些, 我們就可以推得一些大家熟悉的實數連續函數的性質. 例如我們可以利用 Proposition 3.1.9 證明若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是連續函數, 且 $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{Z}$, 則 f 必為 constant function; 也可利用 Proposition 3.1.13 得到連續函數的中間值定理.

3.2. Compactness

Compact 的概念, 並不太直觀, 不過許多重要的數學性質都和它有關. 例如實數的連續函數在閉區間必有極大極小值, 就是利用 compact 的性質推得. 在這節中我們將了解有關 compact 的重要性質.

3.2.1. Compact Topological Space. 在拓樸中 compactness 指的是“緊緻”的意思, 它大致的意思是東西都可緊靠在一起但又很細緻不混亂, 容易區分. 在拓樸空間中要區隔東西當然是利用 open sets 了. 所以在 topological space X 中, 我們通常會用一些 open sets, 將 X 寫成這些 open set 的聯集. 這樣的寫法, 我們稱之為 X 的一個 *open cover*. 一般來說, 為了將 X 中的一些元素區隔開來, 可能需要許多 open sets 才能將 X 蓋滿, 所以我們選的 open cover 可能很複雜很混亂. 如果在我們每次選的 open cover 中, 都能排除一些不必要的 open sets, 僅用有限多個 open sets 將 X 蓋住. 這樣不僅達到我們要區隔這些元素的目的, 而且也因僅有有限多個 open sets 變得很容易處理. 這就是 compact 的概念. 首先, 我們還是給正式的定義.

Definition 3.2.1. 假設 X 是 topological space, 且 $\mathcal{T}$ 為其 topology. 若 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ (即 $\mathcal{S}$ 是由 open sets 所形成的集合). 滿足 $X = \bigcup_{U\in\mathcal{S}} U$, 則稱 $\mathcal{S}$ 是 X 的一個 *open cover*. 又若 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ 且 $\mathcal{S}'$ 仍為 X 的 open cover (即 $X = \bigcup_{U\in\mathcal{S}'} U$), 則稱 $\mathcal{S}'$ 為由 $\mathcal{S}$ 所得 X 的 *subcover*. 特別的, 當 $\mathcal{S}'$ 只有有限多個元素時, 我們又稱 $\mathcal{S}'$ 為由 $\mathcal{S}$ 所得 X 的 *finite subcover*.

由定義我們知 $\mathcal{T}$ 就是 X 的一個 open cover (因為 $X \in \mathcal{T}$, 所以 $X = \bigcup_{U\in\mathcal{T}} U$). 現若 $\mathcal{S}$ 是 X 的 open cover, 由於 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, 所以我們可以說 $\mathcal{S}$ 是由 $\mathcal{T}$ 所得 X 的 subcover.

Example 3.2.2. 考慮實數的 standard topology 以及 $\mathcal{S} = \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. 由於對任意 $x \in \mathbb{R}$, 皆可找到 $n \in \mathbb{N}$ 滿足 $x \in (-n,n)$, 故知 $\mathbb{R} = \bigcup_{U\in\mathcal{S}} U$, 也就是說 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一個 open cover. 而 $\mathcal{S}' = \{(-2n,2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 由於滿足 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ 且 $\mathbb{R} = \bigcup_{U\in\mathcal{S}'} U$, 所以 $\mathcal{S}'$ 是由 $\mathcal{S}$ 所得的 subcover. 不過由於 $\mathcal{S}'$ 有無窮多個元素, 所以它不是 finite subcover.

另外 $\grave{\mathcal{S}} = \{(-n,n) \mid n \in \mathbb{N}, n < 10\}$ 雖滿足 $\grave{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ 且僅有有限多個元素但因不滿足 $\mathbb{R} = \bigcup_{U\in\grave{\mathcal{S}}} U$, 所以它不是由 $\mathcal{S}$ 所得的 finite subcover (也不是 subcover). 而 $\breve{\mathcal{S}} = \{(-n,2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 雖滿足 $\mathbb{R} = \bigcup_{U\in\breve{\mathcal{S}}} U$ 但不滿足 $\breve{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$, 所以它也不是由 $\mathcal{S}$ 所得的 subcover.

Question 3.15. 試證明在 Example 3.2.2 中, 無法找到由 $\mathcal{S}$ 所得 $\mathbb{R}$ 的 finite subcover.

接下來我們定義何謂 compact topological space.

Definition 3.2.3. 假設 X 為 topological space. 若對任意 X 的 open cover 皆存在 finite subcover, 則稱 X 為 *compact*; 否則便稱為 *non-compact*.

要注意 X 是 compact 的定義, 並不是說 X 可以被有限多個 open set 蓋住即可, 而是說任何用 open sets 蓋住 X 的方法中, 都可以在這些 open sets 中找到有限多個 open sets 蓋住 X. 例如 $\mathbb{R}$, 可被 $(-\infty,0)$ 以及 $(-1,\infty)$ 蓋住, 即 $\mathbb{R} = (-\infty,0) \cup (-1,\infty)$. 不過在 Question 3.15 中, 我們知道所有形如 $(-n,n)$ 的 open sets 可以蓋住 $\mathbb{R}$, 但無法在它們中找到有限多個來蓋住 $\mathbb{R}$. 所以在 standard topology 之下, $\mathbb{R}$ 不是 compact topological space.

當 X 是 indiscrete topological space, 由於只有一個非空的 open set, 因此在次情形 X 一定是 compact. 至於當 X 是 discrete topological space, 由於每一個點所成的集合便是 open set, 我們可考慮由每一點所成的集合所得的 open cover, 即 $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$. 此時會有 finite subcover, 就表示 X 僅有有限多個元素. 很容易看出若一個 topological space 只有有限多個元素, 那它一定是 compact. 另外底下我們會談論到在 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology 的情形有一個簡單判斷是否為 compact 的方法 (所謂的 Heine–Borel Theorem). 除此之外, 一般來說並不是太容易判別一個 topological space 是否為 compact. 雖然仍然有一些等價條件來判斷是否為 compact, 不過大多牽涉到一些新的名詞定義, 由於這裡我們僅介紹有關 compact 基本的性質, 就不去探討它們了. 接下來我們看一些有關 compact topological space 的性質.

在一般的情形, 要討論無窮多個集合的交集, 通常我們會先考慮它們中有限多個集合的交集. 不過這常會有一些不是我們預期的結果出現. 例如考慮實數中一些開區間所形成的集合 $\mathcal{S} = \{(n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$. 任取 $\mathcal{S}$ 中有限多個開區間做交集, 我們知道它一定不會是空集合, 不過若將 $\mathcal{S}$ 中所有的開區間做交集, 我們會有 $\bigcap_{U \in \mathcal{S}} U = \emptyset$. 要怎樣避免這樣的情形發生呢? 一般來說如果由一些 X 的子集合所形成的集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, 在其中任取有限多個集合做交集皆不會是空集合 (即對任意 $n \in \mathbb{N}$, $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ 皆有 $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \neq \emptyset$), 則稱 $\mathcal{S}$ 有 *finite intersection property* (簡稱 FIP). 前面的例子 $\mathcal{S} = \{(n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 就有 FIP, 從這例子我們也知道一般的情況若 $\mathcal{S}$ 有 FIP, 不代表它裡面所有集合的交集 $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$ 不會是空集合. 不過對於 compact topological space, 就有以下有趣的現象.

Proposition 3.2.4. 假設 X 是 *compact topological space* 且 $\mathcal{F}$ 是由 X 中一些 *closed set* 所成的集合 *(*即若 $F \in \mathcal{F}$, 則 F 是 *closed).* 若 $\mathcal{F}$ 有 *finite intersection property,* 則 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Proof. 我們要用反證法, 先假設 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. 現考慮 $\mathcal{U} = \{F^c \mid F \in \mathcal{F}\}$, 則 $\mathcal{U}$ 裡的元素皆為 X 的 open set, 又

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c = (\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F)^c = X.$$

我們得 $\mathcal{U}$ 是 X 的一個 open cover. 因 X 是 compact, 故存在 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ 使得 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$. 此時對任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$, 因 $U_i \in \mathcal{U}$, 故存在 $F_i \in \mathcal{F}$ 滿足 $U_i = F_i^c$, 我們有

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^c = (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)^c = X^c = \emptyset.$$

此與 $\mathcal{F}$ 有 FIP 相矛盾, 得證 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. □

Question 3.16. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 且考慮 $\mathcal{F} = \{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$. 試說明 $\mathcal{F}$ 是由 $\mathbb{R}$ 中一些 closed set 所成的集合且有 finite intersection property. 試說明 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, 並說明此結論為何沒有與 Proposition 3.2.4 相矛盾?

事實上, Proposition 3.2.4 的反向也是對的, 由於證明方法相似, 我們就留做習題.

接下來我們自然會問連續函數與 compactness 的關係.

Proposition 3.2.5. 假設 X, Y 為 *topological spaces* 且 $f : X \to Y$ 是 *onto* 的 *continuous function.* 若 X 是 *compact,* 則 Y 是 *compact.*

Proof. 要說明 Y 是 compact, 任取 Y 的 open cover $\mathcal{U}$, 我們要找到有限多個 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ 滿足 $Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. 對於任意 $U \in \mathcal{U}$, 由於 U 是 Y 的 open set 且 f 是 continuous, 我們有

$f^{-1}(U)$ 是 X 的 open set. 現因 $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = Y$, 我們有

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) = f^{-1}(Y) = X,$$

亦即 $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ 是 X 的 open cover. 因此由 X 是 compact, 知存在 $n \in \mathbb{N}$, 以及 $f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)$, 其中每個 $U_i \in \mathcal{U}$ 滿足 $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i) = X$. 我們要證明這些 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ 滿足 $Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$. 事實上, 任取 $y \in Y$, 由於 $f : X \to Y$ 是 onto, 存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$. 又由於 $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i) = X$, 我們知存在 $i = \{1, \dots, n\}$ 使得 $x \in f^{-1}(U_i)$. 故得 $y = f(x) \in U_i$, 得證 $Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$. □

Question 3.17. 假設 X, Y 為 topological spaces 且 $f : X \to Y$ 是 onto 的 continuous function. 若 Y 是 compact 是否可得 X 是 compact.

由 Proposition 3.2.5 我們可得 compactness 是很好的拓樸性質.

Corollary 3.2.6. 假設 X, Y 為 *homeomorphic topological space,* 則 X 是 *compact* 若且唯若 Y 是 *compact.*

Proof. 因 X, Y 是 homeomorphic, 故存在 homeomorphism $f : X \to Y$, 以及其反函數 $f^{-1} : Y \to X$ 皆為 continuous 且為 onto. 因此由 Proposition 3.2.5 知 X 是 compact 和 Y 是 compact 是等價的. □

接下來我們探討 compactness 與 disjoint union topology, product space topology 以及 quotient space topology 的關係. 首先我們考慮 disjoint union. 假設 X, Y 都是 compact topological space, 是否 $X \amalg Y$ 使用 disjoint union topology 會是 compact 呢? 答案是肯定的.

Proposition 3.2.7. 假設 X, Y 為 *topological space.* 考慮 *disjoint union space* $X \amalg Y$, 則 $X \amalg Y$ 是 *compact* 若且唯若 X, Y 皆為 *compact.*

Proof. 假設 $X \amalg Y$ 是 compact. 現任取 $\mathcal{S}$ 是 X 的 open cover. 由於對任意 $S \in \mathcal{S}$, 令 $S' = \{(s, 1) \mid s \in S\}$. 此時 S' 以及 $Y' = \{(y, 2) \mid y \in Y\}$ 皆為 $X \amalg Y$ 的 open sets, 我們得 $\{S' \mid S \in \mathcal{S}\} \cup \{Y'\}$ 是 $X \amalg Y$ 的 open cover (即 $X \amalg Y = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S' \cup Y'$). 又由 $X \amalg Y$ 是 compact, 我們知存在由 $\{S' \mid S \in \mathcal{S}\} \cup \{Y'\}$ 所得的 finite subcover $\{S'_1, \dots, S'_n, Y'\}$, 其中 $S_i \in \mathcal{S}$. 也就是說 $X \amalg Y = \bigcup_{i=1}^n S'_i \cup Y'$. 因此得 $X = \bigcup_{i=1}^n S_i$, 亦即存在 $\mathcal{S}$ 所得 X 的 finite subcover, 得證 X 是 compact. 同理可得 Y 亦為 compact.

反之, 假設 X, Y 皆為 compact topological space. 考慮 injective function $\phi_1 : X \to X \amalg Y$, 定義為 $\phi_1(x) = (x, 1)$, $\forall x \in X$. 此時依 disjoint union topology 的定義, 任意 $X \amalg Y$ 的 open set S 皆可表為 $S = U \amalg V$, 其中 U, V 分別為 X, Y 的 open set. 因此由 $\phi_1^{-1}(S) = U$, 得 ϕ_1 是 continuous function. 現考慮任意 $X \amalg Y$ 的 open cover $\mathcal{S}$, 由於 $X \amalg Y = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$, 我們有

$$X = \phi_1^{-1}(X \amalg Y) = \phi_1^{-1}(\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S) = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \phi_1^{-1}(S).$$

也就是說 $\{\phi_1^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$ 會是 X 的 open cover. 因此依 X 為 compact 的假設知, 存在 $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ 使得 $\phi_1^{-1}(S_1), \ldots, \phi_1^{-1}(S_n)$ 為由 $\{\phi_1^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$ 所得 X 的 finite subcover, 亦即

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_1^{-1}(S_i) = \phi_1^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} S_i).$$

同理, 令 $\phi_2 : Y \to X \amalg Y$, 定義為 $\phi_2(y) = (y, 2)$, $\forall y \in Y$. 我們知 $\{\phi_2^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$ 會是 Y 的 open cover. 因此依 Y 為 compact 的假設, 我們也可找到 $S'_1, \ldots, S'_m \in \mathcal{S}$ 使得 $\phi_2^{-1}(S'_1), \ldots, \phi_1^{-1}(S'_m)$ 為由 $\{\phi_2^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$ 所得 Y 的 finite subcover, 亦即

$$Y = \bigcup_{j=1}^{m} \phi_2^{-1}(S'_j) = \phi_2^{-1}(\bigcup_{j=1}^{m} S'_j).$$

所以此時考慮 $S_1, \ldots, S_n, S'_1, \ldots, S'_m \subseteq \mathcal{S}$, 由於

$$\phi_1^{-1}((\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} S'_j)) = X, \quad \phi_2^{-1}((\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} S'_j)) = Y,$$

我們得 $(\bigcup_{i=1}^{n} S_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} S'_j) = X \amalg Y$. 換言之, $S_1, \ldots, S_n, S'_1, \ldots, S'_m$ 是由 $\mathcal{S}$ 所得 $X \amalg Y$ 的 finite subcover. 得證 $X \amalg Y$ 是 compact. □

我們可以用數學歸納法將 Proposition 3.2.7 推廣到有限多個 topological spaces 的 disjoint union space 的情況. 不過這在無窮多個的情況就不對了. 事實上, 無窮多個非空的 topological spaces 所成的 disjoint union space 決不會是 compact.

Question 3.18. 假設 I 為一個無窮的 index set, 且對任意 $i \in I$, X_i 是非空的 topological space. 試說明 disjoint union space $\amalg_{i \in I} X_i$ 不是 compact topological space. (Hint: 對 $i \in I$, $X'_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ 是 $\amalg_{i \in I} X_i$ 的 open set. 考慮 $\{X'_i\}_{i \in I}$ 這一個 $\amalg_{i \in I} X_i$ 的 open cover.)

接下來我們要談 product space 的情形. Product space 較麻煩之處在於它的 topology 僅知其 basis 為何, 無法具體描述其 open sets. 而 compact 的性質是考慮 open cover, 也就是一般的 open sets 的覆蓋情形, 所以處理起來有些棘手. 下一個性質就可以克服這個困難, 它告訴我們不必考慮所有的 open cover, 只要固定一組 basis 考慮所有由這組 basis 所形成的 open cover 即可.

Lemma 3.2.8. 假設 X 是 *topological space,* 且 $\mathcal{B}$ 是 X 的一組 *basis.* 若對任意 X 的 *open cover* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ 皆可得到由 $\mathcal{U}$ 所得的 *finite subcover,* 則 X 是 *compact.*

Proof. 我們的策略是對任意 X 的 open cover $\mathcal{S}$ 要將其對應到一組由 $\mathcal{B}$ 的元素所組成的 open cover $\mathcal{U}$, 然後利用由 $\mathcal{U}$ 所得的 finite subcover, 得到由 $\mathcal{S}$ 所得的 finite subcover. 因而得證 X 是 compact.

對任意 X 的 open cover $\mathcal{S}$ 中的元素 $S \in \mathcal{S}$, 由於 S 是 open, 故依 basis 的定義知存在 $\mathcal{U}_S \subseteq \mathcal{B}$ 滿足 $S = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_S} U$. 由於 $\mathcal{S}$ 是 X 的 open cover, 我們有

$$X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \Big(\bigcup_{U \in \mathcal{U}_S} U \Big)$$

因此若令 $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B} \mid U \in \mathcal{U}_S, S \in \mathcal{S}\}$, 則 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ 就是 X 的一個 open cover. 因此由假設知存在有限多個 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ 會是由 $\mathcal{U}$ 所得的 finite subcover, 亦即 $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$. 又對任意 $i = 1, \ldots, n$, $U_i \in \mathcal{U}$, 亦即存在 $S_i \in \mathcal{S}$ 滿足 $U_i \in \mathcal{U}_{S_i}$. 然而由當初 $\mathcal{U}_{S_i}$ 的定義, 我們有 $S_i = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{S_i}} U$, 故知 $U_i \subseteq S_i$. 因此得 $\bigcup_{i=1}^n U_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_i$, 得證 $X = \bigcup_{i=1}^n S_i$, 亦即 $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ 是由 $\mathcal{S}$ 所得的 finite subcover. □

和 connected 的情形相同, product space 依然能保持 compact 的性質. 也就是說, 若 X, Y 皆為 compact topological space, 則 product space $X \times Y$ 亦為 compact, 這就是所謂的 *Tychonov's Theorem.* 事實上這個定理反向也是對的, 我們將之寫成以下的定理.

Theorem 3.2.9. *假設 X, Y 是非空的 topological spaces, 考慮 produce space $X \times Y$. 則 $X \times Y$ 是 compact 若且唯若 X, Y 皆為 compact.*

Proof. 首先處理 $X \times Y$ 是 compact 的情形, 此時由於 projection $\pi_1 : X \times Y \to X$ 是 continuous 且為 onto, 由 Proposition 3.2.5 知 X 是 compact. 同理考慮 projection $\pi_2 : X \times Y \to Y$, 可得 Y 亦為 compact.

接下來我們證明 Tychonov's Theorem, 即若 X, Y 皆為 compact, 則 product space $X \times Y$ 亦為 compact. 由 product space topology 的定義, 若 $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ 分別為 X, Y 的 topology, 則 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$ 就是 $X \times Y$ 的一組 basis. 由 Lemma 3.2.8, 我們要證明任何由 $\mathcal{B}$ 的元素所組成 $X \times Y$ 的 open cover $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}$, 都可找到由 $\mathcal{W}$ 所得 $X \times Y$ 的 finite subcover. 回顧, 對於任意 $y_0 \in Y$, 我們有 continuous function $h_{y_0} : X \to X \times Y$, 定義為 $h_{y_0}(x) = (x, y_0)$. 現由 $\mathcal{W}$ 為 $X \times Y$ 的 open cover, 我們有

$$X = h_{y_0}^{-1}(X \times Y) = h_{y_0}^{-1}(\bigcup_{W \in \mathcal{W}} W) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} h_{y_0}^{-1}(W).$$

也就是說, 若令 $\mathcal{U} = \{h_{y_0}^{-1}(W) \mid W \in \mathcal{W}\}$, 則 $\mathcal{U}$ 會是 X 的 open cover. 因此由 X 是 compact 的假設, 我們可得 $h_{y_0}^{-1}(W_1), \ldots, h_{y_0}^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}$ 是由 $\mathcal{U}$ 所得 X 的 finite subcover. 由於每個 $W_i \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}$, 我們有 $W_i = U_i \times V_i$, 其中 U_i, V_i 分別為 X, Y 的 open set. 我們又可假設 $y_0 \in V_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, 否則 $h_{y_0}^{-1}(U_i \times V_i)$ 會是空集合, 可以捨去. 依此假設, 我們有 $h_{y_0}^{-1}(W_i) = h_{y_0}^{-1}(U_i \times V_i) = U_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, 因此得 $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$. 另外, 由於這裡得到的 W_i 皆與 y_0 有關, 我們令 $\mathcal{W}_{y_0} = \{W_1, \ldots, W_n\} \subseteq \mathcal{W}$. 注意 V_i 皆為 y_0 的 open neighborhood, 因此我們令 $V_{y_0} = \bigcap_{i=1}^n V_i$. 此時 V_{y_0} 仍為 y_0 的 open neighborhood 且滿足

$$X \times V_{y_0} \subseteq (\bigcup_{i=1}^n U_i) \times V_{y_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_i \times V_{y_0}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_i \times V_i) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_{y_0}} W.$$

現對任意 $y = Y$, 我們皆仿照前面 y_0 的情況得到一個 y 的 open neighborhood V_y 以及一組有限集合 $\mathcal{W}_y = \{W_i \in \mathcal{W} \mid i \in I_y\}$, 其中 I_y 是一個有限集合, 滿足

$$X \times V_y \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}_y} W. \tag{3.1}$$

由於對任意 $y \in Y$, 皆有 V_y 為 y 的一個 open neighborhood, 知 $\mathcal{V} = \{V_y\}_{y\in Y}$ 是 Y 的一個 open cover. 故由 Y 是 compact 的假設知存在有限多個 $y_1, \ldots, y_m \in Y$, 滿足 $Y = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. 最後, 我們要證明 $\mathcal{W}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathcal{W}_{y_m} \subseteq \mathcal{W}$ 就是由 $\mathcal{W}$ 所得 $X \times Y$ 的 finite subcover.

