Exercise

Chapter 1. Field Extensions

(1) 假設 $\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{Q}(\beta)$, $\mathbb{Q}(\gamma)$ 皆為 $\mathbb{Q}$ 的 simple extensions 其中 α, β, γ 分別滿足 $\alpha^2 - 2 = 0$, $\beta^2 - 3 = 0$ 以及 $\gamma^2 - 4\gamma + 2 = 0$.
 (a) 試證明 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ 不是 isomorphic extensions over $\mathbb{Q}$.
 (b) 試證明 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}(\gamma)/\mathbb{Q}$ 是 isomorphic extensions over $\mathbb{Q}$.
 (c) 若已知 $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, 試證明 $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\gamma)$.

(2) 考慮 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的 subextension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
 (a) 若 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, 試證明 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
 (b) 試證明 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ 並說明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 中的元素都可唯一表示成 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ 的形式, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
 (c) 若 $\alpha = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ 且 a, b, c, d 皆不為 0, 試求 $a', b', c', d' \in \mathbb{Q}$ 使得 $\alpha^{-1} = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6}$.

(3) 若 $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = L$ 是一連串的 field extensions. 試證明 $[L : K] = [K_n : K_{n-1}] \cdots [K_1 : K_0]$ 且證明 L/K 是 finite extension 若且唯若對所有 $1 \leq i \leq n$, K_i/K_{i-1} 皆為 finite extension.

(4) 假設 L/K 是一個 finite extension 且 $p(x) \in K[x]$ 是一個 $K[x]$ 中的 irreducible polynomial. 若已知 $\deg(p(x)) \nmid [L : K]$, 試證明不可能存在 $\alpha \in L$ 使得 $p(\alpha) = 0$.

(5) 令 $\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ 為 algebraic over } \mathbb{Q}\}$.
 (a) 試證明 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 的 subfield.
 (b) 利用 Eisenstein's Criterion 證明對任意的 $n \in \mathbb{N}$ 皆存在 $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 滿足 $\deg(p(x)) = n$ 且 $p(x)$ 是 irreducible in $\mathbb{Q}[x]$. 並依此證明 $[\mathbb{A} : \mathbb{Q}] = \infty$.

(6) 假設 α 是 algebraic over $\mathbb{Q}$ 且 α 滿足 $\alpha^2-3\alpha+1=0$. 試找到 $\beta\in\mathbb{Q}(\alpha)$ 滿足 $\beta^2=\alpha$.

(7) 假設 α 是 transcendental over K, 試證明在 $K(\alpha)$ 中找不到 β 使得 $\beta^2=\alpha$.

(8) 假設 L/K 是一個 field extension 且 $\alpha,\beta\in L$, 其中 α 為 algebraic over K, 而 β 為 transcendental over K. 試證明 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ 以及 $\alpha\beta^{-1}$ 皆 transcendental over K.

(9) 假設 $K\subseteq F\subseteq L$ 且 F/K 是一個 algebraic extension. 已知 $\alpha\in L$, 試證明 α 為 transcendental over K 若且唯若 α 為 transcendental over F.

Chapter 2. Galois Group and Fixed Field

(1) 假設 $\alpha \in \mathbb{R}$ 滿足 $\alpha^5 = 7$, 令 $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. 設 $\mathfrak{F}$ 為 $L/\mathbb{Q}$ 的 intermediate fields 所成集合, 而 $\mathfrak{G}$ 為 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 的 subgroups 所成之集合.
   (a) 試求 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.
   (b) 試求 $\mathfrak{F}$.
   (c) 試求 $\mathfrak{G}$.
   (d) 若令 $\mathcal{G} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$, 使得對任意 $F \in \mathfrak{F}$ 定義 $\mathcal{G}(F) = \mathrm{Gal}(L/F)$. 試問 $\mathcal{G}$ 是否為一對一? 是否為映成?

(2) 令 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. 設 $\mathfrak{F}$ 為 $L/\mathbb{Q}$ 的 intermediate fields 所成集合, 而 $\mathfrak{G}$ 為 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 的 subgroups 所成之集合.
   (a) 試求 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.
   (b) 試求 $\mathfrak{F}$.
   (c) 試求 $\mathfrak{G}$.
   (d) 若令 $\mathcal{G} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$, 使得對任意 $F \in \mathfrak{F}$ 定義 $\mathcal{G}(F) = \mathrm{Gal}(L/F)$. 試問 $\mathcal{G}$ 是否為一對一? 是否為映成?

---

16 October, 2007

(3) 假設 $L/\mathbb{Q}$ 為 field extension. 設 $\mathfrak{F}$ 為 $L/\mathbb{Q}$ 的 intermediate fields 所成集合, 而 $\mathfrak{G}$ 為 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 的 subgroups 所成之集合. 設 $\mathcal{F} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{F}$, 其定義為對任意 $H \in \mathfrak{G}$ 令 $\mathcal{F}(H) = L^H = \{\lambda \in L \mid \sigma(\lambda) = \lambda, \forall \sigma \in H\}$.
   (a) 若 $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 滿足 $\alpha^5 = 7$, 試對每一個 $H \in \mathfrak{G}$ 求出 $\mathcal{F}(H)$ 並說明 $\mathcal{F}$ 是否為一對一? 是否為映成?
   (b) 若 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 試對每一個 $H \in \mathfrak{G}$ 求出 $\mathcal{F}(H)$ 並說明 $\mathcal{F}$ 是否為一對一? 是否為映成?

---

23 October, 2007

(4) 考慮 $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$, 其中 $i\in\mathbb{C}$ 滿足 $i^2=-1$. 設 $\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ 滿足 $\sigma_1(i)=i$ 以及 $\sigma_2(i)=-i$.
   (a) 試說明為何 $\sigma_2(i)=-\sigma_1(i)$, 但 $\sigma_2\neq-\sigma_1$.
   (b) 令 $f=c_1\sigma_1+c_2\sigma_2$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{C}$. 若已知 $f(1)=f(i)=0$, 試證明 $c_1=c_2=0$, 並依此說明 σ_1,σ_2 為 linearly independent over $\mathbb{C}$.

(5) 假設 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 且 $\sigma_{i,j}\in\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 滿足 $\sigma_{ij}(\sqrt{2})=(-1)^i\sqrt{2}$ 且 $\sigma_{i,j}(\sqrt{3})=(-1)^j\sqrt{3}$, 其中 $1\leq i,j\leq 2$.
   (a) 試證明若

$$f=\sum_{1\leq i,j\leq 2}c