對任意 $(a, b) \in X \times Y$. 由於 $Y = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$, 我們得 $b \in V_{y_r}$, 其中 $1 \le r \le m$. 又 $\mathcal{W}_{y_r}$ 滿足式子 (3.1), 故由 $(a, b) \in X \times V_{y_r}$ 得證 $(a, b) \in \bigcup_{W \in \mathcal{W}_{y_r}} W$. □

我們可以用數學歸納法將 Theorem 3.2.9 推廣到有限多個 topological spaces 的 product space 的情況. 事實上它也可以推廣到無窮多個 topological spaces 的 product space 的情況, 不過它的證明牽涉到 *axiom of choice*, 這裡就不多談了.

對於 compact 與 quotient space 的關係, 我們有以下的結果.

Proposition 3.2.10. 假設 X 是 *topological spaces* 且 $\sim$ 是 X 上的一個 *equivalence relation.* 若 X 是 *compact,* 則 *quotient space* $X/\sim$ 亦為 *compact.*

Proof. 由 quotient space topology 的定義知 quotient map $q : X \to X/\sim$ 是 onto 的 continuous function. 因此由 X 是 compact 以及 Proposition 3.2.5 知 $X/\sim$ 亦為 compact. □

Question 3.19. 假設 X 是 topological spaces 且 $\sim$ 是 X 上的一個 equivalence relation. 若 quotient space $X/\sim$ 是 compact, 是否可推得 X 亦為 compact?

3.2.2. Compact Subsets. 和 connected subset 的概念相同, 對於一個 topological space 上的 subset 我們仍利用 subspace topology 將之視為一個 topological space, 再來探討其是否為 compact.

Definition 3.2.11. 假設 X 是 topological spaces 且 S 為其 subset. 若在考慮 subspace topology 將 S 視為 topological space 之下, S 是 compact space, 則稱 S 是 X 的 *compact subset*; 否則稱之為 *non-compact subset.*

利用 subspace 與連續函數的關係以及 Proposition 3.2.5, 我們馬上有以下的結果.

Proposition 3.2.12. 假設 X, Y 為 *topological spaces* 且 $f : X \to Y$ 為 *continuous function.* 若 $S \subseteq X$ 是 X 的 *compact subset,* 則 $f(S)$ 是 Y 的 *compact subset.*

用連續函數來討論一個集合是否為 compact 並不是萬能的, 例如當我們要探討兩個 compact subsets 的聯集是否為 compact 時, 就不容易用連續函數的方法處理. 所以在探討一些 compact subset 的性質時, 我們仍要回歸原始 compact 的定義. 從 Definition 3.2.11, 我們知若 $S \subseteq X$ 是 compact, 表示對所有 S 的 open cover $\mathcal{U}$, 皆存在 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ 滿足 $S = \bigcup_{i=1}^n U_i$. 這裡由於使用 subspace topology, 若 $\mathcal{T}$ 為 X 的 topology, 則對任意 $U \in \mathcal{U}$, 皆存在 $U' \in \mathcal{T}$ 滿足 $U = U' \cap S$. 也因此若令 $\mathcal{U}' = \{U' \in \mathcal{T} \mid U' \cap S \in \mathcal{U}\}$, 則 $\mathcal{U}$ 是 S 的 open cover, 即 $S = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, 也可表成

$$S = \bigcup_{U' \in \mathcal{U}'} (U' \cap S) = \Big(\bigcup_{U' \in \mathcal{U}'} U'\Big) \cap S,$$

亦即 $S \subseteq \bigcup_{U' \in \mathcal{U}'} U'$. 同理, 若令 U'_i 為 X 的 open set 滿足 $U_i = U'_i \cap S$, 則 $S = \bigcup_{i=1}^n U_i$ 就等同於 $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n U'_i$. 換句話說, $\mathcal{U}$ 是 S 的一個 open cover, 就等同於存在著 X 上的 open set 所成的集合 $\mathcal{U}'$ 滿足 $S \subseteq \bigcup_{U' \in \mathcal{U}'} U'$. 同樣的存在由 $\mathcal{U}$ 所得 S 的 finite subcover, 就等同於存在 $U'_1, \ldots, U'_n \in \mathcal{U}'$ 使得 $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n U'_i$. 因此, 為了方便起見, 我們將 open cover 的概念推廣到一般拓樸空間的子集合上.

Definition 3.2.13. 假設 X 是 topological space, 且 $\mathcal{T}$ 為其 topology, 又假設 S 為 X 的 subset. 若 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ (即 $\mathcal{U}$ 是由 open sets 所形成的集合). 滿足 $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, 則稱 $\mathcal{U}$ 是 S 的一個 *open cover*. 又若 $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{U}'$ 仍為 S 的 open cover (即 $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$), 則稱 $\mathcal{U}'$ 為由 $\mathcal{U}$ 所得 S 的 *subcover*. 特別的, 當 $\mathcal{U}'$ 只有有限多個元素時, 我們又稱 $\mathcal{U}'$ 為由 $\mathcal{U}$ 所得 S 的 *finite subcover*.

再強調一次, 這裡 $\mathcal{U}$ 是 S 的 open cover 指的是 $S \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$, 而不是 $S = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$ (否則 S 只能是 X 的 open set). 依此定義我們馬上有以下 compact subset 的等價條件.

Proposition 3.2.14. 假設 X 是 *topological space,* 且假設 S 為 X 的 *subset.* 則 S 是 X 的 *compact subset* 若且唯若任意由 X 的 *open sets* 組成 S 的 *open cover* $\mathcal{U}$ 皆存在著由 $\mathcal{U}$ 所得 S 的 *finite subcover.*

Question 3.20. 在 topological space X 中空集合 $\emptyset$ 是否為 compact subset?

利用 Proposition 3.2.14 我們便可以處理兩個 compact subset 的聯集是否為 compact 的問題. 假設 S_1, S_2 皆為 topological space X 的 compact subset. 現考慮 $S_1 \cup S_2$ 的任意 open cover $\mathcal{U}$. 由於 $\mathcal{U}$ 亦為 S_1 的 open cover, 故依 S_1 是 compact 的假設知, 存在 $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ 是由 $\mathcal{U}$ 所得 S_1 的 finite subcover. 同理可得 $U'_1, \ldots, U'_m \in \mathcal{U}$ 是由 $\mathcal{U}$ 所得 S_2 的 finite subcover. 故由 $S_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$ 以及 $S_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^m U'_j$, 得

$$S_1 \cup S_2 \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup U'_1 \cup \cdots \cup U'_m,$$

亦即 $U_1, \ldots, U_n, U'_1, \ldots, U'_m \in \mathcal{U}$ 是由 $\mathcal{U}$ 所得 $S_1 \cup S_2$ 的 finite subcover. 我們證明了以下的定理.

Proposition 3.2.15. 假設 X 為 *topological space* 且 S_1, S_2 為 X 的 *compact subsets.* 則 $S_1 \cup S_2$ 是 X 的 *compact subset.*

Question 3.21. 假設 X 為 topological space 且對於任意 $i \in \mathbb{N}$, S_i 為 X 的 compact subset. 試證明對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^n S_i$ 是 X 的 compact subset. 是否 $\bigcup_{i=1}^\infty S_i$ 是 X 的 compact subset 呢?

兩個 compact subsets 的交集是否為 compact 的呢? 一般來說是否定的. 不過因為在一般大家習慣的 metric space 中這會是對的 (底下會介紹), 所以要找到否定的例子不容易. 在此我們特別介紹一個例子.

Example 3.2.16. 考慮整數 $\mathbb{Z}$ 再加上兩點 x_∞^+, x_∞^- 所成的集合 X. 我們在 X 上定義拓樸 $\mathcal{T}$ 如下:

$$\mathcal{T} = \{S \mid S \subseteq \mathbb{Z}\} \cup \{\{x_\infty^+\} \cup \mathbb{Z}\} \cup \{\{x_\infty^-\} \cup \mathbb{Z}\} \cup \{\{x_\infty^+, x_\infty^-\} \cup \mathbb{Z}\}.$$

很容易驗證 $\mathcal{T}$ 是 X 的 topology. 考慮 $S^+ = \{x_\infty^+\} \cup \mathbb{Z}$ 以及 $S^- = \{x_\infty^-\} \cup \mathbb{Z}$. 由於 X 中包含 x_∞^+ 的 open set 僅有 S^+ 以及 X, 所以任何 S^+ 的 open cover $\mathcal{U}$ 必包含 S^+ 或 X, 因此在 $\mathcal{U}$ 中只要選出 S^+ 或 X 其中一個就會是由 $\mathcal{U}$ 所得 S^+ 的 finite subcover, 得證 S^+ 是 X 的 compact subset. 同理 S^- 也會是 X 的 compact subset. 不過我們有 $S^+ \cap S^- = \mathbb{Z}$, 然而對所有 $z \in \mathbb{Z}$, $\{z\}$ 是 X 的 open set. 因此 $\mathcal{V} = \{\{z\} \in \mathcal{T} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一個 open cover, 但是在 $\mathcal{V}$ 中不可能找到 $\mathbb{Z}$ 的 finite subcover (因 $\mathbb{Z}$ 有無限多個元素). 因此 $\mathbb{Z}$ 不是 X 的 compact subset. 依此知兩個 compact subsets 的交集未必是 compact.

我們曾經提及, 一般來說不容易判定一個集合是否為 compact, 不過有些特殊狀況之下, 是容易判別的. 首先我們看以下的情況.

Proposition 3.2.17. 假設 X 是 *compact topological space* 且 S 是 X 的 *closed subset,* 則 S 是 X 的 *compact subset.*

Proof. 任取 S 的一個 open cover $\mathcal{U}$, 即 $\mathcal{U}$ 是由 X 的一些 open sets 所組成且滿足 $S \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. 現因 S 是 closed, 故 S^c 是 X 的 open set. 此時

$$X = S \cup S^c \subseteq \Big(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\Big) \cup S^c,$$

也就是說 $\mathcal{U}\cup\{S^c\}$ 是 X 的一個 open cover, 故由 X 為 compact 之假設, 知存在 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ 滿足 $X \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup S^c$ (可能不需 S^c 不過多一個仍為有限, 並無妨礙). 此時 $S \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$, 故知 $\{U_1, \dots, U_n\}$ 是由 $\mathcal{U}$ 所得 S 的 finite subcover, 得證 S 是 compact. □

即使 X 不是 compact, 我們仍可套用 Proposition 3.2.17 到 X 的 compact subset 上因為 X 的 compact subset 若利用 subspace topology 就是一個 compact topological space.

Corollary 3.2.18. 假設 X 是 *topological space,* S 為 X 的 *compact subset.* 若 C 是 X 的 *closed subset* 則 $C \cap S$ 是 X 的 *compact subset.*

Proof. 考慮 S 為 X 的 subspace, 依 compact subset 的定義 S 是一個 compact topological space. 又依 subspace topology 的定義 $C \cap S$ 會是 S 的 closed subset, 因此由 Proposition 3.2.17 知, $C \cap S$ 會是 S 的 compact subset. 換句話說若 $C \cap S$ 使用 S 的 subspace topology, $C \cap S$ 會是 compact topological space. 但是 $C \cap S \subseteq S \subseteq X$, 將 $C \cap S$ 視為 X 的 subspace 或是 S 的 subspace, 其 topology 皆相同. 也因此知 $C \cap S$ 是 X 的 compact subset. □

Question 3.22. 試直接利用 open cover 皆存在著 finite subcover 的論述證明 Corollary 3.2.18

Compact topological space 有許多的好處, 當一個 topological space 不是 compact 時, 我們會退而求其次, 探討其是否為 *locally compact.* Locally compact topological space 在數

學分析領域中是常遇到且重要的 topological space, 例如 $\mathbb{R}$ 在 standard topology 之下不是 compact 但是是 locally compact. 它有許多分析上重要的性質, 因與本課程無關, 在此我們僅介紹其定義. 大家不妨比較一下它和 locally connected 的定義 (Definition 3.1.18)

Definition 3.2.19. 假設 X 為 topological space. 若對任意 $a \in X$ 及其任意的 open neighborhood U 皆存在 a 的 open neighborhood V 以及 compact subset C 滿足 $V \subseteq C \subseteq U$. 則稱 X 為 *locally compact space.*

3.2.3. Heine–Borel Theorem. 在 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology 之下有一個判斷一個集合是否為 compact 方法, 即 Heine–Borel Theorem. 由於 $\mathbb{R}^n$ 是大家最常接觸的拓樸空間, 這裡我們特別介紹它.

回顧在 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology, 我們是將它看成 metric space. 這裡我們用的 metric 是 $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$, 其中 $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$. 又對任意 $a \in \mathbb{R}^n$, $r>0$, 我們定義 $B(a;r)=\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a)<r\}$. 利用這樣的所有可能的 $a \in \mathbb{R}^n$, $r>0$ 所得的 $B(a;r)$ 為 basis 所形成的 topology 便是 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology, 一般我們稱這種特定的拓樸空間為 *Euclidean Space.* Heine–Borel Theorem 是說 Euclidean space $\mathbb{R}^n$ 上的一個子集合 S 是 compact 若且唯若 S 是 closed 且 *bounded.* 這個等價條件的一個方向不需 Euclidean Space, 只要是一般的 metric space 就會成立, 所以我們從一般的 metric space 開始談起. 首先我們需定義何謂 *bounded* (有界).

Definition 3.2.20. 假設 X 為以 metric d 所得的 metric space 且假設 S 為 X 的 subset. 若存在 $a \in X$ 以及 $r>0$ 使得 $S \subseteq B(a;r)=\{x \in X \mid d(x,a)<r\}$, 則稱 S 為 *bounded.*

大家要注意 bounded 的概念只有在 metric space 才有, 在一般的 topological space 是沒有的. 由此定義, 在 $\mathbb{R}$ 的情況, 我們知道 $S \subseteq \mathbb{R}$ 是 bounded 就等同於 S 有上界 (upper bound) 也有下界 (lower bound). 另外 $S \subseteq B(a;r)$ 的 a,r 並非固定, 例如若取 $r'>r$, 則 $S \subseteq B(a;r')$ 依然成立. 另外我們也可任取 $b \in X$, 此時令 $r'=r+d(a,b)>0$, 亦可得 $S \subseteq B(b;r')$, 這是因為若 $x \in B(a;r)$, 表示 $d(x,a)<r$, 故得 $d(x,b) \leq d(x,a)+d(a,b)<r'$, 亦即 $B(a;r) \subseteq B(b;r')$. 接下來, 我們探討 compact 和 bounded 的關係.

Proposition 3.2.21. 假設 X 為 *metric space* 且 S 為 X 的 *compact subset,* 則 S 是 X 的 *bounded subset.*

Proof. 任取一固定 $r>0$, 考慮 $\mathcal{U}=\{B(s;r) \mid s \in S\}$, 因為這些 $B(s;r)$ 是 X 的 open set, 且 $S \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{U}} B$, 故 $\mathcal{U}$ 是 S 的 open cover. 因此由 S 是 compact 的假設知, 存在 $s_1,\dots,s_n \in S$ 使得 $S \subseteq B(s_1;r) \cup \cdots \cup B(s_n,r)$. 令 $r'=r+\max\{d(s_1,s_2),\dots,d(s_1,s_n)\}>0$, 則 $B(s_i;r) \subseteq B(s_1;r')$, $\forall\, i=1,\dots,n$. 得證 $S \subseteq B(s_1;r')$, 即 S 是 bounded. □

接下來, 我們探討 compact 和 closed 的關係.

Proposition 3.2.22. 假設 X 為 *metric space* 且 S 為 X 的 *compact subset,* 則 S 是 X 的 *closed subset.*

Proof. 我們證明 S^c 是 X 的 open subset. 任取 $x \in S^c$, 對於 $s \in S$, 令 $r_s = d(x,s)/2$. 由於 $s \neq x$, 我們有 $r_s > 0$. 考慮 $\mathcal{U} = \{B(s,r_s) \mid s \in S\}$, 因為這些 $B(s;r_s)$ 是 X 的 open set, 且 $S \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{U}} B$, 故 $\mathcal{U}$ 是 S 的 open cover. 因此由 S 是 compact 知存在 $s_1,\dots,s_n \in S$ 使得 $S \subseteq B(s_1;r_{s_1}) \cup \dots \cup B(s_n,r_{s_n})$. 注意對任意 $i = 1,\dots,n$, $B(s_i,r_{s_i}) \cap B(x,r_{s_i}) = \emptyset$, 故若令 $U = B(x;r_{s_1}) \cap \dots \cap B(x;r_{s_n})$, 則 $U = B(x;r)$ 其中 $r = \min\{r_{s_1},\dots,r_{s_n}\} > 0$ 且滿足

$$U \cap (B(s_1;r_{s_1}) \cup \dots \cup B(s_n,r_{s_n})) = \emptyset.$$

因此得 $U \cap S = \emptyset$, 亦即 U 是 $x \in S^c$ 的 open neighborhood 且滿足 $U \subseteq S^c$. 得證 S^c 是 X 的 open subset, 亦即 S 是 X 的 closed subset. □

結合 Proposition 3.2.21 以及 Proposition 3.2.22, 我們知道在 metric space 中的 compact subset 是 closed 且 bounded. 我們將 Proposition 3.2.21 以及 Proposition 3.2.22 分開來討論的原因是 Proposition 3.2.21 一定要在 metric space 才會成立 (因為 bounded 的定義); 而 Proposition 3.2.22 並不需要用到 metric space 這麼強的假設. 事實上從它的證明我們可以看出只要拓樸空間中的相異兩點都可以找到不相交的 open neighborhood, 就可以得證 compact subset 一定是 closed. 這樣的性質, 就是所謂 *Hausdorff* 的性質, 以後我們會詳談.

在 $\mathbb{R}$ 中 closed 且 bounded 的集合, 有一個特性, 就是會有極大值與極小值. 我們要證明這個性質, 並推得連續函數的極值定理 (Extreme Value Theorem).

Lemma 3.2.23. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 *standard topology.* 假設 S 是 $\mathbb{R}$ 的 *compact subset,* 則存在 $a,b \in S$ 滿足 $a \leq s \leq b, \forall s \in S$.

Proof. 我們依然要用到實數 least upper bound 以及 greatest lower bound 的性質. 現因 S 是 compact, 我們知 S 是 closed 且 bound, 因此 S 有上界及下界. 令 $a,b \in \mathbb{R}$ 分別為 S 的 greatest lower bound 和 least upper bound. 因此得 $a \leq s \leq b$. 接著我們要利用 S 是 closed 證得 $a,b \in S$. 由於 a 是 S 的 greatest lower bound, 因此對任意 $\varepsilon > 0$, $a+\varepsilon$ 不是 S 的 lower bound, 亦即存在 $s \in S$ 滿足 $a \leq s \leq a+\varepsilon$, 也就是說 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$. 對任意 a 的 open neighborhood U, 由於必可找到 $\varepsilon > 0$ 滿足 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$ 故知 $U \cap S \neq \emptyset$. 換句話說, 我們有 $a \in \mathrm{cl}(S)$. 但因 S 是 closed, 我們有 $S = \mathrm{cl}(S)$, 故得證 $a \in S$. 同理可證 $b \in S$. □

對於函數 $f : X \to \mathbb{R}$ 若我們可找到 $a \in X$ 滿足 $f(a) \leq f(x), \forall x \in X$, 則稱 f 有極小值 (發生在 a). 同樣的若可找到 $b \in X$ 滿足 $f(x) \leq f(b), \forall x \in X$, 則稱 f 有極大值 (發生在 b). 一個函數的極大值, 極小值便稱為其 *extreme value.* 連續函數的 Extreme Value Theorem 說的是一個映射到實數的連續函數, 若限制在定義域的 compact subset 之下, 極值必定存在.

Theorem 3.2.24 (Extreme Value Theorem)**.** 假設 X 為 *topological space* 且考慮 $\mathbb{R}$ 的 *standard topology.* 若 $f : X \to \mathbb{R}$ 是 *continuous,* 且 S 是 X 的 *compact subset,* 則存在 $a,b \in S$ 滿足 $f(a) \leq f(s) \leq f(b), \forall s \in S$.

Proof. 依 S 為 compact 的假設, Proposition 3.2.12 告訴我們 $f(S)$ 會是 $\mathbb{R}$ 的 compact subset. 因此由 Lemma 3.2.23 知存在 $r,t \in f(S)$ 滿足 $r \leq f(s) \leq t, \forall s \in S$. 因 $r,t \in f(S)$, 故存在 $a,b \in S$ 滿足 $f(a) = r$, $f(b) = t$. 得證本定理. □

要注意 Proposition 3.2.21 以及 Proposition 3.2.22 的反向並不正確, 也就是在一般的 metric space 中一個 closed and bounded subset 未必會是 compact (底下我們會給一個例子). 這只有在 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology 之下才肯定會成立. 首先我們看在 $\mathbb{R}$ 的情況.

Lemma 3.2.25. 考慮 $\mathbb{R}$ 的 *standard topology.* 若 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$, 則閉區間 $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的 *compact subset.*

Proof. 這裡, 我們要用到 $\mathbb{R}$ *complete* 的性質 (完備性). 也就是說一個由實數所組成的 Cauchy sequence $\{a_n\}_n$ (即滿足對任意 $\epsilon > 0$, 皆存在 $N \in \mathbb{N}$ 滿足 $|a_n - a_m| < \epsilon$, $\forall\, n, m > N$), 皆存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

現假設 $[a, b]$ 不是 compact. 也就是說存在一個 $[a, b]$ 的 open cover $\mathcal{U}$ 找不到由 $\mathcal{U}$ 所得 $[a, b]$ 的 subcover. 現將區間 $[a, b]$ 分成 $[a, (b-a)/2]$ 以及 $[(b-a)/2, b]$ 兩段. 這兩段中一定有一段無法用 $\mathcal{U}$ 中有限多個子集合將之覆蓋, 令之為 $I_1 = [a_1, b_1]$. 接下來將 I_1 分成兩段, 即 $[a_1, (b_1 - a_1)/2]$ 以及 $[(b_1 - a_1)/2, b_1]$. 同樣的這兩段中一定有一段無法用 $\mathcal{U}$ 中有限多個子集合將之覆蓋, 令之為 $I_2 = [a_2, b_2]$. 如此一直下去我們得 $I_n = [a_n, b_n]$ 無法用 $\mathcal{U}$ 中有限多個子集合將之覆蓋, 其中 $b_n - a_n = (b-a)/2^n$. 很容易得到 $\{a_n\}_n$ 是一個 Cauchy sequence. 令 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$, 我們有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\lambda\}$.

現由於 $\lambda \in [a, b]$ 且 $\mathcal{U}$ 是 $[a, b]$ 的 open cover, 故存在 $U \in \mathcal{U}$ 是 λ 的 open neighborhood. 又所有 $\mathbb{R}$ 的 open interval 是 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 的一組 basis, 故存在 $\epsilon > 0$, 使得 $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \subseteq U$. 現取 $n \in \mathbb{N}$ 滿足 $(b-a)/2^n < \epsilon$, 此時我們得 $I_n \subseteq (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \subseteq U$. 也就是說 I_n 可以被 $\mathcal{U}$ 中 U 這一個 open set 所覆蓋. 這與當初 I_n 選取時無法用 $\mathcal{U}$ 中有限多個子集合將之覆蓋的條件相矛盾, 故得證 $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的 compact subset. □

接下來, 我們便是要仰賴 Lemma 3.2.25 來幫我們證明 Heine–Borel Theorem. 由於 Lemma 3.2.25 的證明用到了實數的完備性, 這也是 Heine–Borel Theorem 在一般 metric space 不一定成立的原因.

Theorem 3.2.26 (Heine–Borel Theorem)**.** 考慮 *Euclidean space* $\mathbb{R}^n$. 若 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 *closed and bounded,* 則 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的 *compact subset.*

Proof. 首先我們討論 $\mathbb{R}$ 的情形, 讓大家比較了解整個證明的想法. 若 $S \subseteq \mathbb{R}$ 是 bounded 表示 S 存在著上界 b 與下界 a, 因此知 $S \subseteq [a, b]$. 又由 Lemma 3.2.25 知 $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 的 compact subset, 故由 S 為 closed 以及 Corollary 3.2.18 知 $S \cap [a, b] = S$ 是 $\mathbb{R}$ 的 compact subset.

現對一般 $\mathbb{R}^n$ 的情況, 由 S 是 bounded 知存在 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 以及 $r > 0$ 使得 $S \subseteq B(a; r)$. 現對所有 $i = 1, \dots, n$, 令 $I_i = [a_i - r, a_i + r]$. 此時對任意 $(x_1, \dots, x_n) \in B(a; r)$, 我們有 $|a_i - x_i|^2 \le \sum_{j=1}^{n} (a_j - x_j)^2 < r^2$, 即 $x_i \in I_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$. 也就是說 $B(a; r) \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$. 因此知 $S \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$. 接下來, 我們將說明 $I_1 \times \cdots \times I_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 compact subset, 因此由 S 是 closed 的假設, 套用 Corollary 3.2.18 就證得了 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的 compact subset.

要證明 $I_1\times\cdots\times I_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 compact subset, 很直覺的我們想用 Theorem 3.2.9 (Tychonov's Theorem). 不過這裡有兩點要說明. 第一: 我們是將 I_i 視為 $\mathbb{R}$ 的 subspace (即用 subspace topology) 得到 I_i 為 compact space, 再利用 Theorem 3.2.9 得到 $I_1\times\cdots\times I_n$ 這個 product space 是 compact topological space. 現在問題是 $I_1\times\cdots\times I_n$ 這個 product space 是否是 $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ 這個 product space 的 subspace? 事實上每個 I_i 上的 open set, 都是 $I_i\cap U_i$, 其中 U_i 是 $\mathbb{R}$ 的 open set 這樣的形式. 也因此 $I_1\times\cdots\times I_n$ 這個 product space 的 open set 都是 $(I_1\cap U_1)\times\cdots\times(I_n\cap U_n)$ 這樣的形式. 至於 $I_1\times\cdots\times I_n$ 在 $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ 這個 product space 的 subspace topology 應是 $(I_1\times\cdots\times I_n)\cap(V_1\times\cdots\times V_n)$ 這樣的形式, 其中每個 V_i 是 $\mathbb{R}$ 的 open set. 不過由 Cartesian product 的性質, 我們知道

$$(I_1\times\cdots\times I_n)\cap(V_1\times\cdots\times V_n)=(I_1\cap V_1)\times\cdots\times(I_n\cap V_n),$$

因此得 $I_1\times\cdots\times I_n$ 使用 product space topology 或是看成 $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ 的 subspace topology 是一致的.

我們知道了 $I_1\times\cdots\times I_n$ 是 product space $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ 的 compact subset. 不過我們真正要知道的是 $I_1\times\cdots\times I_n$ 是否為 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology (即看成 metric space) 之下的 compact subset? 所以我們要說明的第二點便是: $\mathbb{R}^n$ 看成 product space $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ 和看成 metric space 是否有相同的拓樸. 這個問題我們曾經在 Example 1.5.2 探討過 $n=2$, 即 $\mathbb{R}^2$ 的情形是對的. 至於一般的 $n\in\mathbb{N}$ 也是同樣的情形. $\mathbb{R}^n$ 使用 metric space topology, 其 basis 為 $B(a;r)$, 其中 $a\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, 而 product space topology 其 basis 為 $U_1\times\cdots\times U_n$, 其中每個 U_i 都是 $\mathbb{R}$ 的 open interval. 事實上對任意 $(x_1,\ldots,x_n)\in B(a;r)$, 皆存在 $\epsilon>0$ 使得 $(x_1-\epsilon,x_1+\epsilon)\times\cdots\times(x_n-\epsilon,x_n+\epsilon)\subseteq B(a;r)$. 而對於任意 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in U_1\times\cdots\times U_n$, 亦存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x;\varepsilon)\subseteq U_1\times\cdots\times U_n$. 依此可得 $\mathbb{R}^n$ 看成 product space 和 metric space 有著相同的 topology, 故證明了 $I_1\times\cdots\times I_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的 standard topology 之下是 compact. □

我們曾提及 Theorem 3.2.26 在一般的 metric space 並不一定成立. 我們有以下的例子.

Example 3.2.27. 考慮 $\mathbb{Q}$ 為 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下的 subspace. 在此拓樸之下 $\mathbb{Q}$ 亦為 metric space. 亦即對任意 $x,y\in\mathbb{Q}$, 定義 $d(x,y)=|x-y|$, 則 d 是 $\mathbb{Q}$ 上的 metric 且對於 $a\in\mathbb{Q}$, $r>0$, $B(a;r)=\{x\in\mathbb{Q}\mid |x-a|<r\}$ 會是此 metric topology 的一組 basis. 考慮 $S=[0,3]\cap\mathbb{Q}$, 很容易知道 S 是 $\mathbb{Q}$ 的 closed 且 bounded subset, 我們要說明 S 並不是 $\mathbb{Q}$ 的 compact subset.

我們要利用 Proposition 3.2.4 來處理, 也就是在 S 中找一組具有 finite intersection property 的 closed sets $\mathcal{F}$, 滿足 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F=\emptyset$, 則可得 S 不是 compact. 對任意 $n\in\mathbb{N}$, 令 $I_n=[\sqrt{2}-(1/n),\sqrt{2}+(1/n)]$, 考慮 $\mathcal{F}=\{I_n\cap\mathbb{Q}\mid n\in\mathbb{N}\}$. 由於 $I_n\subseteq[0,3]$, 得 $I_n\cap\mathbb{Q}\subseteq[0,3]\cap\mathbb{Q}=S$, 也就是說 $\mathcal{F}$ 中的元素都是 S 的 closed subset. 對任意有限多個 $\mathcal{F}$ 中的 closed set $F_1,\ldots,F_k$, 由於對 $i\in\{1,\ldots,k\}$, 皆存在 $n_i\in\mathbb{N}$ 使得 $F_i=I_{n_i}\cap\mathbb{Q}$, 若令 $m=\max\{n_1,\ldots,n_k\}$, 則 $F_1\cap\cdots\cap F_k=I_m\cap\mathbb{Q}$. 由有理數的稠密性知 I_m 中必存在著有理數, 故知 $F_1\cap\cdots\cap F_k\neq\emptyset$,

也就是說 $\mathcal{F}$ 具有 finite intersection property. 不過
$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \bigcap_{n=1}^{\infty}(I_n \cap \mathbb{Q}) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[\sqrt{2}-\frac{1}{n}, \sqrt{2}+\frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q} = \{\sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset,$$
證明了 S 不是 compact.

Question 3.23. 考慮 $\mathbb{Z}$ 為 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下的 subspace. 在此拓樸之下 $\mathbb{Z}$ 中的 closed 且 bounded subset 是否為 compact? 又考慮 $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 為 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下的 subspace. 在此拓樸之下 $\mathbb{Q}^c$ 中的 closed 且 bounded subset 是否為 compact?

3.3. Hausdorff Space

一個 topological space 是 Hausdorff space 的意思是任相異兩點皆可用兩個 open sets 所隔開. 很多拓樸的性質直觀上是對的 (其實一般來說不一定對), 都是因為加上了 Hausdorff 的性質才會成立. 在這一節中, 我們特別探討它的特性.

Definition 3.3.1. 假設 X 是 topological space. 對任意 X 中相異兩點 a, b, 若分別存在 a, b 的 open neighborhood U, V 滿足 $U \cap V = \emptyset$, 則稱 X 為 *Hausdorff* (或稱 *separated*, T_2) space.

很容易看出, discrete space 一定是 Hausdorff, 而 indiscrete space 就不是 Hausdorff. 至於以 d 為 metric 的 metric space, 由於相異兩點 a, b 皆有距離, 即 $d(a,b) > 0$. 因此可以選 $r = d(a,b)/2 > 0$, 此時 $B(a;r), B(b;r)$ 分別為 a, b 的 open neighborhood 且滿足 $B(a;r) \cap B(b;r) = \emptyset$, 所以 metric space 一定是 Hausdorff space.

由 Hausdorff 的性質我們很容易推導出一個點所成的集合是 closed. 這是因為若 X 為 Hausdorff space, 考慮 $a \in X$ 以及 $S = X \setminus \{a\}$. 此時對任意 $b \in S$, 由於 $b \neq a$, 故由 Hausdorff 的假設知, 分別存在 a, b 的 open neighborhood U, V 滿足 $U \cap V = \emptyset$, 因此得到 $a \notin V$, 亦即 $V \subseteq S$. 我們證得了 S 中的任一點 b 皆存在其 open neighborhood V 滿足 $V \subseteq S$, 亦即 S 為 X 的 open set. 故知 $S^c = \{a\}$ 為 X 的 closed set. 不過這裡我們用到的性質比 Hausdorff 的性質更弱了點, 我們僅用到對任意 $a \in X$ 當 $b \neq a$ 時, 存在 b 的 open neighborhood U 滿足 $a \notin U$ 即可 (這樣的 space 稱為 T_1 space). 當然了 Hausdorff 的性質更強, 我們應該有更好的結果.

Proposition 3.3.2. 假設 X 是 *topological space* 且對任意 $a \in X$, 令 $\mathcal{U}_a$ 是 a 的所有 *open neighborhood* 所成的集合. 則 X 是 *Hausdorff* 若且唯若對任意 $a \in X$, $\bigcap_{U\in\mathcal{U}_a} \mathrm{cl}(U) = \{a\}$.

Proof. 首先假設 X 是 Hausdorff. 我們要說明若 $b \neq a$, 則 $b \notin \bigcap_{U\in\mathcal{U}_a} \mathrm{cl}(U)$. 事實上由 Hausdorff 的性質, 我們知分別存在 a, b 的 open neighborhood U, V 滿足 $U \cap V = \emptyset$. 然而此時 $U \in \mathcal{U}_a$, 且因 V 為 b 的 open neighborhood 滿足 $V \cap U = \emptyset$, 故知 $b \notin \mathrm{cl}(U)$, 因此得證 $b \notin \bigcap_{U\in\mathcal{U}_a} \mathrm{cl}(U)$. 最後因對任意 $U \in \mathcal{U}_a$, 我們有 $a \in U \subseteq \mathrm{cl}(U)$, 故知 $a \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}_a} \mathrm{cl}(U)$. 因此得證 $\bigcap_{U\in\mathcal{U}_a} \mathrm{cl}(U) = \{a\}$.

反之, 對任意 $a, b \in X$ 且 $a \neq b$, 由於 $b \notin \bigcap_{U\in\mathcal{U}_a} \mathrm{cl}(U) = \{a\}$, 存在 $U \in \mathcal{U}_a$ 使得 $b \notin \mathrm{cl}(U)$. 也就是說, 存在 b 的 open neighborhood V 滿足 $V \cap U = \emptyset$. 又因 U 為 a 的

open neighborhood, 得證 U, V 分別為 a, b 的 open neighborhood 滿足 $U \cap V = \emptyset$, 故知 X 為 Hausdorff. □

接下來, 我們要討論連續函數對 Hausdorff space 的影響. 假設 X, Y 為 topological space 且 $f : X \to Y$ 為 continuous function. 如果 X 是 Hausdorff, 我們無法利用連續函數的特性得知 Y 或是 $f(X)$ 是否為 Hausdorff. 然而若 Y 為 Hausdorff, 任取 X 上相異兩點 a, b, 假如 f 不是一對一, 有可能 $f(a) = f(b) \in Y$, 此時我們又無法利用 Y 為 Hausdorff 推導. 所以我們再假設 f 為一對一, 此時便可由 $f(a), f(b)$ 為 Y 上相異兩點以及 Y 為 Hausdorff 知存在 U, V 分別為 $f(a), f(b)$ 的 open neighborhood 滿足 $U \cap V = \emptyset$. 因此由 f 為 continuous 知 $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ 分別為 a, b 的 open neighborhood 滿足 $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. 得證 X 為 Hausdorff, 因此有以下的定理.

Proposition 3.3.3. 假設 X, Y 為 *topological spaces* 且 Y 為 *Hausdorff.* 若存在一個從 X 到 Y 的一對一的連續函數, 則 X 為 *Hausdorff.*

假設 X, Y 是 homeomorphic topological spaces, 表示存在著 $f : X \to Y$ 是一個一對一且映成的連續函數且其反函數 $f^{-1} : Y \to X$ 亦為一對一且映成的連續函數, 因此由 Proposition 3.3.3 得以下的定理, 也由此知 Hausdorff 是很好的拓樸性質.

Corollary 3.3.4. 假設 X, Y 是 *homeomorphic topological spaces,* 則 X 為 *Hausdorff* 若且唯若 Y 為 *Hausdorff.*

接下來我們探討 Hausdorff 的性質與 subspace topology, disjoint union topology, product space topology 以及 quotient space topology 的關係. 首先若 X 是 Hausdorff space 且 S 為 X 的 subspace, 由 subspace topology 的定義我們知道 identity function $\mathrm{id}_X : X \to X$ 限制在 S 上, 即 $\mathrm{id}_X|_S : S \to X$ 是連續的, 又由 id_X 是一對一, 故由 Proposition 3.3.3 得 S 為 Hausdorff. 也就是說一個 Hausdorff space 的 subspace 亦為 Hausdorff.

接著我們考慮 disjoint union. 假設 X, Y 都是 Hausdorff space, 是否 $X \amalg Y$ 使用 disjoint union topology 會是 Hausdorff space 呢? 答案是肯定的. 這是因為若 a', b' 為 $X \amalg Y$ 上相異兩點, 有可能 a', b' 分別來自於於 X, Y, 亦即不失一般性我們有 $a' = (a, 1)$, $b' = (b, 2)$ 其中 $a \in X$, $b \in Y$. 此時 $X' = \{(x, 1) \mid x \in X\}$, $Y' = \{(y, 2) \mid y \in Y\}$ 分別為 a', b' 的 open neighborhood 且滿足 $X' \cap Y' - \emptyset$. 另外若 a', b' 皆來自於 X, 即 $a' = (a, 1)$, $b' = (b, 1)$, 其中 $a, b \in X$. 此時由於 X 為 Hausdorff, 存在 U, V 分別為 a, b 的 open neighborhood 滿足 $U \cap V = \emptyset$, 故知 $U' = \{(r, 1) \mid r \in U\}$, $V' = \{(s, 1) \mid s \in V\}$ 分別為 a', b' 的 open neighborhood 滿足 $U' \cap V' = \emptyset$. 同理當 a', b' 皆來自於 Y, 我們也可利用 Y 為 Hausdorff 找到 a', b' 不相交的 open neighborhood, 因此得證以下的定理.

Proposition 3.3.5. 假設 X, Y 為 *Hausdorff topological spaces.* 則 $X \amalg Y$ 使用 *disjoint union topology* 亦為 *Hausdorff space.*

Proposition 3.3.5 的反向也是對的 (參見 Question 3.24), 也就是說 X, Y 為 Hausdorff spaces 若且唯若 $X \amalg Y$ 為 Hausdorff space.

Question 3.24. 假設 X, Y 為 topological spaces. 利用函數 $f_1 : X \to X \amalg Y$, 定義為 $f_1(x) = (x, 1)$, $\forall\, x \in X$, 說明若 $X \amalg Y$ 為 Hausdorff space 則 X 為 Hausdorff space.

至於 product space 和 disjoint union 有相同的情況. 回顧當 X, Y 為 topological spaces 時, 考慮 product space $X \times Y$. 固定 $y_0 \in Y$, 我們有連續函數 $h_{y_0} : X \to X \times Y$ 定義為 $h_{y_0}(x) = (x, y_0)$, $\forall\, x \in X$. 很容易驗證 h_{y_0} 為一對一函數, 因此若 $X \times Y$ 為 Hausdorff, 則由 Proposition 3.3.3 可知 X 為 Hausdorff. 同理 $X \times Y$ 為 Hausdorff 亦可推得 Y 為 Hausdorff. 這個結果的逆向也是成立的, 因此我們有以下的定理.

Proposition 3.3.6. 假設 X, Y 為 *topological spaces,* 考慮 *product space* $X \times Y$. 則 $X \times Y$ 為 *Hausdorff space* 若且唯若 X, Y 皆為 *Hausdorff space.*

Proof. 我們僅剩下要證明若 X, Y 皆為 Hausdorff space, 則 $X \times Y$ 為 Hausdorff space. 任取 $a = (x, y)$, $b = (x', y')$ 為 $X \times Y$ 中相異兩點. 不失一般性, 我們假設 $x \neq x'$. 此時由於 X 為 Hausdorff, 存在 U, U' 分別為 x, x' 在 X 中的 open neighborhood 滿足 $U \cap U' = \emptyset$. 此時任取 V, V' 分別為 y, y' 在 Y 中的 open neighborhood. 可得 $U \times V$, $U' \times V'$ 分別為 a, b 在 $X \times Y$ 中的 open neighborhood. 又 $U \times V$ 和 $U' \times V'$ 滿足

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') = \emptyset \times (V \cap V') = \emptyset.$$

得證 $X \times Y$ 亦為 Hausdorff space. □

Question 3.25. 能否利用投影函數 $\pi_1 : X \times Y \to X$ 定義為 $\pi_1(x, y) = x$, $\forall\, (x, y) \in X \times Y$ 是連續的, 來證明若 X 為 Hausdorff 則 $X \times Y$ 為 Hausdorff?

對於 quotient space 就沒有像前面的情況了. 一般來說一個 Hausdorff space 有可能找到 equivalence relation 使其所得的 quotient space 不是 Hausdorff space. 反之, 也有可能一個 topology space 不是 Hausdorff 但是取 quotient 後是 Hausdorff. 我們看以下的例子.

Example 3.3.7.

(1) 考慮一個有三個元素的集合 $X = \{a, b, c\}$. 定義 X 上的 topology 為 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$. 由於 $a \neq b$ 且 a 的 open neighborhood 皆包含 b, 因此知在此拓樸下 X 不是 Hausdorff. 現考慮 X 上的 equivalence relation $\sim$, 其中 $a \sim b$ 且 $x \sim x$, $\forall\, x \in X$. 此時 quotient space $X/\sim = \{\overline{a}, \overline{c}\}$ (注意 $\overline{a} = \overline{b}$), 且其 topology 為 $\tilde{\mathcal{T}} = \{\emptyset, \{\overline{a}\}, \{\overline{c}\}, \{\overline{a}, \overline{c}\}\}$. 也就是說 $X/\sim$ 為 discrete topological space 也因此知其為 Hausdorff space. 從這個例子我們知道一個 topological space 雖不是 Hausdorff 但其 quotient space 有可能是 Hausdorff.

(2) 考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 且考慮 $Y = \mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$ 使用 disjoint union topology. 由於 $\mathbb{R}$ 為 metric space 故知為 Hausdorff, 因此由 Proposition 3.3.5 知 Y 為 Hausdorff. 現考慮 Y 上的 equivalence relation $\sim$, 其中 $(x, i) \sim (x, j)$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i, j \in \{1, 2\}$ 且 $(0, 1) \sim (0, 1)$, $(0, 2) \sim (0, 2)$. 此時 quotient space $X/\sim = \{\overline{(x, 1)} \mid x \neq 0\} \cup \{\overline{(0, 1)}, \overline{(0, 2)}\}$ (注意當 $x \neq 0$ 時 $\overline{(x, 1)} = \overline{(x, 2)}$), 且此 quotient space topology 中任意 $\overline{(0, 1)}$ 的 open neighborhood U, 必存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\{\overline{(x, 1)} \mid -\epsilon < x < \epsilon\} \subseteq U$ 且任

意 $\overline{(0,2)}$ 的 open neighborhood V, 必存在 $\epsilon' > 0$ 使得 $\{\overline{(x,2)} \mid -\epsilon' < x < \epsilon'\} \subseteq V$. 因此知 $U \cap V \neq \emptyset$ (參見 Question 3.26), 也就是說 $Y/\sim$ 不是 Hausdorff space. 從這個例子我們知道一個 topological space 雖是 Hausdorff 但其 quotient space 有可能不是 Hausdorff.

Question 3.26. 在 Example 3.3.7 (2) 中令 $\varepsilon = \min\{\epsilon, \epsilon'\}$. 試說明若 $0 < x < \varepsilon$, 則 $\overline{(x,1)} \in U \cap V$.

當一個 topological space 是 compact 且為 Hausdorff, 便有相當豐富的性質. 所以最後我們特別來談論這一種情況. 在之前 Proposition 3.2.17 我們知道當 X 是 compact 時, X 所有的 closed subset 都是 compact subset. 一般來說反向是錯的, 也就是說 X 的 compact subset 未必是 closed. 不過若 X 又是 Hausdorff, 從前面 Proposition 3.2.22 的證明中我們知道 X 的 compact subset 會是 closed. 這就是一個 compact 且為 Hausdorff 的 topological space 會有有趣的性質的主要原因. 我們特別把這個性質列出.

Proposition 3.3.8. 假設 X 是一個 *compact topological space* 且為 *Hausdorff space.* 則 $S \subseteq X$ 為 X 的 *closed subset* 若且唯若 S 為 X 的 *compact subspace.*

Proposition 3.3.8 的最主要應用就是可以幫我們了解兩個 topological spaces 之間是否為 Homeomorphic. 再回顧一下, 當 X, Y 為 topological spaces, 若 X, Y 間有一個一對一且映成的連續函數 $f : X \to Y$, 並不代表 f 是一個 homeomorphism. 還要驗證 f 是 open map (此等價於 f 的反函數 $f^{-1} : Y \to X$ 是連續的) 才行. 不過在以下的特殊情況, 這個驗證是多餘的.

Theorem 3.3.9. 假設 X, Y 為 *topological space* 其中 X 為 *compact space* 且 Y 為 *Hausdorff space.* 若 $f : X \to Y$ 是一對一且映成的連續函數, 則 f 是一個 *homeomorphism.*

Proof. 我們要證明 $f : X \to Y$ 是 open map. 也就是說, 任取 U open in X, 我們要證明 $f(U)$ 是 open in Y. 首先注意, 因為 f 是 continuous 且 X 是 compact, 故由 f 是 onto 知 $f(X) = Y$ 是 compact. 另外 f 是一對一, 故由 Y 是 Hausdorff 可得 X 亦為 Hausdorff. 換言之, 此定理的前提告訴我們 X, Y 皆為 compact 且為 Hausdorff. 因此我們可以套用 Proposition 3.3.8.

現任取 X 中的 open set U 由於 $X \setminus U$ 是 closed 故由 Proposition 3.3.8 知 $X \setminus U$ 是 compact. 也因此由 f 是 continuous 得 $f(X \setminus U)$ 是 Y 中的 compact subset. 再由 Proposition 3.3.8 得 $f(X \setminus U)$ 是 Y 的 closed subset. 最後再利用 f 是一對一且映成得 $f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U) = Y \setminus f(U)$ 且因其為 closed 故知 $f(U)$ 是 Y 的 open subset. 得證本定理. □

其實在 Hausdorff space 中的 compact subset 會是 closed 的證明中我們證明了對任意的 compact subset C 以及 $x \notin C$ 會存在 open sets U, V 滿足 $C \subseteq U$ 以及 $x \in V$ 使得 $U \cap V = \emptyset$, 這是很有用的結果, 我們特別將它列出.

Lemma 3.3.10. 假設 X 是 *Hausdorff topological space* 且 C 是 X 的 *compact subset.* 若 $x \in X \setminus C$, 則存在包含 C 的 *open set* U 以及 x 的 *open neighborhood* V 滿足 $U \cap V = \emptyset$.

Question 3.27. 試證明 Lemma 3.3.10, 並依此說明 C 是 closed.

在介紹 compact 的概念時, 我們介紹了 locally compact 的概念 (Definition 3.2.19). 這個定義比起一般大家常見的在 metric space 中的 locally compact 的定義 (即對任意 $a \in X$ 存在 a 的 open neighborhood V 以及 compact subset C 滿足 $V \subseteq C$) 強. 事實上依 Definition 3.2.19 的定義, 我們只要考慮 $U = X$ 的情形, 便可得到想要的 V 以及 C. 會有這種情況發生主要是因為在 Hausdorff 的情形, 這兩種定義是一樣的. 最後我們就來說明這件事.

Proposition 3.3.11. 假設 X 是 *Hausdorff topological space,* 則 X 是 *locally compact* 若且唯若對任意 $a \in X$, 皆存在 a 的 *open neighborhood* V 以及 *compact subset* C 滿足 $V \subseteq C$.

Proof. 我們僅要證明若對任意 $a \in X$, 皆存在 a 的 open neighborhood V 以及 compact subset C 滿足 $V \subseteq C$, 則 X 是 locally compact. 亦即要證明對任意 a 的 open neighborhood U, 皆可找到 a 的 open neighborhood U' 以及 compact subset C' 滿足 $U' \subseteq C' \subseteq U$.

我們最直接的想法便是令 $U' = U \cap V$ 以及 $C' = \mathrm{cl}(U')$. 此時 U' 仍為 a 的 open neighborhood. 而 $U' \subseteq V \subseteq C$, 又因 C 是 closed (Question 3.27), 得 $C' = \mathrm{cl}(U') \subseteq C$ 且為 compact (Proposition 3.2.17). 不過 $C' \subseteq U$ 未必成立. 因此我們要想辦法讓 U' 再小一點, 以確保 $C' = \mathrm{cl}(U') \subseteq U$.

考慮 $\mathrm{bd}(U') = \mathrm{cl}(U') \setminus U'$, 由於 $a \in U'$ 故 $a \notin \mathrm{bd}(U')$. 再加上 $C' = \mathrm{cl}(U')$ 是 compact, 故由 $\mathrm{bd}(U')$ 是其 closed subset 得知 $\mathrm{bd}(U')$ 亦為 compact. 故由 Lemma 3.3.10 知存在 V' 是 a 的 open neighborhood 以及 open set W 滿足 $\mathrm{bd}(U') \subseteq W$ 且 $V' \cap W = \emptyset$. 注意此時 $\mathrm{cl}(V') \cap \mathrm{bd}(U') = \emptyset$. 這是因為 $V' \subseteq X \setminus W$ 且 $X \setminus W$ 是 closed, 故得 $\mathrm{cl}(V') \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus \mathrm{bd}(U')$. 現令 $U'' = V' \cap U'$, 此時

$$\mathrm{cl}(U'') = \mathrm{cl}(V' \cap U') \subseteq \mathrm{cl}(V') \cap \mathrm{cl}(U') = \mathrm{cl}(V') \cap (\mathrm{bd}(U') \cup U') = \mathrm{cl}(V') \cup U' \subseteq U'.$$

故得 U'' 是 a 的 open neighborhood 滿足 $U'' \subseteq \mathrm{cl}(U'') \subseteq U$, 且 $\mathrm{cl}(U'')$ 是 compact (因其為 closed subset of C). □

Question 3.28. 假設 X 是 Hausdorff topological space. 試證明 X 是 locally compact 若且唯若對任意 $a \in X$, 皆存在 a 的 open neighborhood V 使得 $\mathrm{cl}(V)$ 是 compact.

Exercise

Excecise 3.1. 證明 topological space X 是 disconnected 若且唯若存在不等於 X 的非空子集合 S 滿足 S 和 S^c 是 separated.

Excecise 3.2. 考慮實數 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. 考慮以下區間 $I_1 = [0, \infty)$, $I_2 = (-\infty, 0)$, $J_1 = [\sqrt{2}, \infty)$, $J_2 = (-\infty, \sqrt{2})$.

(1) 令 $S_1 = \mathbb{Q} \cap I_1$, $S_2 = \mathbb{Q} \cap I_2$. 試說明 S_1, S_2 是否為 seperated.

(2) 令 $T_1 = \mathbb{Q} \cap J_1$, $T_2 = \mathbb{Q} \cap J_2$. 試說明 T_1, T_2 是否為 seperated.

Excecise 3.3. 考慮有理數 $\mathbb{Q}$ 上的 topology 為 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 之下的 subspace topology. 假設 X 為 connected topological space. 證明若 $f : X \to \mathbb{Q}$ 為 continuous function, 則 f 為 constant function. (注意 $\mathbb{Q}$ 不是 discrete, 所以不能直接套用 Proposition 3.1.9)

Excecise 3.4. 假設 X, Y, Z 為 topological spaces 其中 X 為 connected. 假設 $f : X \to Y \amalg Z$ 為 continuous. 證明 either $f(X) \subseteq Y$ or $f(X) \subseteq Z$.

Excecise 3.5. 假設 X 為 disconnected topological space. 證明存在非空的 topological spaces Y, Z 使得 X 和 $Y \amalg Z$ 為 homeomorphic.

Excecise 3.6. 假設 X 為 topological space 且 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 為 X 中的 connected subsets. 假設 $S_i \cap S_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$, 證明 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$ 是 X 的 connected subset.

Excecise 3.7. 假設 X 是 locally connected topological space, 一般來說 X 的非空子集未必是 locally connected. 考慮 $\mathbb{R}$ 中的 standard topology 且 $\mathbb{Q}$ 使用其 subspace topology. 試說明 $\mathbb{Q}$ 是否為 locally connected.

Excecise 3.8. 假設 X 為 topological space 且 S 是 X 的一個 nontrivial open set. 考慮 S 上 X 的 subspace topology.

(1) 假設 $U \subseteq S$. 試說明 U 是 S 的一個 connected open set 若且唯若 U 是 X 的一個 connected open set.

(2) 假設 X 是 locally connected. 證明 S 亦為 locally connected.

(3) 假設 X 是 locally connected. 證明 S 可寫成一些 X 中互不相交的 connected open sets 的聯集, 並說明這樣的寫法是唯一的.

Excecise 3.9. 試說明 locally connected 是否是一個拓樸性質.

Excecise 3.10. 假設 X 是 connected topological space 且 $f : X \to \mathbb{R}$ 為連續函數其中 $\mathbb{R}$ 使用 standard topology. 假設存在 $x, x' \in X$ 滿足 $f(x) > 0, f(x') < 0$. 證明必存在 $a \in X$ 滿足 $f(a) = 0$.

Excecise 3.11. 假設 X 是 topological space. 試證明若對於任何由 X 中一些 closed set 所組成且有 finite intersection property 的集合 $\mathcal{F}$ 皆滿足 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$, 則 X 是 compact topological space.

Excecise 3.12. 試找兩個 topological spaces X, Y. 其中 X 是 connected 但不是 compact; 而 Y 是 compact 但不是 connected.

Excecise 3.13. 假設 X, Y 為 topological spaces 其中 X 為 compact, Y 為 metric space. 假設 $f : X \to Y$ 是連續函數且為 one-to-one and onto.

(1) 若 $C \subseteq X$ 是 closed, 證明 $f(C) \subseteq Y$ 是 bounded.

(2) 若 $W \subseteq X$ 滿足 $f(W) \subseteq Y$ 是 closed, 證明 W 是 compact.

Excecise 3.14. 假設 X 為 topological space 且考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology. 證明若 $f : X \to \mathbb{R}$ 是 continuous, 且 S 是 X 的 connected 且 compact subset, 則存在 $a, b \in S$ 使得 $f(S) = [f(a), f(b)]$.

Excecise 3.15. 假設 X 為 compact topological space 且為 Hausdorff. 設 $S \subseteq X$. 證明 S 是 compact 若且唯若 S 是 closed.

Chapter 4

Homotopy Theory

從這一章開始, 我們要簡單介紹一些代數拓樸的概念. 過去我們曾經利用 homeomorphic 的概念將拓樸空間分類. 這個分類法雖然很精準地幫我們將具有相同拓樸性質的空間歸為一類, 不過有時這樣的分類法因為太細了, 以至於有時不容易處理. Homotopy 的概念, 是對拓樸空間另一種的分類方式. 在這個分類之下, 我們可以將同類的拓樸空間對應到一個 group (群). 也因此可經由代數的操作, 來辨識這些拓樸空間之間的關係. 因為引進這樣的代數方法, 所以我們稱之為"代數拓樸".

4.1. Homotopy of Paths

首先我們介紹在一個拓樸空間中的 paths (路徑) 之間的 homotopy 的概念. 因為從 path 出發較容易讓大家理解 homotopy 的概念, 等到大家熟悉了, 下一節我們便會介紹一般拓樸空間中的連續函數的 homotopy.

給定一個 topological space X, 所謂一個 X 上的 path 指的就是一個連續函數 $\sigma: I \to X$, 這裡 I 是 $[0,1]$ 這個閉區間 (之後我們都用 I 表示這個閉區間) 且其上的拓樸是取 $\mathbb{R}$ 的 standard topology 的 subspace topology.

Question 4.1. 假設 X 為 topological space 且 $x_0 \in X$. 依定義 $\{x_0\}$ 是否可視為 X 上的 path 呢?

若用函數的角度看待 path 有點太嚴格了, 比方說若 σ 是 X 上的 path 而令 $\tau: I \to X$ 也為 X 上的 path 其定義為 $\tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \le t \le 1/2; \\ \sigma(1), & 1/2 < t \le 1. \end{cases}$ 此時 σ, τ 是兩個從 I 到 X 不同的函數, 不過從 path (路徑) 的角度來說, 它們的差異不大 (只是 τ 比較早到罷了). 所以我們想對 path 分類, 因此有以下的定義.

Definition 4.1.1. 假設 X 為 topological space 且 σ, τ 為 X 上的 paths. 若考慮 $I \times I$ 為 I 和 I 的 product space, 存在一個連續函數 $F: I \times I \to X$, 滿足 $F(s,0) = \sigma(s), F(s,1) = \tau(s)$, $\forall s \in I$, 則我們稱 σ, τ 是 *homotopic*, 且用 $\sigma \simeq \tau$ 來表示. 而函數 F 稱之為 σ, τ 之間的 *homotopy function*.

注意, 當我們固定一個 $t_0 \in I$, 此時考慮 $F_{t_0}(s): I \to X$, 定義為 $F_{t_0}(s) = F(s,t_0)$, $\forall s \in I$. F_{t_0} 是一個從 I 到 X 的連續函數, 所以會是 X 上的 path. 因此 σ 和 τ 是 homotopic 就表示, 我們可以找到一組 "連續變動" 的 paths F_t, 從 $F_0 = \sigma$ "變形" 至 $F_1 = \tau$. 今後為了方便起見, 當 $F: I\times I \to X$ 是連續函數, 對任意 $t_0 \in I$, 我們都用 F_{t_0} 來表示 $F(s,t_0)$ 這個在 X 上的 path.

Example 4.1.2. 考慮 $S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 為 $\mathbb{R}^2$ 的 standard topology 之下的 subspace. 令 σ, τ 為 S^1 上的 paths, 其中 $\sigma(t) = (\cos(t\pi), \sin(t\pi))$, 且 $\tau(t) = (\cos(-t\pi), \sin(-t\pi))$, $\forall t \in I$. 考慮

$$G(s,t) = (1-t)\sigma(s) + t\tau(s), \forall (s,t) \in I\times I.$$

雖然 $G(s,0) = \sigma(s)$, $G(s,1) = \tau(s)$, 不過我們不能因此說在 S^1 上是 σ, τ 是 homotopic. 這是因為 $G(s,t)$ 並不是從 $I\times I$ 到 S^1 的函數 (請親自檢查當 $0 < t_0 < 1/2$ 時 $G_{t_0}(s) = G(s,t_0)$ 不是 S^1 的 path). 不過若將 $G(s,t)$ 視為 $I\times I$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的函數, 因為它是連續的, 我們可以說 σ, τ 在 $\mathbb{R}^2$ 是 homotopic.

不過事實上 σ, τ 在 S^1 上仍為 homotopic. 要說明這一點, 我們必須要找到一個從 $I\times I$ 到 S^1 的連續函數. 我們可以考慮

$$F(s,t) = (\cos((1-2t)s\pi), \sin((1-2t)s\pi)), \forall (s,t) \in I\times I.$$

由於 $F: I\times I \to S^1$ 確為 $I\times I$ 到 S^1 的連續函數且 $F_0(s) = \sigma(s)$, $F_1(s) = \tau(s)$. 我們知 σ, τ 在 S^1 上確為 homotopic.

Question 4.2. 在 Example 4.1.2 中的 $F(s,t)$, 在 $t = 1/2$ 時 $F_{1/2}$ 是在 S^1 上哪一個 path? 試著說明 F 是如何將 σ 變形至 τ.

Question 4.3. 假設 X 為 topological space, 且 σ 為 X 上的 path.

(1) 令 $\tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ \sigma(1), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$ 試證明在 X 中 $\sigma \simeq \tau$.

(2) 假設 $F: I\times I \to X$ 是連續函數且 $F_0 = \sigma$, 試證明在 X 中對任意 $t_0 \in I$ 皆有 $\sigma \simeq F_{t_0}$.

一般來說, 要說明兩個 path 是 homotopic 我們必須建構出之間的 homotopy function. 由於 homotopy function 必須是連續的, 因此要確保連續性, 我們通常會利用連續函數的合成仍是連續的這樣的方式來建構. 另外常用的方法便是將 $I\times I$ 寫成一些 closed sets 的聯集, 然後在這些 closed set 上定義連續函數, 不過要確保這些函數在交接處是一致的, 就可以利用 *Gluing Lemma* 得到定義在 $I\times I$ 的連續函數. 我們曾在 Proposition 1.4.4 處理 open sets 聯集的情況, 而將寫成 closed sets 聯集的情況留做習題 (Question 1.12). 因為寫成 closed sets 聯集的情況, 是將來建構 homotopy function 常用的方法, 這裡為了方便起見我們將它列出.

Lemma 4.1.3 (Gluing Lemma)**.** 假設 X 是 *topological space* 且 X_1, X_2 為 X 的 *closed subsets* 滿足 $X_1 \cup X_2 = X$. 設 Y 為 *topological space* 且 X_1, X_2 使用 X 的 *subspace topology,*

假設 $f_1 : X_1 \to Y$, $f_2 : X_2 \to Y$ 皆為 *continuous* 且 $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall\, x \in X_1 \cap X_2$. 令 $f : X \to Y$ 為函數其定義為

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1; \\ f_2(x), & x \in X_2. \end{cases}$$

則 f 是 *continuous function.*

對於 X 上的 path 既然用 homotopic 來分類, 那它應該是 equivalence relation 才會是好的分類, 下一個定理告訴我們 homotopic 確實是好的分類,

Proposition 4.1.4. 假設 X 是一個 *topological space, homotopy relation* $\simeq$ 是 X 上的 *paths* 的一個 *equivalence relation.*

Proof. 首先證明對任意 X 上的 path σ, 皆有 $\sigma \simeq \sigma$. 考慮 $F(s,t) = \sigma(s)$, $\forall\, t \in I$. 此時 F 確為 $I \times I$ 到 X 的 continuous function 且 $F_0 = F_1 = \sigma$, 故證得 $\simeq$ 是 reflexive.

現若 $\sigma \simeq \tau$, 即存在 $F : I \times I \to X$ 為連續函數滿足 $F_0 = \sigma$, $F_1 = \tau$. 考慮 $G(s,t) = F(s, 1-t)$, 此時 G 也是 $I \times I$ 到 X 的 continuous function 且 $G(s,0) = F(s,1) = F_1 = \tau$ 且 $G(s,1) = F(a,0) - F_0 = \sigma$, 故證得 $\tau \simeq \sigma$, 即 $\simeq$ 是 symmetric.

最後我們要證明若 $\sigma \simeq \tau$ 且 $\tau \simeq \gamma$, 則 $\sigma \simeq \gamma$. 也就是說若 F, G 皆為 $I \times I$ 到 X 的 continuous function 且 $F_0 = \sigma$, $F_1 = \tau$, $G_0 = \tau$, $G_1 = \gamma$, 我們要找到 $H : I \times I \to X$ 為 continuous 且滿足 $H_0 = \sigma$, $H_1 = \gamma$. 令

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s, 2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ G(s, 2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

因為區間 $[0,1/2]$, $[1/2,1]$ 皆為 I 的 closed subset, 因此 $I \times [0,1/2]$, $I \times [1/2,1]$ 皆為 $I \times I$ 的 closed subset. 由於 $(I \times [0,1/2]) \cap (I \times [1/2,1]) = I \times \{1/2\}$ 以及 $F(s,1) = G(s,0) = \sigma$, 利用 Gluing Lemma (4.1.3) 我們得 H 是連續函數, 且滿足 $H_0 = \sigma$, $H_1 = \gamma$. 故證得 $\sigma \simeq \gamma$, 亦即 $\simeq$ 是 transitive. ☐

知道拓樸空間 X 中 path 之間的 homotopy relation 是一個 equivalence relation 是很好的事, 這樣我們就可以把 paths 藉由 homotopy relation 來分類. 有就是說 σ, τ 同類, 表示 $\sigma \simeq \tau$. 下一節我們會用一樣的 homotopic 的概念將兩個拓樸空間之間的連續函數分類, 進而對拓樸空間給了一個新的分類方法. 不過這個分類法對一個拓樸空間上的 paths 來說太粗了, 我們要多加一點限制才好用. 以下我們將對這一點多做說明.

首先我們注意對於任意 $x_0 \in X$, constant function $c(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$ 是一個從 I 到 X 的連續函數, 所以依定義, 一個點也是 X 上的 path. 現若 σ 為 X 上的 path 且通過 x_0, 亦即存在 $t_0 \in I$ 使得 $\sigma(t_0) = x_0$. 此時考慮 $F(s,t) = \sigma(tt_0 + s(1-t))$, $\forall\, (s,t) \in I \times I$. 由於 F 是 $T \times I$ 到 X 的連續函數且滿足 $F_0(s) = \sigma(s)$ 且 $F_1(s) = \sigma(t_0) = x_0$. 我們得到 σ 和其上的一點 x_0 是 homotopic. 換言之, 在這樣的分類方式之下任何 path 是和其上的任一點是同類的. 再因為 homotopy relation 是一個 equivalence relation, 任兩點 x_0, y_0 如果可以用一個 path σ 連結, 由於 $x_0 \simeq \sigma$ 且 $\sigma \simeq y_0$, 我們得到 $x_0 \simeq y_0$. 也就是說 homotopy relation 不只將 paths 分類, 事實上是對 X 上的點做分類. 只要兩點可以用 path 連接, 這兩點就是同

類. 在這樣分類之下同類的點所成的集合便稱為 X 的一個 *path component*. 再強調一次, 同一個 path component 中任兩點可以用 path 連結; 反之, 不同 path component 的點就無法用 path 相連. 更有甚者, 同一個 path component 上的 path 都是 homotopic; 而不同 path component 的 path 就不會 homotopic. 也因此, 在對 X 上的 path 用 homotopy relation 的分類之下所形成的 equivalence class 就和 X 上的 path component 有一對一且映成的對應關係. 最特別的情況就是 X 僅有一個 path component, 我們有以下的定義.

Definition 4.1.5. 假設 X 是 topological space 且對任意 $a,b \in X$ 皆存在一個 path σ 滿足 $\sigma(0)=a$, $\sigma(1)=b$, 則稱 X 是 *path connected space.*

Question 4.4. $X=\{a,b\}$ 且考慮 indiscrete topology 是否為 path connected? 單位圓 S^1 視為 $\mathbb{R}^2$ standard topology 的 subspace 是否為 path connected?

X 是 path connected space 就是指任意 X 上兩點都能找到 X 上的 path 將之連接. 我們自然會問 path connected 是否為 connected 呢? 答案是肯定的, 我們有以下的定理.

Proposition 4.1.6. 若 X 是 *path connected topological space,* 則 X 是 *connected.*

Proof. 我們用反證法, 假設 X 是 disconnected. 表示存在 X 的非空 open set U,V 滿足 $U\cup V=X$ 且 $U\cap V=\emptyset$. 現由於 U,V 非空, 必存在 $a\in U$ 且 $b\in V$. 再由 X 是 path connected, 我們知存在連續函數 $\sigma: I\to X$ 滿足 $\sigma(0)=a$, $\sigma(1)=b$. 現考慮 $\sigma^{-1}(U),\sigma^{-1}(V)$, 由於 σ 是連續函數, 我們有 $\sigma^{-1}(U),\sigma^{-1}(V)$ 為 I 上的 open set 且非空 (因為 $0\in\sigma^{-1}(U), 1\in\sigma^{-1}(V)$), 又有

$$\sigma^{-1}(U)\cup\sigma^{-1}(V)=\sigma^{-1}(U\cup V)=I,\quad \sigma^{-1}(U)\cap\sigma^{-1}(V)=\sigma^{-1}(U\cap V)=\emptyset.$$

這與 $I=[0,1]$ 是 connected (Proposition 3.1.21) 相矛盾, 故得證 X 是 connected. □

要注意 Proposition 4.1.6 的反向不一定成立, 也就是說 connected space 未必是 path connected. 例如我們曾經介紹過的 “topologist’s sine curve”. 我們提過它是 connected, 但不是 locally connected. 事實上它也不是 path connected. 有興趣的同學可以參考一般拓樸書籍的介紹, 在此我們就不多作介紹了.

當我們將一個 topological space 分類成一個個 path component 後, 每一個 path component 考慮成 subspace 後便會是 path connected. 對於 path connected space 由於使用 homotopy relation 便沒有意義了 (因為在此空間中所有的 path 皆 homotopic), 所以我們需要考慮更細的分類方法.

當 σ,τ 是 X 上的 paths 且 $\sigma(1)=\tau(0)$ (即 σ 這個路徑的終點是 τ 這個路徑的起點), 此時我們自然可以將兩個路徑 “連” 起來. 我們令 $\sigma*\tau$ 為 path 其定義為

$$\sigma*\tau(t)=\begin{cases}\sigma(2t), & 0\le t\le 1/2;\\ \tau(2t-1), & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

同樣的利用 Question 1.12, $\sigma*\tau$ 是一個從 I 到 X 的連續函數. 現在問題來了, 若 σ',τ' 為 X 中的 path 滿足 $\sigma\simeq\sigma'$, $\tau\simeq\tau'$. 此時 $\sigma'(1)$ 未必等於 $\tau'(0)$, 也就是說 σ',τ' 未必可以

“連” 起來. 因此在用 homotopy relation 分類之下, 將兩個 path “連” 起來這個動作不是 well-defined. 要克服這個問題, 我們必須將我們的分類方法更加嚴格一點. 我們可以定義兩個 path σ, σ' 要同類不只要 homotopic 還要再加上它們起點要相同, 還有終點要終點. 也就是說除了原先存在連續函數 $F: I\times I \to X$ 滿足 $F_0 = \sigma, F_1 = \sigma'$ 外, 還要 $\sigma(0) = \sigma'(0)$ 以及 $\sigma(1) = \sigma'(1)$. 這樣的分類法雖然解決了剛才提的連接兩個 path 的問題, 但仍是沒有多大用處. 例如在 path connected space, 任兩個 path 只要有一樣的起點和一樣的終點就會是同類. 這樣的分類, 只是將此空間上的 paths 依起點和終點來分類而已. 所以這樣的分類所成的 equivalence classes 只是和 X 上任兩點 $a, b \in X$ 所組成的數對 (a, b) 形成一對一且映成的對應關係, 對我們沒有甚麼幫助.

在 Question 4.3 我們知道當 $\sigma \simeq \tau$ 時, σ, τ 之間的 homotopy function F 在任一 $t_0 \in I$, 所決定的 path F_{t_0}, 皆和 σ 和 τ 為 homotopic. 所以在這裡新的分類方法, 我們不只要求 $\sigma \simeq \tau$, $\sigma(0) = \tau(0)$ 以及 $\sigma(1) = \tau(1)$, 我們還要求 σ, τ 之間的 homotopy function $F: I\times I \to X$ 須滿足 $F(0, t) = \sigma(0) = \tau(0)$ 且 $F(1, t) = \sigma(1) = \tau(1)$, $\forall\, t \in I$. 也就是說在 σ 變成 τ 的轉變過程中起點和終點都必須保持不動, 這樣我們才是為同類. 這種較 “剛性” 的要求來分類, 以後我們可以知道, 讓我們有了另一種看法了解拓樸空間, 非常有用. 以下正式定義這種分類方法.

Definition 4.1.7. 假設 X 為 topological space 且 σ, τ 為 X 上的 paths 滿足 $\sigma(0) = \tau(0)$ 且 $\sigma(1) = \tau(1)$. 若存在一個連續函數 $F: I\times I \to X$, 滿足 $F(s, 0) = \sigma(s), F(s, 1) = \tau(s)$, $\forall\, s \in I$ 以及 $F(0, t) = \sigma(0)$, $F(1, t) = \sigma(1)$, $\forall\, t \in I$. 則我們稱 σ, τ 是 *homotopic with end points fixed*, 且用 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$ 來表示. 而函數 F 稱之為 σ, τ 之間的 *homotopy function with end points fixed.*

Example 4.1.8. 在 Example 4.1.2 中我們考慮 σ, τ 為 $\mathbb{R}^2$ 上的 paths, 其中 $\sigma(t) = (\cos(t\pi), \sin(t\pi))$, 且 $\tau(t) = (\cos(-t\pi), \sin(-t\pi))$, $\forall\, t \in I$ 且考慮

$$G(s, t) = (1-t)\sigma(s) + t\tau(s),\ \forall\, (s, t) \in I\times I.$$

此時不只 $G(s, 0) = \sigma(s)$, $G(s, 1) = \tau(s)$, 我們有 $G(0, t) = \sigma(0) = \tau(0)$ 且 $G(1, t) = \sigma(1) = \tau(1)$, $\forall\, t \in I$. 所以 G 是 σ, τ 之間的 homotopy function 且保持端點固定. 所以我們知在 $\mathbb{R}^2$ 中 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$.

我們在 Example 4.1.2 中也將 σ, τ 視為單位圓 S^1 上的 paths. 我們有一個在 S 上 σ, τ 之間的 homotopy function, 即

$$F(s, t) = (\cos((1-2t)s\pi), \sin((1-2t)s\pi)),\ \forall\, (s, t) \in I\times I.$$

雖然 $F(0, t) = \sigma(0)$ 但當 $t \neq 1$ 時, $F(1, t) = (\cos(1-2t)\pi, \sin(1-2t)\pi) \neq \sigma(1)$, 所以 F 並不是固定端點 σ, τ 之間在 S^1 上的 homotopy function. 事實上以後我們會知道, 在 S^1 上 σ 和 τ 是不可能 homotopic with end points fixed.

從上面了例子我們知道用固定端點的 homotopy relation 來分類, 可將 $\mathbb{R}^2$ 和 S^1 區分開來, 不過要拿它來分類當然要是 equivalence relation 才行. 大家可以自行驗證在 Proposition

4.1.4 的證明中的 homotopy function 若端點皆固定, 後來新定的 homotopy function 的端點也會被固定. 所以 $\simeq_{\{0,1\}}$ 也會是一個 equivalence relation. 這裡證明就省略了.

Proposition 4.1.9. 假設 X 是一個 *topological space,* 固定端點的 *homotopy relation* $\simeq_{\{0,1\}}$ 是 X 上的 *paths* 的一個 *equivalence relation.*

最後我們回到將兩個 path 連結的問題. 假設 σ,τ 為 X 上的 paths 且 $\sigma(1)=\tau(0)$, 我們定了一個新的 path $\sigma*\tau$ 將 σ,τ 連起來, 亦即

$$\sigma*\tau(t)=\begin{cases}\sigma(2t), & 0\leq t\leq 1/2;\\ \tau(2t-1), & 1/2\leq t\leq 1.\end{cases}$$

現若 σ',τ' 為 X 上的 paths 滿足 $\sigma\simeq_{\{0,1\}}\sigma'$ 且 $\tau\simeq_{\{0,1\}}\tau'$, 此時由於 $\sigma'(1)=\sigma(1)=\tau(0)=\tau'(0)$, 我們當然可以有 $\sigma'*\tau'$. 現在的問題是, 是否 $\sigma*\tau\simeq_{\{0,1\}}\sigma'*\tau'$? 也就是說若 F,G 分別是 σ 到 σ' 以及 τ 到 τ' 的 homotopy function with end points fixed, 我們能否建構出連續函數 $H: I\times I\to X$, 是 $\sigma*\tau$ 到 $\sigma'*\tau'$ 的 homotopy function with end points fixed?

考慮

$$H(s,t)=\begin{cases}F(2s,t), & 0\leq s\leq 1/2;\\ G(2s-1,t), & 1/2\leq s\leq 1.\end{cases}$$

由於 H 是連續函數且 $H_0=F_0*G_0=\sigma*\tau$, $H_1=F_1*G_1=\sigma'*\tau'$, 我們知道 H 是在 X 上 $\sigma*\tau$ 到 $\sigma'*\tau'$ 的 homotopy function. 又對任意 $t\in I$, $H(0,t)=F(0,t)=\sigma(0)$, $H(1,t)=G(1,t)=\tau(1)$, 我們得 H 是 homotopy function with end points fixed, 故知 $\sigma*\tau\simeq_{\{0,1\}}\sigma'*\tau'$. 我們證明了以下定理.

Proposition 4.1.10. 假設 σ,τ 為 *topological space* X 上的 *paths* 且 $\sigma(1)=\tau(0)$. 若 σ',τ' 為 X 上的 *paths* 滿足 $\sigma\simeq_{\{0,1\}}\sigma'$ 且 $\tau\simeq_{\{0,1\}}\tau'$, 則 $\sigma*\tau\simeq_{\{0,1\}}\sigma'*\tau'$.

Proposition 4.1.10 中的 $*$ 好像給了在 X 上一些 paths 之間的運算. 不過在代數運算中最重要的就是要有結合律 (associativity), 事實上若 σ,τ,γ 為 X 上的 paths 滿足 $\sigma(1)=\tau(0)$ 且 $\tau(1)=\gamma(0)$, 此時考慮

$$F(s,t)=\begin{cases}\sigma(\frac{4s}{t+1}), & 0\leq s\leq (t+1)/4;\\ \tau(4s-t-1), & (t+1)/4\leq s\leq (t+2)/4;\\ \gamma(\frac{4s-t-2}{2-t}), & (t+2)/4\leq s\leq 1.\end{cases}$$

我們有以下之結果.

Lemma 4.1.11. 假設 σ,τ,γ 為 *topological space* X 上的 *paths* 滿足 $\sigma(1)=\tau(0)$ 且 $\tau(1)=\gamma(0)$. 則 $(\sigma*\tau)*\gamma\simeq_{\{0,1\}}\sigma*(\tau*\gamma)$.

Question 4.5. 假設 σ,τ,γ 滿足 Lemma 4.1.11 的假設, 分別寫下 $(\sigma*\tau)*\gamma$ 以及 $\sigma*(\tau*\gamma)$ 之定義. 並依此證明 Lemma 4.1.11.

Question 4.6. 假設 σ 是 topological space X 上的 path. 令 $\sigma(0)=a$ 且 c 為 constant path $c(t)=a$, $\forall\, t\in I$.

(1) 試證明 $c*\sigma\simeq_{\{0,1\}}\sigma$.

(2) 試找到一個 path τ 滿足 $\sigma * \tau \simeq c$.

(3) 試找到 path γ 滿足 $\sigma * \gamma \simeq_{\{0,1\}} \sigma$.

有了 Lemma 4.1.11 以及 Question 4.6, 我們可以找到 X 上一些特定的 paths 使得它們在 homotopic with end points fixed 這樣的分類下形成一個 group. 關於這一點, 我們會在介紹 fundamental group 時再詳談.

4.2. Homotopy of Functions

一個拓樸空間 X 中的 path 其實是兩個拓樸空間, 即 I 與 X 之間的連續函數. 這一節中我們將 paths 之間的 homotopic 概念, 推廣到連續函數之間的 homotopic 概念, 進而探討拓樸空間的 homotopic 概念.

給定兩拓樸空間 X, Y, 首先我們定義從 X 到 Y 的連續函數間的 homotopic.

Definition 4.2.1. 假設 X, Y 為 topological space. 考慮 X 到 Y 的連續函數 $f, g : X \to Y$. 若存在 $F : X \times I \to Y$ 為連續函數 (這裡 $X \times I$ 為 X, I 的 product space), 滿足 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$, 則稱 f, g 為 *homotopic* 記為 $f \simeq g$. 並稱 F 為 f, g 的 *homotopy function.*

注意, 當我們固定一個 $t_0 \in I$, 此時考慮 $F_{t_0} : X \to Y$, 定義為 $F_{t_0}(x) = F(x, t_0)$, $\forall\, x \in X$. F_{t_0} 是一個從 X 到 Y 的連續函數. 因此 f 和 g 是 homotopic 就表示, 我們可以找到一組 “連續變動” 的連續函數 F_t, 從 $F_0 = f$ “變換” 至 $F_1 = g$. 如同上一節的情況今後為了方便起見, 當 $F : X \times I \to Y$ 是連續函數, 對任意 $t_0 \in I$, 我們都用 F_{t_0} 來表示 $F(x, t_0)$ 這個從 X 到 Y 的連續函數.

Example 4.2.2. 假設 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 的一個 convex subset, 即對任意 $a, b \in Y$ 皆有 $ta + (1-t)b \in Y$, $\forall\, t \in I$. 此時對任意連續函數 $f : X \to Y$, 以及固定任一點 $y_0 \in Y$, 考慮

$$F(x, t) = ty_0 + (1-t)f(x), \quad \forall\, (x, t) \in X \times I.$$

由於 F 是連續函數且滿足 $F_0(x) = F(x, 0) = f(x)$ 以及 $F_1(x) = F(x, 1) = y_0$, $\forall\, x \in X$, 我們知 $f(x) \simeq c_{y_0}$, 其中 $c_{y_0} : X \to Y$, 是一個滿足 $c_{y_0}(x) = y_0$, $\forall\, x \in X$ 的 constant function.

Example 4.2.2 中的拓樸空間 Y 是很特別的拓樸空間, 它滿足所有映射到它的連續函數都會和 constant function 是 homotopic. 特別的, 當 $X = Y$, 且 f 是 identity function (即 $f = \mathrm{id}_Y$), 我們有 $\mathrm{id}_Y \simeq c_{y_0}$. 我們特別將這種拓樸空間給一個定義.

Definition 4.2.3. 假設 X 是一個拓樸空間. 若存在一個 constant function $c : X \to X$ 滿足 $\mathrm{id}_X \simeq c$, 則稱 X 為 *contractible space.*

Example 4.2.2 告訴我們 $\mathbb{R}^n$ 中的 convex sets 皆為 contractible. 將來我們會證明 S^1 不會是 contractible.

Question 4.7. 試證明任意 indiscrete topological space 皆為 contractible space.

Question 4.8. 假設 X 是 discrete topological space. 證明若 $f : X \to X$ 是連續函數滿足 $f \simeq \mathrm{id}_X$, 則 $f = \mathrm{id}_X$. 依此我們知道, 若 discrete space X 有兩個以上的元素, 則 X 不會是 contractible.

在上一節 Proposition 4.1.4 中, 我們知道 path 之間的 homotopy relation 是一個 equivalence relation. 這對於連續函數來說也是正確的. 由於證明和 Proposition 4.1.4 相同, 我們就不再證明了.

Proposition 4.2.4. 假設 X, Y 為 *topological space.* 則 X 到 Y 之間的連續函數的 *homotopy relation* 是一個 *equivalence relation.*

我們都知道, 當兩個連續函數可以合成時, 其合成函數仍為連續函數. 現在問題是合成函數, 在 homotopy equivalence 之下是否可以保持? 以下定理告訴我們答案是肯定的.

Proposition 4.2.5. 假設 $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$ 皆為連續函數且滿足 $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$. 則 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Proof. 令 $F : X \times I \to Y$, $G : Y \times I \to Z$, 分別為 f_1, f_2 以及 g_1, g_2 的 homotopy function, 即 F, G 皆為連續且滿足 $F_0 = f_0, F_1 = f_1$ 以及 $G_0 = g_0, G_1 = g_1$. 現考慮 $H : X \times I \to Z$ 其定義為 $H(x,t) = G(F(x,t),t)$, $\forall\,(x,t) \in X \times I$. 此時

$$H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)),$$

同理 $H(x,1) = g_1(f_1(x))$, 再加上 H 為 continuous, 我們證得了 $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. □

特別地, 當 Y 是 contractible, 因存在 Y 上的 constant function $c : Y \to Y$ 滿足 $\mathrm{id}_Y \simeq c$, 故由 Proposition 4.2.5 知, 對任意 X 到 Y 的連續函數 $f : X \to Y$, 皆有

$$f = \mathrm{id}_Y \circ f \simeq c \circ f.$$

由於 $c \circ f : X \to Y$ 是一個 X 到 Y 的 constant function, 我們得證以下的定理.

Corollary 4.2.6. 假設 X, Y 為 *topological spaces,* 其中 Y 為 *contractible.* 則對任意連續函數 $f : X \to Y$, 皆存在一個 X 到 Y 的 *constant function* c 使得 $f \simeq c$.

Question 4.9. 由 Corollary 4.2.6 的證明中是否可以推得存在一個 X 到 Y 的 constant function c 使得對任意連續函數 $f : X \to Y$, 皆有 $f \simeq c$. 特別的當 Y 是 contractible space, 試說明任意 constant function $c : Y \to Y$ 皆滿足 $c \simeq \mathrm{id}_Y$.

Question 4.10. 試證明若 X 為 contractible space 則 X 為 path connected.

當 X, Y 是 topological spaces, 我們用 $[X, Y]$ 來表示利用 X 到 Y 之間的連續函數的 homotopy relation 來分類之後, 所得的 equivalence classes. 要特別注意, 由於 X 到 Y 的函數和 Y 到 X 的函數是兩個不相關的集合, $[X, Y]$ 未必等於 $[Y, X]$.

Question 4.11. 假設 Y 是 topological space, 試證明以下是等價的:

(1) Y is contractible.

(2) $[Y,Y]$ 僅有一個元素.

(3) 對任意拓樸空間 X 皆滿足 $[X,Y]$ 僅有一個元素.

最後我們說明一下, 我們也可如 path 的情況, 採取類似端點固定這種較嚴格的 homotopy equivalence, 也就是對連續函數的轉換過程加以限制. 對於連續函數, 我們有以下 Definition 4.1.7 的推廣.

Definition 4.2.7. 假設 X,Y 為 topological spaces. 固定 X 的一個 subset A, 假設 $f,g : X \to Y$ 為連續函數滿足 $f(a) = g(a)\ \forall a \in A$. 若存在一個連續函數 $F : X \times I \to Y$, 滿足 $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x), \forall x \in X$ 以及 $F(a,t) = f(a) = g(a), \forall a \in A, t \in I$. 則我們稱 f,g 是 *homotopic with A fixed*, 且用 $f \simeq_A g$ 來表示. 而函數 F 稱之為 f,g 之間的 *homotopy function with A fixed.*

和端點固定一樣的情況, $\simeq_A$ 也會是一個 equivalence relation, 因為證法都相同, 就不再詳述了.

Proposition 4.2.8. 假設 X,Y 為 *topological spaces* 且 A 為 X 的 *subset.* 則 $\simeq_A$ 是 X 到 Y 的連續函數之間的一個 *equivalence relation.*

Question 4.12. 當 $A = \emptyset$ 時, $\simeq_A$ 會是怎樣的 equivalence relation?

4.3. Homotopy Equivalence of Spaces

過去我們利用兩個拓樸空間之間是否有一個 homeomorphism 來判定它們是否同類的方法太過嚴格了, 以至於對拓樸空間的分類問題顯得複雜. 上一節中, 我們將連續函數用 homotopy 的概念分類, 在此分類之下兩個拓樸空間的連續函數問題變得簡單多了. 例如所有 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的連續函數都可歸為一類 (因為 $\mathbb{R}$ 是 contractible). 這一節中, 我們將延續這種概念對拓樸空間給了一個新的分類方法.

假設 X,Y 為拓樸空間, 而 $f : X \to Y$ 為連續函數, 若存在連續函數 $g : Y \to X$ 滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, 我們會覺得 $g(x)$ "好像" $f(x)$ 的反函數. 至少若 $f(x)$ 是一對一且映成的話, 在 homotopy 的角度來看, $g(x)$ 會和 $f(x)$ 的反函數是同類的. 我們有以下的定義.

Definition 4.3.1. 假設 X,Y 為拓樸空間, 我們稱連續函數 $f : X \to Y$ 為一個 *homotopy equivalence function* 如果存在連續函數 $g : Y \to X$ 滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. 在此情形之下, 我們稱 X,Y 為 *homotopy equivalent* 且用 $X \simeq Y$ 來表示.

Question 4.13. 假設兩拓樸空間為 homeomorphic 是否它們會 homotopy equivalent?

Question 4.14. 假設 X,Y 是 topological spaces 且 Y 是 contractible. 試證明 $X \simeq Y$ 若且唯若 X 是 contractible.

Question 4.15. 考慮 $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 為 $\mathbb{R}^2$ 的 standard topology 之下的 subspace. 考慮連續函數 $f : X \to S^1$ 定義為

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in X.$$

試證明 f 為 homotopy equivalence function.

很容易看出, homotopy equivalent $\simeq$ 是拓樸空間中的 equivalence relation. 事實上對任意的 topological space X, 我們皆有 id_X 是一個 X 到 X 的 homotopy equivalence function, 所以 $X \simeq X$. 另外若 $X \simeq Y$, 表示存在連續函數 $f : X \to Y$ 以及 $g : Y \to X$ 滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. 也就是說 $g : Y \to X$ 是 Y 到 X 的 homotopy equivalence function, 所以 $Y \simeq X$. 最後若 $X \simeq Y$ 且 $Y \simeq Z$, 若 $f : X \to Y$, $h : Y \to Z$ 分別為 homotopy equivalence functions 且 $g : Y \to X$, $l : Z \to Y$ 滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, $l \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$, $h \circ l \simeq \mathrm{id}_Z$, 此時由 Proposition 4.2.5 我們有

$$(h \circ f) \circ (g \circ l) = h \circ (f \circ g) \circ l \simeq h \circ \mathrm{id}_Y \circ l = h \circ l \simeq \mathrm{id}_Z.$$

同理可得 $(g \circ l) \circ (h \circ f) \simeq \mathrm{id}_X$. 亦即 $h \circ f : X \to Z$ 是 X 到 Z 的 homotopy equivalence function, 得證 $X \simeq Z$. 因此我們有以下的結果.

Proposition 4.3.2. 對於 *topological spaces, homotopy equivalent* $\simeq$ 是一個 *equivalence relation.*

要注意, 一個連續函數和 identity 是 homotopic 並不表示它是一對一且映成的. 例如在 contractible space 中 identity 就和 constant function 是 homotopic. 因此, 當我們說 $f : X \to Y$ 是一個 homotopy equivalence function, 並不表示它是一對一且映成的. 從這個角度來說拓樸空間用 homotopic 來分類就比用 homeomorphic 來分類較不嚴格. 例如若 X, Y 皆為 indiscrete topological space, 但有不同的元素個數, 則 X, Y 不可能會是 homeomorphic 但是因為它們都是 contractible space (Question 4.7), 故由 Question 4.14 知 X, Y 為 homotopic equivalent. 不過另一方面 homotopic equivalent 又不會太鬆散, 下一個習題告訴我們 discrete spaces 需有相同的元素個數才會 homotopic equivalent.

Question 4.16. 假設 X, Y 為 discrete topological space 且分別有 m, n 個元素. 試證明 $X \simeq Y$ 若且唯若 $m = n$.

另外要注意, 我們要說 $f : X \to Y$ 是一個 homotopy equivalence function 就必須找到連續函數 $g : Y \to X$ 同時滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, 僅符合單邊 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ (或 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$) 是不夠的. 例如當 Y 是 contractible 任意連續函數 $f : X \to Y$ 以及 $g : Y \to X$, 我們都有 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ (為什麼?), 但是若 X 不是 contractible, 則不可能會有 $X \simeq Y$ (參見 Question 4.14), 也就是說 $g \circ f$ 不可能和 id_X 是 homotopic. 不過若對於連續函數 $f : X \to Y$, 存在連續函數 $g, h : Y \to X$ 分別滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$, 則我們可推得 $g \simeq h$ (利用 Proposition 4.2.5), 因此此時仍可確定 f 為 homotopy equivalence function.

Question 4.17. 假設 $f : X \to Y$ 為連續函數, 且存在連續函數 $g, h : Y \to X$ 分別滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$. 試證明 f 為 homotopy equivalence function.

前面我們提過拓樸空間的 connected, compact 以及 Hausdorff 的性質是會在 homeomorphic 之下保持的 (這樣的性質稱為 *topological invariant*). 接下來我們想問這三種性質是否會在 homotopic equivalent 之下保持 (若可以保持, 則稱為 *homotopic invariant*). 也就是說若 $X \simeq Y$ 且 X 是 connected 是否可得 Y 是 connected? 同樣的若 X 是 compact, 是否 Y 會是 compact? 又若 X 是 Hausdorff, Y 也會是 Hausdorff 嗎?

事實上 connected 的性質是 homotopic invariant. 我們有以下的結果.

Proposition 4.3.3. *假設 X, Y 為 homotopic equivalent. 則 X 是 connected 若且唯若 Y 是 connected.*

Proof. 由於 homotopic equivalent 是 equivalence relation 故為 symmetric, 因此我們只要證明, 若 X 為 connected 則 Y 為 connected 即可. 依假設, 我們有連續函數 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ 和 $F: Y \times I \to Y$ 滿足 $F(y,0) = f \circ g(y)$ 以及 $F(y,1) = y$, $\forall y \in Y$.

現運用反證法, 假設 Y 為 disconnected, 亦即存在 Y 的非空 open set U, V 滿足 $Y = U \cup V$ 以及 $U \cap V = \emptyset$. 由於 $f: X \to Y$ 為 continuous 且 X 為 connected, 故 $f(Y)$ 為 connected (Corollary 3.1.7), 不失一般性我們假設 $f(X) \subseteq U$, 故有 $F(y,0) = f(g(y)) \subseteq U$, $\forall y \in Y$. 現固定任一 $b \in V$ (因 V 非空) 考慮連續函數 $h: I \to Y$ 定義為 $h(t) = F(b,t)$, $\forall t \in I$. 因為 I 為 connected, $h(I)$ 必為 connected, 也因此 $h(I) \subseteq U$ 或 $h(I) \subseteq V$. 注意由於 $U \cap V = \emptyset$, $h(I) \subseteq U$ 或 $h(I) \subseteq V$ 其中只有一項會成立. 假設 $h(I) \subseteq U$, 這與 $h(1) = F(b,1) = b \in V$ 相矛盾. 而 $h(I) \subseteq V$ 又與 $h(0) = F(b,0) = f(g(b)) \in U$ 相矛盾, 得證 Y 為 connected. □

Question 4.18. Path connected 的性質是否是 homotopic invariant? 就是說若 $X \simeq Y$ 且 X 為 path connected 是否可得 Y 也是 path connected?

至於 compact 和 Hausdorff 的性質都不是 homotopic invariant. 例如用 $\mathbb{R}$ 的 standard topology, 閉區間 $[0,1]$ 和開區間 $(0,1)$ 一個是 compact, 另一個不是 compact, 但兩者都是 contractible space, 由 Question 4.14, 可得它們為 homotopic equivalent. 而考慮 $\mathbb{R}$ 的 standard topology, 它是 Hausdorff, 而有兩個元素的 indiscrete topological space 不是 Hausdorff, 但他們都是 contractible space, 因此仍為 homotopic equivalent.

要判斷兩個空間是否為 homotopic equivalent 仍不是容易的事. 當然了, 由 Proposition 4.3.3, 我們知道若 X 是 connected, Y 是 disconnected, 則 X, Y 不可能是 homotopic equivalent. 不過一般情況, 就需要更多的理論來處理. 例如 S^1 它雖然和 $I = [0,1]$ 一樣是 connected, compact 以及 Hausdorff, 但它就不像 I 一樣是 contractible. 也因此 S^1 和 I 並不是 homotopic equivalent. 下一章我們將學習新的理論, 來處理這個問題.

Chapter 5

Fundamental Groups

為了要克服探討兩空間是否為 homotopic equivalent 的困難, 這一章中我們將介紹 fundamental group 的概念. 經由判斷這些 groups, 我們多了一個工具可以區分開那些拓樸空間不會是 homotopic equivalent. 當然了, 在一般情況, 要計算 fundamental group 也不是容易的事. 我們將探討 S^1 的 fundamental group, 作為初步的介紹.

5.1. Fundamental group of a pointed topological space

我們曾經對一個 topological space 上的 paths 利用 homotopic with end points fixed 的方法分類. 在此分類之下我們可以定義運算將一個終點和另一個起點相同的兩個 paths 連結起來. 這樣的運算符合了一些如結合律等重要的運算. 不過這不足給予這些 paths 好的代數結構. 因為一個好的代數結構必須所有元素之間皆能運算. 因此我們必須限制所考慮的 paths. 在適當的限制之下, 這些 paths 形成了一個 group. 這節中我們將探討如何得到這一個 group 及其一般的性質.

前面提及要有好的代數結構, 必須每個元素相互之間能夠運算. 特別的是, 自己和自己也要能運算. 因此若 $\sigma : I \to X$ 是 X 上的一個 path, 要 $\sigma * \sigma$ 有定義, 依定義必須是 σ 的終點 $\sigma(1)$ 需等於 σ 的起點 $\sigma(0)$, 亦即 $\sigma(0) = \sigma(1)$. 現若 $\tau : I \to X$ 是另一個 path, 要 τ 和 σ 以及 τ 本身能運算, 當然也需要 $\tau(0) = \tau(1) = \sigma(0)$. 因此固定 X 上的一點 $x_0 \in X$, 我們要考慮的是 X 上所有從 x_0 到 x_0 的 paths. 注意由於我們考慮的 homotopy function $F : I \to I \to X$, 是固定端點的, 所以對任意 $t \in I$, F 在 t 所定義出的 path F_t 的起點和終點皆為 x_0. 換言之, 如果我們考慮 X 上起點和終點皆為 x_0 的 paths, 那麼 $\simeq_{\{0,1\}}$ 仍然定義出這些 paths 之間的 equivalence relation.

這裡由於 x_0 是固定的, 為了強調這一點並區分固定另一點的情況, 我們特別用 (X, x_0) 來表示我們探討的是拓樸空間 X 上固定其上一點 x_0 的情況, 並稱之為一個 *pointed topological space*. 注意 (X, x_0) 的拓樸和 X 的拓樸是一樣的, 我們只是用它來強調我們探討的是固定某一點 x_0 的情況. 而對於 X 上起點和終點皆為 x_0 的 path, 我們便稱之為 (X, x_0) 上的一個 *loop*.

現考慮 homotopic with end point fixed 這樣的 equivalence relation $\simeq_{\{0,1\}}$ 的分類, 由於所有同類的 path 都有相同的起點和相同的端點, 所以和 (X,x_0) 的一個 loop 同類的 path 也會是 (X,x_0) 的 loop, 因此 $\simeq_{\{0,1\}}$ 也會是 (X,x_0) 上的 loops 的一個 equivalence relation. 將 (X,x_0) 上的 loops 用 $\simeq_{\{0,1\}}$ 分類後所得的 equivalence classes 所成的集合用 $\pi_1(X,x_0)$ 來表示.

接下來我們考慮前面所提在 X 上的連接兩個 paths 的運算, 限制在 (X,x_0) 上的 loops 的情況, 也就是說若 σ,τ 為 (X,x_0) 的 loops, 我們有 $\sigma*\tau$ 定義為

$$\sigma*\tau(t)=\begin{cases}\sigma(2t), & 0\le t\le 1/2;\\ \tau(2t-1), & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

我們已知 $\sigma*\tau$ 會是 X 上的 path (因 $\sigma(1)=\tau(0)=x_0$), 再加上 $\sigma*\tau(0)=\sigma(0)=x_0$, $\sigma*\tau(1)=\tau(1)=x_0$, 得 $\sigma*\tau$ 也是 (X,x_0) 上的 loop. 又若 σ',τ' 亦為 (X,x_0) 的 loops 滿足 $\sigma\simeq_{\{0,1\}}\sigma'$ 且 $\tau\simeq_{\{0,1\}}\tau'$, 則 Proposition 4.1.10 告訴我們 $\sigma*\tau\simeq_{\{0,1\}}\sigma'*\tau'$, 因此 $*$ 真正給了我們一個在 $\pi_1(X,x_0)$ 上的運算. 接下來我們要說明這個運算賦予 $\pi_1(X,x_0)$ 一個 group structure. 也就是說 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $*$ 這個運算之下是一個 group.

前面已經知道對任兩個 $\pi_1(X,x_0)$ 的元素 $\overline{\sigma},\overline{\tau}$ (這裡我們用 $\overline{\sigma}$ 表示和 σ 同類所成的 equivalence class), $\sigma*\tau$ 皆有定義, 且定義 $\overline{\sigma}*\overline{\tau}=\overline{\sigma*\tau}$ 是 well-defined. 又 Lemma 4.1.11 告訴我們, 若 σ,τ,γ 為 (X,x_0) 上的 loops, 則 $(\sigma*\tau)*\gamma\simeq_{\{0,1\}}\sigma*(\tau*\gamma)$, 亦即

$$(\overline{\sigma}*\overline{\tau})*\overline{\gamma}=\overline{\sigma*\tau}*\overline{\gamma}=\overline{(\sigma*\tau)*\gamma}=\overline{\sigma*(\tau*\gamma)}==\overline{\sigma}*\overline{\tau*\gamma}=\overline{\sigma}*(\overline{\tau}*\overline{\gamma}).$$

也就是說 $*$ 符合結合律 (associative law). 甚麼會是 $\pi_1(X,x_0)$ 的 identity 呢? 考慮 c 為 constant path $c(t)=x_0$, $\forall t\in I$. 對任意 (X,x_0) 上的 loop σ, 我們有 $\sigma*c\simeq_{\{0,1\}}\sigma$ 且 $c*\sigma\simeq_{\{0,1\}}\sigma$ (參見 Question 4.6), 故知 $\overline{c}*\overline{\sigma}=\overline{\sigma}=\overline{\sigma}*\overline{c}$, 也就是說 $\overline{c}$ 就是 $\pi_1(X,x_0)$ 上的 identity.

有了 identity 我們自然會問對任意元素其 inverse 是否存在? 若 σ 是 (X,x_0) 上的 loop, 我們定義 $\sigma^{-1}(t)=\sigma(1-t)$, $\forall t\in I$ (注意 σ^{-1} 不是 σ 的反函數). 由於 $\sigma^{-1}:I\to X$ 仍為 continuous 且 $\sigma^{-1}(0)=\sigma(1)=x_0$ 以及 $\sigma^{-1}(1)=\sigma(0)=x_0$, 我們得 σ^{-1} 也是 (X,x_0) 上的 loop. 現考慮 $F:I\times I\to X$ 其定義為

$$F(s,t)=\begin{cases}\sigma(2s), & 0\le s\le t/2;\\ \sigma(t) & t/2\le s\le 1-(t/2);\\ \sigma^{-1}(2s-1), & 1-(t/2)\le s\le 1.\end{cases}$$

依照 Lemma 4.1.3, 我們檢查交接處, 即 $s=t/2$ 以及 $s=1-(t/2)$, 因 $\sigma(2(t/2)=\sigma(t)$ 且 $\sigma^{-1}(2(1-(t/2)-1))=\sigma^{-1}(1-t)=\sigma(t)$, 得知 $F(s,t)$ 為連續函數. 又 $F(s,0)=\sigma(0)=x_0=c(s)$, $F(s,1)=\sigma*\sigma^{-1}(s)$ 以及 $F(0,t)=\sigma(0)=x_0$, $F(1,t)=\sigma^{-1}(1)=\sigma(0)=x_0$, 我們得 $\sigma*\sigma^{-1}\simeq_{\{0,1\}}c$. 同理可得 $\sigma^{-1}*\sigma\simeq_{\{0,1\}}c$. 換言之, 我們證得了 $\overline{\sigma}$ 的 inverse 為 $\overline{\sigma^{-1}}$. 也就是說若用 $(\overline{\sigma})^{-1}$ 來表示 $\overline{\sigma}$ 的 inverse, 我們有 $(\overline{\sigma})^{-1}=\overline{\sigma^{-1}}$. 我們證得了 $\pi_1(X,x_0)$ 在 $*$ 的運算之下, 是一個 group. 不過要注意, $\pi_1(X,x_0)$ 未必是 abelian group. 我們稱 $\pi_1(X,x_0)$ 是 pointed topological space (X,x_0) 的 *fundamental group*.

要注意若 $x_1 \in X$ 是 X 上與 x_0 相異的一點, (X,x_1) 的 fundamental group 基本上是和 (X,x_0) 的 fundamental group 不同 (因為一個是起點終點皆為 x_1 的 loop, 另一個是起點終點皆為 x_0 的 loop 它們元素的組成份子不同). 不過在談論代數結構時, 我們一般不關心集合上的差異, 而是注重其結構. 也就是說, 我們會關心的是這兩個 fundamental group 是否為 isomorphic. 回顧一下, 當 G,G' 為兩個 group, 若 $h: G \to G'$ 為 group homomorphism (即 G 到 G' 的函數滿足 $h(ab) = h(a)h(b)$, $\forall a,b \in G$) 滿足 h 為一對一且映成, 則稱 h 為一個 *group isomorphism*, 且稱 G,G' 為 *isomorphic*. 底下我們探討當有一個 X 的 path 可連結 x_0,x_1 兩點時, $\pi_1(X,x_0)$ 和 $\pi_1(X,x_1)$ 是 isomorphic.

要說兩個 group 是 isomorphic 一般來說會先建造一個 group homomorphism, 然後在說明它是一對一且映成的. 我們要利用存在一個 X 上的 path θ 滿足 $\theta(0) = x_0$, $\theta(1) = x_1$ 來造出 $\pi_1(X,x_0)$ 和 $\pi_1(X,x_1)$ 之間的 homomorphism. 首先, 若 σ 是 (X,x_0) 上的 loop, 考慮 $\tau = (\theta^{-1} * \sigma) * \theta$. 由於 $\theta^{-1}(t) = \theta(1-t)$, 我們有 $\tau(0) = \theta^{-1}(0) = \theta(1) = x_1$ 且 $\tau(1) = \theta(1) = x_1$. 所以 τ 是 (X,x_1) 上的 loop. 又若 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \sigma'$, 則由 Proposition 4.1.10, 我們知 $(\theta^{-1}*\sigma)*\theta \simeq_{\{0,1\}} (\theta^{-1}*\sigma')*\theta$. 因此 $\overline{\sigma} \mapsto \overline{(\theta^{-1}*\sigma)*\theta}$ 定義了一個從 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(X,x_1)$ 的 *well-defined* function. 為了方便起見, 我們將這個函數記為 $\theta_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$.

接下來, 我們要證明 θ_* 是一個 group homomorphism, 亦即對任意 (X,x_0) 上的 loops σ,τ, 我們要證明 $\theta_*(\overline{\sigma}*\overline{\tau}) = \theta_*(\overline{\sigma})*\theta_*(\overline{\tau})$. 依定義, 這就是要證明

$$(\theta^{-1}*(\sigma*\tau))*\theta \simeq_{\{0,1\}} ((\theta^{-1}*\sigma)*\theta)*((\theta^{-1}*\tau)*\theta). \tag{5.1}$$

然而由 Lemma 4.1.11, 我們知 $*$ 這個運算在 $\simeq_{\{0,1\}}$ 這個 equivalence relation 之下是有結合律的, 亦即 $((\theta^{-1}*\sigma)*\theta)*((\theta^{-1}*\tau)*\theta) \simeq_{\{0,1\}} ((\theta^{-1}*\sigma)*(\theta*\theta^{-1})*(\tau*\theta)$. 當 σ 是 (X,x_0) 的 loop 時, 我們曾證明了 σ^{-1} 會滿足 $\sigma^{-1}*\sigma \simeq_{\{0,1\}} c \simeq_{\{0,1\}} \sigma*\sigma^{-1}$, 其中 c 是固定 x_0 的 constant. 同樣的方法, 我們也可證得 $\theta*\theta^{-1} \simeq_{\{0,1\}} c$ (這裡 c 仍為固定 $\theta(0) = x_0$ 的 constant). 又由於 $\sigma * c \simeq_{\{0,1\}} \sigma$, 再利用結合律, 我們證得了式子 (5.1) 成立, 亦即 θ_* 是一個 group homomorphism.

既然 θ_* 是 group homomorphism, 我們只要檢查 θ_* 的 kernel 是否為 identity, 就可知 θ_* 是否為一對一. 事實上假設 σ 為 (X,x_0) 上的 loop 滿足 $\theta_*(\sigma) \simeq_{\{0,1\}} c'$, 其中 c' 為固定 x_1 的 constant (亦即 $\overline{c'}$ 是 $\pi_1(X,x_1)$ 的 identity). 這表示 $(\theta^{-1}*\sigma)*\theta) \simeq_{\{0,1\}} c'$. 再用一次結合律以及 $\theta*\theta' \simeq_{\{0,1\}} c$, $\theta^{-1}*\theta \simeq_{\{0,1\}} c'$, 我們得 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} (\theta*c')*\theta^{-1}$. 最後由 $\theta*c' \simeq_{\{0,1\}} \theta$ 得 $(\theta*c')*\theta^{-1} \simeq_{\{0,1\}} \theta*\theta^{-1} \simeq_{\{0,1\}} c$, 我們證得了 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} c$, 亦即 $\overline{\sigma}$ 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的 identity, 所以 θ_* 是 one-to-one. 至於證明 θ_* 是映成, 對任意 τ 為 (X,x_1) 的 loop, 我們有 $\sigma = (\theta*\tau)*\theta^{-1}$ 是 (X,x_0) 的 loop. 如前面的方法, 我們知 $(\theta^{-1}*\sigma)*\theta \simeq_{\{0,1\}} \tau$, 也就是說 $\theta_*(\overline{\sigma}) = \overline{\tau}$. 證明了 θ_* 是 onto. 我們證明了下面的定理.

Theorem 5.1.1. *假設 x_0,x_1 為拓樸空間 X 上兩點. 若存在 X 上的 path θ, 滿足 $\theta(0) = x_0, \theta(1) = x_1$. 則 $\pi_1(X,x_0)$ 與 $\pi_1(X,x_1)$ 是 isomorphic groups. 事實上考慮 $\theta_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$, 定義為 $\theta_*(\overline{\sigma}) = \overline{(\theta^{-1}*\sigma)*\theta}$, 則 θ_* 是一個 group isomorphism.*

回顧一下, 若拓樸空間 X 任兩點皆可找到 X 上的 path 將之相連, 則稱 X 是 path connected. Theorem 5.1.1 告訴我們對 X 上任兩點 x_0, x_1 其 fundamental groups $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 是 isomorphic, 亦即它們的代數結構是一樣的, 和所取的點無關. 因此在此情形之下我們就不必用 pointed topological space, 直接用 $\pi_1(X)$ 來表示這個 fundamental group, 並稱之為 X 的 fundamental group.

當 X 是 contractible 時, 我們知道它是 path connected. 單位圓 S^1 也是 path connected. 以後我們會談論這兩種特別的拓樸空間它們的 fundamental group.

5.2. Induced Homomorphism

在前一節中, 我們看到了一個拓樸空間的 path 可以幫助我們得到一個在這個 path 的起點與終點的兩個 fundamental groups 之間的 group homomorphism. 這一節中, 我們將利用兩個拓樸空間之間的連續函數, 產生這兩個空間的 fundamental groups 之間的 group homomorphism.

假設 X, Y 為 topological space 且 $f : X \to Y$ 為連續函數. 由於一般情形 fundamental group 是對 pointed topological space 所定義, 因此給定 $x_0 \in X$, 我們要考慮的是 $(X, x_0), (Y, f(x_0))$ 這兩個 pointed topological spaces. 現若 σ 是 (X, x_0) 上的 loop, 很自然的我們會考慮合成函數 $f \circ \sigma : I \to Y$. 由於 $f \circ \sigma$ 為連續函數我們知 $f \circ \sigma$ 是 X 上的 path. 為了方便起見令 $\tau = f \circ \sigma$. 由於 $\tau(0) = f(\sigma(0)) = f(x_0)$ 以及 $\tau(1) = f(\sigma(1)) = f(x_0)$, 我們得到 τ 是 $(Y, f(x_0))$ 上的 loop. 因此 $f : X \to Y$ 幫助我們得到了一個從 (X, x_0) 上的 loops 到 $(Y, f(x_0))$ 上的 loops 之間的函數. 這個函數能否幫助我們定義一個從 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(Y, f(x_0))$ 的函數呢? 也就是說它能保持 homotopic equivalence 的關係嗎?

現若 σ, σ' 為 (X, x_0) 上的 loops 滿足 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \sigma'$, 我們要知道 $f \circ \sigma, f \circ \sigma'$ 看成 $(Y, f(x_0))$ 上的 loops, 是否可得 $f \circ \sigma \simeq_{\{0,1\}} f \circ \sigma'$. 由於存在連續函數 $F : I \times I \to X$ 滿足 $F_0 = \sigma$, $F_1 = \sigma'$ 以及 $F(0, t) = F(1, t) = x_0$, $\forall\, t \in I$, 我們考慮 $G : I \times I \to Y$, 定義為 $G(s, t) = f(F(s, t))$. 很自然的, G 是連續函數且滿足 $G(s, 0) = f(F(s, 0)) = f(\sigma(s))$, $\forall\, s \in I$, 我們有 $G_0 = f \circ \sigma$. 同理得 $G_1 = f \circ \sigma'$. 又 $G(0, t) = f(F(0, t)) = f(x_0) = f(F(1, t)) = G(1, t)$, $\forall\, t \in I$, 我們得 $f \circ \sigma \simeq_{\{0,1\}} f \circ \sigma'$. 因此知 f 可幫我們定義出一個從 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(Y, f(x_0))$ 的 well-defined function. 為了方便起見我們用 f_* 來表示這個函數, 也就是說 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 的定義為 $f_*(\overline{\sigma}) = \overline{f \circ \sigma}$. 接下來我們要說明的是 f_* 確為 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(Y, f(x_0))$ 的 group homomorphism.

對於任意 (X, x_0) 上的 loops σ, τ, 我們要證明 $f_*(\overline{\sigma} * \overline{\tau}) = f_*(\overline{\sigma}) * f_*(\overline{\tau})$. 左式依定義 $f_*(\overline{\sigma} * \overline{\tau}) = f_*(\overline{\sigma * \tau}) = \overline{f \circ (\sigma * \tau)}$ 所以它代表的是 $(Y, f(x_0))$ 上的 loop $f \circ (\sigma * \tau)$ 所在的 equivalence class. 同理右式代表的是 $(f \circ \sigma) * (f \circ \tau)$ 所在的 equivalence class. 因此我們要證明的是

$$f \circ (\sigma * \tau) \simeq_{\{0,1\}} (f \circ \sigma) * (f \circ \tau).$$

依定義

$$\sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \le t \le 1/2; \\ \tau(2t - 1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

所以

$$f\circ(\sigma*\tau)(t)=f(\sigma*\tau(t))=\begin{cases} f(\sigma(2t)), & 0\le t\le 1/2;\\ f(\tau(2t-1)), & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

又

$$(f\circ\sigma)*(f\circ\tau)(t)=\begin{cases} f\circ\sigma(2t), & 0\le t\le 1/2;\\ f\circ\tau(2t-1), & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

我們得 $f\circ(\sigma*\tau)=(f\circ\sigma)*(f\circ\tau)$, 所以 $f\circ(\sigma*\tau)\simeq_{\{0,1\}}(f\circ\sigma)*(f\circ\tau)$ 當然成立. 我們將前面結論寫成以下定理.

Theorem 5.2.1. 假設 X, Y 為 *topological spaces* 且 $f : X\to Y$ 為連續函數. 固定 X 上一點 x_0, 考慮 $f_*:\pi_1(X,x_))\to\pi_1(Y,f(x_0))$ 定義為對任意 (X,x_0) 上的 *loop* σ, $f_*(\overline{\sigma})=\overline{f\circ\sigma}$. 則 f_* 是一個 *group homomorphism.*

Question 5.1. 考慮 topological spaces X, Y, Z. 若 $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$ 為連續函數, 則對於 $x_0\in X$, $(g\circ f)_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Z,g(f(x_0)))$ 和 $g_*\circ f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Z,g(f(x_0)))$ 這兩個 group homomorphisms 是否相同?

既然一個連續函數 $f : X\to Y$ 可定義出 group homomorphism $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$, 現若 $g : X\to Y$ 是一個滿足 $f\simeq g$ 的連續函數, 接下來我們關心的是 $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$ 和 $g_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,g(x_0))$ 這兩個 group homomorphism 會有甚麼關係. 首先注意, 若 σ 為 (X,x_0) 上的 loop, 則 $f_*(\overline{\sigma})=\overline{f\circ\sigma}$, $g_*(\overline{\sigma})=\overline{g\circ\sigma}$. 所以我們關心的是 $f\circ\sigma$ 這一個 $(Y,f(x_0))$ 上的 loop 和 $g\circ\sigma$ 這一個 $(Y,g(x_0))$ 上的 loop 的關係. 由於我們可以將 $\sigma : I\to X$ 視為 I 到 X 的連續函數, 因此 $f\circ\sigma, g\circ\sigma$ 皆為 I 到 Y 的連續函數. 從連續函數的 homotopic equivalence 來看, Proposition 4.2.5 告訴我們若 $f\simeq g$, 則 $f\circ\sigma\simeq g\circ\sigma$. 不過這裡我們談的是 fundamental groups, 要將 $f\circ\sigma$ 和 $g\circ\sigma$ 分別視為 $(Y,f(x_0))$ 和 $(Y,g(x_0))$ 上的 loop, 且考慮的 homotopic equivalence 是要固定端點的, 因此 $f\circ\sigma\simeq g\circ\sigma$ 不是我們所關心的關係. 我們關心的是 $\overline{f\circ\sigma}$ 和 $\overline{g\circ\sigma}$ 分別視為 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 和 $\pi_1(Y,g(x_0))$ 這兩個 groups 的元素的關係.

要如何找到 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 和 $\pi_1(Y,g(x_0))$ 這兩個 groups 之間的關係呢? 回顧前面 Theorem 5.1.1 告訴我們如果 Y 上有一個 path 可以連接 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$, 那麼就可得到它們是 isomorphic. 現因假設 $f\simeq g$, 亦即存在連續函數 $F : X\times I\to Y$ 滿足 $F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x)$, $\forall\, x\in X$. 我們考慮 $\theta : I\to Y$ 定義為 $\theta(t)=F(x_0,t)$, $\forall\, t\in I$. 因為 θ 是連續函數, 我們知道 θ 是 Y 上的 path, 又因為 $\theta(0)=F(x_0,0)=f(x_0)$ 且 $\theta(1)=F(x_0,1)=g(x_0)$, 我們得到 θ 為 X 上連接 $f(x_0)$ 和 $g(x_0)$ 這兩點的 path. 因此由 Theorem 5.1.1 得到 $\theta_*:\pi_1(Y,f(x_0))\to\pi_1(Y,g(x_0))$ (定義為 $\theta_*(\overline{\sigma})=\overline{(\theta^{-1}*\sigma)*\theta}$), 是一個 group isomorphism.

既然 θ_* 幫助我們找到 $\pi_1(Y,f(x_0)),\pi_1(Y,g(x_0))$ 之間的關係, 若 σ 是 (X,x_0) 上的 loos, 我們自然會問在 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 上的元素 $f_*(\overline{\sigma})=\overline{f\circ\sigma}$ 經由 θ_* 後所得

$$\theta_*(f_*(\overline{\sigma}))=\theta_*(\overline{f\circ\sigma})=\overline{(\theta^{-1}*(f\circ\sigma))*\theta}$$

和 $g_*(\overline{\sigma})=\overline{g\circ\sigma}$ 這兩個 $\pi_1(Y,g(x_0))$ 上的元素之間的關係. 事實上它們是相等的, 也就是說 $\theta_*(f_*(\overline{\sigma}))=g_*(\overline{\sigma})$. 要證明這一點, 就等同於證明 $(\theta^{-1}*(f\circ\sigma))*\theta\simeq_{\{0,1\}} g\circ\sigma$. 我們考慮連

續函數 $G : I\times I \to Y$ 定義為

$$G(s,t)=\begin{cases} g(x_0), & 0\le s\le t/4;\\ \theta(1+t-4s), & t/4\le s\le 1/4;\\ F(\sigma(4s-1),t) & 1/4\le s\le 1/2;\\ \theta(2s+t-1), & 1/2\le s\le 1-(t/2);\\ g(x_0), & 1-(t/2)\le s\le 1.\end{cases}$$

要說明 G 是連續函數, 依照 Lemma 4.1.3, 我們檢查交接處, 當 $s=t/4$, $\theta(1+t-4s)=\theta(1)=g(x_0)$; 當 $s=1/4$, $\theta(1+t-4s)=\theta(t)$, 而 $F(\sigma(4s-1),t)=F(\sigma(0),t)=F(x_0,t)=\theta(t)$; 當 $s=1/2$, $F(\sigma(4s-1),t)=F(\sigma(1),t)=F(x_0,t)=\theta(t)$, 而 $\theta(2s+t-1)=\theta(t)$; 最後當 $s=1-(t/2)$, $\theta(2s+t-1)=\theta(1)=g(x_0)$. 這證明了 G 確為連續函數. 再加上 $G(0,t)=G(1,t)=g(x_0)$, $\forall\, t\in I$, 我們知道 G 是將 G_0 變換成 G_1 的固定端點的 homotopy function. 然而甚麼是 G_0 呢? 我們有

$$G_0(s)=G(s,0)=\begin{cases} \theta(1-4s), & 0\le s\le 1/4;\\ F(\sigma(4s-1),0), & 1/4\le s\le 1/2;\\ \theta(2s-1), & 1/2\le s\le 1.\end{cases}$$

由於 F 是 f,g 之間的 homotopy function, 我們有 $F_0=f$, 因此 $F(\sigma(4s-1),0)=f(\sigma(4s-1))$. 也就是說 $G_0=(\theta^{-1}*(f\circ\sigma))*\theta$. 另一方面

$$G_1(s)=G(s,1)=\begin{cases} g(x_0), & 0\le s\le 1/4;\\ F(\sigma(4s-1),1), & 1/4\le s\le 1/2;\\ g(x_0), & 1/2\le s\le 1.\end{cases}$$

由於 $F_1=g$, 我們有 $F(\sigma(4s-1),1)=g(\sigma(4s-1))$. 也就是說 $G_0=(c*(g\circ\sigma))*c$, 其中 c 是 $(X,g(x_0))$ 中的 constant loop. 由於 $G : I\times I\to Y$ 是把端點固定的 homotopy function, 我們得 $(\theta^{-1}*(f\circ\sigma))*\theta\simeq_{\{0,1\}}(c*(g\circ\sigma))*c$. 再加上對任意 $(Y,g(x_0))$ 上的 loop τ, 皆有 $\tau*c\simeq_{\{0,1\}}\tau$ 且 $c*\tau\simeq_{\{0,1\}}\tau$, 因此我們證得了 $(\theta^{-1}*(f\circ\sigma))*\theta\simeq_{\{0,1\}} g\circ\sigma$, 也因此有了以下重要的結果.

Theorem 5.2.2. 假設 X,Y 為 *topological spaces* 且 $f,g : X\to Y$ 為連續函數. 若 $f\simeq g$ 且 $F : X\times I\to Y$ 為連續函數滿足 $F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x)$, $\forall\, x\in X$. 給定 $x_0\in X$, 令 $\theta : I\to Y$ 為 Y 上的 *path* 其定義為 $\theta(t)=F(x_0,t)$, $\forall\, t\in I$. 則 $f_* : \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$, $\theta_* : \pi_1(X,f(x_0))\to\pi_1(Y,g(x_0))$, $g_* : \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,g(x_0))$ 三個 *group homomorphisms* 滿足 $g_*=\theta_*\circ f_*$. 亦即對任意 (X,x_0) 上的 *loop* σ, 皆有

$$\theta_*(f_*(\overline{\sigma}))=\overline{(\theta^{-1}*(f\circ\sigma))*\theta}=\overline{g\circ\sigma}=g_*(\overline{\sigma}).$$

我們常利用以下的 commutative diagram 來說明 Theorem 5.2.2.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "\theta_*"] \\ & \pi_1(Y,g(x_0)) \end{tikzcd}$$

回顧一下, Theorem 5.1.1 告訴我們 θ_* 是一個 isomorphism, 也就是說它是一對一且映成的. 現若 f_* 是一對一且映成, 則由 $g_*=\theta_*\circ f_*$ 可得 g_* 亦為一對一且映成. 反之, 由於

$f_* = \theta_*^{-1} \circ g_*$, 如果 g_* 是一對一且映成, 則 f_* 亦為一對一且映成. 因此我們有以下 Theorem 5.2.2 重要的應用.

Corollary 5.2.3. *假設 X, Y 為 topological spaces 且 $f, g : X \to Y$ 為連續函數滿足 $f \simeq g$. 固定 $x_0 \in X$, 考慮 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$. 則 f_* 為 group isomorphism 若且唯若 g_* 為 group isomorphism.*

當兩拓樸空間 X, Y 為 homotopy equivalent (即 $X \simeq Y$), 表示存在連續函數 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ 滿足 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ 以及 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. 固定 $x_0 \in X$, 由於 $(\mathrm{id}_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是 isomorphism, Corollary 5.2.3 告訴我們 $(g \circ f)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(f(x_0)))$ 是 isomorphism. 由於 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (參見 Question 5.1), 故由 $g_* \circ f_*$ 是一對一, 可得 f_* 是一對一; 或許大家會認為同理, 由 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ 可得 $f_* \circ g_*$ 是 isomorphism, 所以 $f_* \circ g_*$ 是映成, 由此得 f_* 是映成, 因此知 f_* 是 isomorphism. 這個說法是錯誤的, 主要原因是 f_* 是和所選的點 (即 pointed topological space) 有關, 接下來我們便是要將這個觀念釐清.

首先給定 $x_0 \in X$ 後, 依定義 $f : X \to Y$ 所產生的 induced homomorphism 是 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$. 接下來要和 $g : Y \to X$ 合成, 我們要選 Y 中的點當然是選 $f(x_0) \in Y$, 這樣 g_*, f_* 才可以合成. 我們有以下 $(g \circ f)_*$ 的分解圖示.

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \tag{5.2}$$

另一方面對於 $f \circ g : Y \to X$, 我們亦可考慮 $f_* \circ g_*$, 不過問題是開始要選 Y 中哪一點? 也就是說必須選出 $y_0 \in Y$, 我們才可得到 induced homomorphism $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, g(y_0))$, 然後在考慮 $f_* : \pi_1(X, g(y_0)) \to \pi_1(Y, f(g(y_0)))$, 才可以將 f_*, g_* 合成得 $f_* \circ g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, f(g(y_0)))$. 這裡雖然 $f_* \circ g_*$ 會是一對一且映成, 所以 f_* 是映成的, 但這個 f_* 的定義域是 $\pi_1(X, g(y_0))$, 除非我們選的 y_0 滿足 $g(y_0) = x_0$, 否則它和前面 (5.2) 圖示中的 f_* (定義域是 $\pi_1(X, x_0)$) 是不同的函數. 然而雖然 $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, 前面提過這不代表 $g : Y \to X$ 是映成的, 所以不能因而說 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 是映成的. 不過別忘了 (5.2) 圖示中的 g_* 的定義域是 $\pi_1(Y, f(x_0))$, 所以我們可以選 $y_0 = f(x_0)$, 這樣第二個 g_* 便和 (5.2) 圖示中的 g_* 會是同一個函數, 此時要和 f_* 合成, 我們要選 X 中的點當然是選 $g(f(x_0)) \in X$, 這樣 f_*, g_* 才可以合成. 我們有以下 $(f \circ g)_*$ 的分解圖示.

$$\pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, f(g(f(x_0)))) \tag{5.3}$$

此時利用 Corollary 5.2.3 我們知道 (5.2) 中的 $g_* \circ f_*$ 是映成的所以 g_* 是映成的, 而 (5.3) 中的 $f_* \circ g_*$ 是一對一的所以 g_* 是一對一的. 重點是這兩個 g_* 是同一個 group homomorphism, 所以我們知道 (5.2) 中的 g_* 是一個 isomorphism (即一對一且映成), 也因此由 (5.2) 中的 $g_* \circ f_*$ 是一對一且映成, 可推得 (5.2) 中的 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 是一對一且映成 (即 isomorphism). 我們有以下的定理.

Theorem 5.2.4. *假設 X, Y 為 topological space 且 $X \simeq Y$ (即 X, Y 為 homotopy equivalent). 若 $f : X \to Y$ 是 X, Y 之間的 homotopy equivalence function, 則對任意 $x_0 \in X$, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 是一個 group isomorphism.*

Theorem 5.2.4 告訴我們兩個 homotopy equivalent 的 pointed topological space, 它們的 fundamental group 基本上是一樣的. 利用這個結果我們很容易算出 contractible space 的 fundamental group, 事實上它是僅有一個元素的 group (即 identity). 證明就留做習題了.

Question 5.2. 假設 X 是 contractible space. 證明 $\pi_1(X)$ 僅有一個元素 (注意因為 X 是 path connected, 所以我們用 $\pi_1(X)$ 來表示 fundamental group). 並利用此結果證明若 σ, τ 為 X 的 path 滿足 $\sigma(0)=\tau(0)$ 以及 $\sigma(1)=\tau(1)$, 則 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$.

在拓樸學中, 若一個 topological space 是 path connected 且其 fundamental group 僅有一個元素, 則稱此空間為 *simply connected.* 從這裡我們知道 contractible space 是 simply connected.

Question 5.3. 假設 X, Y 為 topological spaces, $x_0 \in X$. 若 $f : X \to Y$ 為一對一的連續函數, 是否 $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 為 monomorphism (一對一的 homomorphism)? 若 $g : X \to Y$ 為映成的連續函數, 是否 $g_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 為 epimorphism (映成的 homomorphism)?

Question 5.4. 假設 X, Y 為 topological spaces. 考慮 product space $X \times Y$ 以及 projection maps $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ (定義為 $\mathrm{pr}_1(x,y) = x$, $\forall (x,y) \in X \times Y$), $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$. 對於 $x_0 \in X, y_0 \in Y$, 考慮函數 $(\mathrm{pr}_1)_* \times (\mathrm{pr}_2)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \to \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$ 定義為 $(\mathrm{pr}_1)_* \times (\mathrm{pr}_2)_*(\overline{\sigma}) = ((\mathrm{pr}_1)_*(\overline{\sigma}), (\mathrm{pr}_2)_*(\overline{\sigma}))$, $\forall \overline{\sigma} \in \pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$. 證明 $(\mathrm{pr}_1)_* \times (\mathrm{pr}_2)_*$ 是一個 group isomorphism.

5.3. Fundamental Group of the Unit Circle

我們知道單位圓 S^1 是 path connected 而且曾經提及它不是 contractible. 在這一節中我們將談論這個課題, 利用計算其 fundamental group 得知 S^1 不是 contractible. 希望這一節的介紹, 大家能初步了解一些計算 fundamental group 的方法, 也能了解到如何利用 fundamental group 探討一些拓樸空間相互的關係.

回顧一下 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, 這裡我們是利用 $\mathbb{R}^2$ 的 standard topology 且將 S^1 視為 $\mathbb{R}^2$ 的 subspace. 我們都知道函數 $\rho : \mathbb{R} \to S^1$ 定義為

$$\rho(x) = (\cos x, \sin x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

是映成的連續函數, 事實上 ρ 也是一個 open mapping (即把 $\mathbb{R}$ 的 open set 送到 S^1 的 open set). ρ 可以幫助大家用將較熟悉的 $\mathbb{R}$ 和 S^1 相連結. 這裡我們稱 $\mathbb{R}$ 是 S^1 的 covering space. 以後若有機會, 我們會更完整的介紹 covering space 的概念. 在這節中, 為了讓大家更快速了解 S^1 的 fundamental group, 我們將 S^1 視為複數 (complex numbers) 平面 $\mathbb{C}$ 上的單位圓. 考慮 $\phi : \mathbb{R} \to S^1$ 定義為

$$\phi(x) = \cos x + i \sin x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

很容易看出 ρ 和 ϕ 基本上是一樣的 (因為 $x+iy \mapsto (x,y)$ 是 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 之間的 homeomorphism), 所以 ϕ 也是映成且連續的 open mapping. 我們考慮 ϕ 的主要原因是它是從 $\mathbb{R}$ 的加法群到

S^1 的乘法群的 group homomorphism (即 $\phi(x+x')=\phi(x)\cdot\phi(x')$). 另一方面 ϕ 將開區間 $(\pi/2,\pi/2)$ 一對一且映成地送至 $\mathbb{C}$ 上的 $S^1\setminus\{-1\}$, 所以我們有 $\psi: S^1\setminus\{-1\}\to(-\pi/2,\pi/2)$ 滿足 $\psi\circ\phi(x)=x$, $\forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$ 以及 $\phi\circ\psi(s)=s$, $\forall s\in S^1\setminus\{-1\}$. 要注意 ψ 仍為連續的 open mapping, 不過它不是 group homomorphism (Why?). ϕ,ψ 這兩個函數可以讓我們很方便證明以下的兩個 Lemma.

Lemma 5.3.1 (Lifting Lemma)**.** *若 σ 是一個 S^1 上以 1 為起點的 path, 則存在一個 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 path σ' 滿足 $\phi\circ\sigma'=\sigma$, 且滿足這些性質的 path 是唯一的.*

Proof. 因為 $\sigma: I\to S^1$ 是連續函數且 I 是 compact, 所以 σ 是 uniformly continuous. 亦即存在 $\delta>0$ 使得當 $|t-t'|<\delta$ 時 $\left|\sigma(t)-\sigma(t')\right|<1$. 特別的, 此時 $\sigma(t)/\sigma(t')\in S^1\setminus\{-1\}$, 否則 $\sigma(t')=-\sigma(t)$ 會造成 $\left|\sigma(t)-\sigma(t')\right|=2\left|\sigma(t)\right|=2$ 的矛盾. 現令 $N\in\mathbb{N}$ 足夠大滿足 $1/N<\delta$, 此時對任意 $t\in I$ 皆滿足 $(kt/N)-((k-1)t/N)=t/N<\delta$. 所以如上所述, $\sigma((kt/N))/\sigma((k-1)t/N)\in S^1\setminus\{-1\}$. 因此我們可以考慮函數 $\sigma': I\to\mathbb{R}$ 定義為

$$\sigma'(t)=\sum_{k=1}^{N}\psi\Big(\frac{\sigma(\frac{k}{N}t)}{\sigma(\frac{k-1}{N}t)}\Big).$$

注意 σ' 是 well-defined 連續函數, 所以 σ' 是 $\mathbb{R}$ 的 path 且滿足 $\sigma'(0)=N\psi(1)=0$. 此時對任意 $t\in I$,

$$\phi(\sigma'(t))=\prod_{k=1}^{N}\phi(\psi\Big(\frac{\sigma(\frac{k}{N}t)}{\sigma(\frac{k-1}{N}t)}\Big))=\prod_{k=1}^{N}\frac{\sigma(\frac{k}{N}t)}{\sigma(\frac{k-1}{N}t)}=\sigma(t).$$

因此證得 $\phi\circ\sigma'=\sigma$.

至於唯一性, 我們考慮 $\mathbb{R}$ 上另一個 path σ'' 滿足 $\phi\circ\sigma''=\sigma$ 以及 $\sigma''(0)=0$. 此時因 $\phi\circ\sigma'=\phi\circ\sigma''$ 我們有

$$\phi\circ(\sigma'-\sigma'')=(\phi\circ\sigma')/(\phi\circ\sigma'')=1.$$

因此對任意 $t\in I$, 我們皆有 $\sigma'(t)-\sigma''(t)\in 2\pi\mathbb{Z}$. 因為 $\sigma'-\sigma'': I\to\mathbb{R}$ 是連續函數且 I 是 connected, 得 $\sigma'-\sigma''$ 是 constant. 因此由 $\sigma'(0)=\sigma''(0)=0$ 知 $\sigma'=\sigma''$, 證得唯一性. □

Question 5.5. 可否將 Lemma 5.3.1 推廣到一般 σ 上的 path, 即起點不是 1 的情況?

Lemma 5.3.1 告訴我們 $\phi:\mathbb{R}\to S^1$ 幫我們 "induced" 從 $\mathbb{R}$ 以 0 為起點的 paths 到 S^1 上以 1 為起點的 paths 之間的一個一對一且映成的對應關係. 不過我們在意的是 homotopic with end points fixed 的 equivalence classes, 所以要探討的是以下的 Lemma.

Lemma 5.3.2 (Covering Homotopy Lemma)**.** *假設 $F: I\times I\to S^1$ 是連續函數且滿足 $F(0,t)=1, F(1,t)=c$, $\forall\, t\in I$, 其中 $c\in S^1$. 則存在唯一的 $F': I\times I\to\mathbb{R}$ 是連續函數且滿足 $\phi\circ F'=F$ 以及 $F'(0,t)=0, F(1,t)=c'$, $\forall\, t\in I$, 其中 $c'\in\mathbb{R}$.*

Proof. 因為 $F: I\times I\to S^1$ 是連續函數且 $I\times I$ 是 compact, 所以 F 是 uniformly continuous. 亦即存在 $\delta>0$ 使得當 $\left|(s,t)-(s',t')\right|<\delta$ (即 $\sqrt{(s-s')^2+(t-t')^2}<\delta$) 時 $\left|F(s,t)-F(s',t')\right|<1$. 同前面的理由, 此時 $F(s,t)/F(s',t')\in S^1\setminus\{-1\}$. 現令 $N\in\mathbb{N}$ 足

夠大滿足 $\sqrt{2}/N < \delta$, 此時對任意 $(s,t) \in I \times I$ 皆滿足 $\left|(k/N)(s,t) - ((k-1)/N)(s,t)\right| = (1/N)\sqrt{s^2+t^2} < \delta$. 所以 $F((k/N)(s,t))/F(((k-1)/N)(s,t)) \in S^1 \setminus \{-1\}$. 因此我們可以考慮函數 $F' : I \times I \to \mathbb{R}$ 定義為

$$F'(s,t) = \sum_{k=1}^{N} \psi\Big(\frac{F(\frac{k}{N}(s,t))}{F(\frac{k-1}{N}(s,t))}\Big).$$

注意 F' 是 well-defined 連續函數滿足對任意 $(s,t) \in I \times I$,

$$\phi(F'(s,t)) = \prod_{k=1}^{N} \phi(\psi\Big(\frac{F(\frac{k}{N}(s,t))}{F(\frac{k-1}{N}(s,t))}\Big)) = \prod_{k=1}^{N} \frac{F(\frac{k}{N}(s,t))}{F(\frac{k-1}{N}(s,t))} = \frac{F(s,t)}{F(0,0)} = F(s,t).$$

因此證得 $\phi \circ F' = F$. 又 $F'(0,t) = N\psi(1) = 0$, 而對任意 $t \in I$, $\phi(F'(1,t)) = F(1,t) = c$, 因此 $F'(\{1\}\times I)$ 亦為 $\mathbb{R}$ 的 discrete subset. 然而因 $\{1\}\times I$ 是 connected, $F'(\{1\}\times I)$ 亦為 $\mathbb{R}$ 的 connected subset, 故得對任意 $t \in I$, $F'(1,t) = F'(1,0)$ 是一個 constant c'.

至於唯一性, 若 $F'' : I \times I \to \mathbb{R}$ 亦滿足 $\phi \circ F'' = F$ 以及 $F''(0,0) = 0$. 此時因

$$\phi \circ (F' - F'') = (\phi \circ F')/(\phi \circ F'') = 1.$$

因此對任意 $(s,t) \in I$, 我們皆有 $F'(s,t) - F''(s,t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. 因為 $F' - F'' : I \times I \to \mathbb{R}$ 是連續函數且 $I \times I$ 是 connected, 得 $F' - F''$ 是 constant. 因此由 $F'(0,0) = F''(0,0) = 0$ 知 $F' = F''$, 證得唯一性. □

特別的, 若 σ, τ 是 S^1 上的 paths 滿足 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$ 且 $\sigma(0) = \tau(0) = 1$, 表示存在連續函數 $F : I \times I \to S^1$ 滿足 $F_0 = \sigma, F_1 = \tau$ 以及 $F(0,t) = \sigma(0) = 1$, $F(1,t) = \sigma(1)$, $\forall t \in I$. 因此利用 Lemma 5.3.2 存在連續函數 $F' : I \times I \to \mathbb{R}$ 滿足 $\phi \circ F' = F$ 且 $F'(0,t) = 0$, $F'(1,t) = c'$, $\forall t \in I$, 其中 $c' \in \mathbb{R}$. 所以, 如果我們令 $F'_0 = \sigma'$ 以及 $F'_1 = \tau'$, 則 σ', τ' 皆為 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 paths 滿足 $\sigma' \simeq_{\{0,1\}} \tau'$ 且 $\phi \circ \sigma' = \phi \circ F'_0 = F_0 = \sigma$, 同理 $\phi \circ \tau' = \tau$. 因此結合 Lemma 5.3.1 我們有以下之結果.

Proposition 5.3.3. 假設 σ, τ 是 S^1 上以 1 為起點的 *paths* 且滿足 $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$, 則存在唯一 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 *paths* σ', τ' 滿足 $\phi \circ \sigma' = \sigma$, $\phi \circ \tau' = \tau$ 且 $\sigma' \simeq_{\{0,1\}} \tau'$.

若我們將 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 paths 和 S^1 上以 1 為起點的 paths 用 $\simeq_{\{0,1\}}$ (即 homotopic with end points fixed) 的方法分類, 則 Proposition 5.3.3 告訴我們 ϕ induced 一個這兩個 equivalence classes 之間一對一且映成的對應關係. 不過要注意當 σ 是 $(S^1,1)$ 上的 loop, Proposition 5.3.3 中的 σ' 未必是 $(\mathbb{R},0)$ 上的 loop, 所以 Proposition 5.3.3 並未說 $\phi : \mathbb{R} \to S^1$ 所得的 induced homomorphism $\phi_* : \pi_1(\mathbb{R},0) \to \pi_1(S^1,1)$, 是 isomorphism. 事實上這是不對的.

Question 5.6. 試描述 $\phi_* : \pi_1(\mathbb{R},0) \to \pi_1(S^1,1)$ 是怎樣的 mapping.

Lemma 5.3.1 可以幫助我們定義一個 $(S^1,1)$ 上的 loop 的 *winding number*. 給定 $(S^1,1)$ 上的 loop σ, 令 σ' 是 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 path 滿足 $\phi \circ \sigma' = \sigma$. 我們定義 σ 的 *winding number* 為 $w(\sigma) = (1/2\pi)\sigma'(1)$. 由於 σ' 的唯一性 (Lemma 5.3.1), 我們知道 winding number

是 well-defined. 又因為 σ 是 $(S^1,1)$ 上的 loop, $\sigma(1)=1$, 因此由 $\phi(\sigma'(1))=\sigma(1)=1$, 我們知 $\sigma'(1)\in 2\pi\mathbb{Z}$, 因此得到 $(S^1,1)$ 上的 loops 其 winding number 一定是整數.

Question 5.7. Winding number 的定義可否推廣到一般 S^1 上的 paths (沒有限定起點, 也不限定是 loop)?

我們可以利用 winding number 定義一個 $\pi_1(S^1,1)$ 到 $\mathbb{Z}$ 的函數. 即 $\chi:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$, 其定義為 $\chi(\overline{\sigma})=w(\sigma)$, $\forall\,\overline{\sigma}\in\pi_1(S^1,1)$. 首先我們必須說明 χ 是 well-defined function. 現若 $\overline{\sigma}=\overline{\tau}$ in $\pi_1(S^1,1)$, 即表示 σ,τ 是 $(S^1,1)$ 的 loops, 且滿足 $\sigma\simeq_{\{0,1\}}\tau$. 此時 Proposition 5.3.3 告訴我們存在唯一 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 paths σ',τ' 滿足 $\phi\circ\sigma'=\sigma,\phi\circ\tau'=\tau$, 而且 $\sigma'\simeq_{\{0,1\}}\tau'$, 亦即 $\sigma'(1)=\tau'(1)$. 因此依 winding number 的定義, 我們有 $w(\sigma)=w(\tau)$, 得證 χ 為 well-defined function.

接下來我們自然會問 $\chi:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$ 是否為 group homomorphism. 注意由於 $0\in\mathbb{Z}$, 這裡 $\mathbb{Z}$ 的群結構指的是 "加法群" (不是 "乘法群"). 對任意 $(S^1,1)$ 上的 loops, σ,τ, 首先利用 Lemma 5.3.1, 我們找到 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 paths σ',τ', 滿足 $\phi\circ\sigma'=\sigma$, $\phi\circ\tau'=\tau$. 此時因 $\sigma(1)=1$, 我們有 $\sigma'(1)=2m\pi$, 其中 $m\in\mathbb{Z}$. 令 τ'' 為 $\mathbb{R}$ 上的 path 其定義為 $\tau''(t)=\tau'(t)+2m\pi$, $\forall\,t\in I$. 此時因 $\tau'(0)=0$, $\sigma'(1)=2m\pi=\tau''(0)$, 所以 $\sigma'*\tau''$ 為 $\mathbb{R}$ 中以 0 為起點的 path 滿足

$$\phi\circ(\sigma'*\tau'')=(\phi\circ\sigma')*(\phi\circ\tau'')=(\phi\circ\sigma')*(\phi\circ\tau')=\sigma*\tau.$$

故依 winding number 的定義得

$$w(\sigma*\tau)=\frac{1}{2\pi}\sigma'*\tau''(1)=\frac{1}{2\pi}(\tau'(1)+2m\pi)=\frac{1}{2\pi}(\tau'(1)+\sigma'(1))=w(\sigma)+w(\tau).$$

得證 χ 為 $\pi_1(S^1,1)$ 到 $\mathbb{Z}$ 的 group homomorphism. 最後證明 χ 為一對一且映成, 故得以下的定理.

Theorem 5.3.4. $\chi:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$ 是一個 *group isomorphism.* 也就是說 S^1 的 *fundamental group* 和加法群 $\mathbb{Z}$ 為 *isomorphic.*

Proof. 我們僅剩證明 χ 是一對一且映成. 現若 $\overline{\sigma}\in\ker(\chi)$, 即 $\chi(\overline{\sigma})=w(\sigma)=0$, 表示存在 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 path σ', 滿足 $\phi\circ\sigma'=\sigma$ 且 $w(\sigma)=(1/2\pi)\sigma'(1)=0$. 亦即 $\sigma'(1)=0$, 也就是說 σ' 是 $(\mathbb{R},0)$ 上的 loop. 由於 $\mathbb{R}$ 是 contractible, 我們知道 $\pi_1(\mathbb{R},0)$ 僅有一個元素, 亦即 $\sigma'\simeq_{\{0,1\}}c_0$, 其中 c_0 是 $\mathbb{R}$ 中固定在 0 的 constant loop. 令 $F':I\times I\to\mathbb{R}$ 為 σ',c_0 的 homotopy function with end points fixed. 則 $\phi\circ F':I\times I\to S^1$ 為 σ,c_1 的 homotopy function with end points fixed, 其中 c_1 為 S^1 中固定在 1 的 constant loop. 因此得 $\sigma\simeq_{\{0,1\}}c_1$, 亦即 $\overline{\sigma}=\overline{c_1}$, 得證 $\ker(\chi)=\{\overline{c_1}\}$, 亦即 χ 為一對一.

至於映成, 對任意 $m\in\mathbb{Z}$, 考慮 $\mathbb{R}$ 上以 0 為起點的 path $\sigma:I\to\mathbb{R}$, 其定義為 $\sigma'(t)=2m\pi t$. 此時令 $\sigma=\phi\circ\sigma'$, 我們得 σ 是 $(S^1,1)$ 上的 loop 且滿足 $\chi(\overline{\sigma})=w(\sigma)=(1/2\pi)\sigma'(1)=m$. 得證 χ 為映成. ◻

Question 5.8. 已知一個 cylinder (圓筒表面) 和 $S^1 \times I$ 是 homeomorphic, 而一個 torus (甜甜圈表面) 和 $S^1 \times S^1$ 是 homeomorphic. 試說明它們的 fundamental group 為何? 又將 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 視為 $\mathbb{R}^2$ 的 subspace, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 的 fundamental group 為何?

了解 S^1 的 fundamental group $\pi_1(S^1)$ 和 $\mathbb{Z}$ 同構, 可以幫助我們了解一些與 S^1 相關的拓樸性質. 例如我們可以知道 S^1 不是 contractible (Why?). 另外一個有趣的應用是 S^1 不是 closed unit disc $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的一個 *retract*. 我們說明一下甚麼是 retract. 假設 X 是 topological space 且 $S \subseteq X$ 是其 subspace. 我們說連續函數 $f : X \to S$ 是一個 *retraction* 如果 $f|_S = \mathrm{id}_S$. 若對於 $S \subseteq X$ 存在 retraction $f : X \to S$, 則稱 S 是 X 的一個 retract.

Corollary 5.3.5. S^1 不是 *closed unit disc* D^2 的一個 *retract.*

Proof. 我們利用反證法. 假設 $f : D^2 \to S^1$ 是 retraction. 若令 $\mathrm{inc} : S^1 \hookrightarrow D^2$, 是 S^1 到 D^2 的 inclusion map (即 $\mathrm{inc}(x) = x \in D^2$, $\forall\, x \in S^1$). 依 retraction 的定義 $f \circ \mathrm{inc} = f|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$. 因此利用 induced homomorphisms, 取 $x_0 = (1,0) \in S^1$, 我們有 $\mathrm{inc}_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(D^2, x_0)$ 以及 $f_* : \pi_1(D^2, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$ 的合成滿足 $f_* \circ \mathrm{inc}_* = (f \circ \mathrm{inc})_* = (\mathrm{id}_{S^1})_*$. 然而 D^2 是 contractible, 故 $\pi_1(D^2, x_0)$ 僅有一個元素, 而 $\pi_1(S^1, x_0)$ 和 $\mathbb{Z}$ 為 isomorphic, 因此 $\mathrm{inc}_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(D^2, x_0)$ 不可能是一對一. 這和 $f_* \circ \mathrm{inc}_* = (\mathrm{id}_{S^1})_*$ 是一對一相矛盾, 故得證本定理. □

Question 5.9. 假設 X 是 contractible topological space 且 $f : X \to S^1$ 是連續函數. 是否存在連續函數 $g : S^1 \to X$ 使得 $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{S^1}$? 又是否存在連續函數 $h : S^1 \to X$ 使得 $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$?

Corollary 5.3.5 一個重要的應用就是 *Brouwer Fixed Point Theorem* for D^2. 這個定理說的是若 $f : D^n \to D^n$ 是連續函數, 其中 D^n 為 $\mathbb{R}^n$ 上的 closed unit disc, 即

$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\},$$

則存在一點 $x_0 \in D^n$ 滿足 $f(x_0) = x_0$ (這樣的 x_0 稱為 f 的 *fixed point*). 這在 $n = 1$, 即 $D^1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ 的情形可以用勘根定理處理. 這裡我們用 Corollary 5.3.5 處理 $n = 2$ 的情形.

假設 $g : D^2 \to D^2$ 是連續函數, 且無 fixed point (即對任意 $x \in D^2$, 皆有 $g(x) \neq x$). 此時對任意 $(x,y) \in D^2$, 考慮由 $g(x,y)$ 出發連接 (x,y) 的射線, 由於 (x,y) 以及 $g(x,y)$ 皆在 D^2, 故此射線必交 S^1 於一點令之為 $f(x,y)$. 因此 f 定義了一個從 D^2 到 S^1 的函數. 由於 g 是連續的, 而 $f(x,y)$ 可由一些代數運算解得, 可以推得 f 是一個連續函數, 而且依定義, 若 $(x,y) \in S^1$, 則 $f(x,y) = (x,y)$, 亦即 $f : D^2 \to S^1$ 是 retraction function. 此與 Corollary 5.3.5 相矛盾, 因此有以下的結果.

Corollary 5.3.6 (Brouwer Fixed Point Theorem for D^2)**.** 假設 $f : D^2 \to D^2$ 是連續函數, 則存在 $(x_0, y_0) \in D^2$ 滿足 $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

至於 Brouwer Fixed Point Theorem 對於 $n > 2$ 的情形, 我們仍可利用 S^{n-1} 不是 D^n 的一個 retract (即 Corollary 5.3.5 的推廣), 然後使用和 Corollary 5.3.6 同樣的方法來證明. 然而 S^{n-1} 不是 D^n 的一個 retract 的證明較困難, 一般可以用 “homology” 的理論處理, 不過這已超出本講義的範圍. 有興趣的同學可以在熟悉 homotopy 的理論後進一步學習 homology 的理論.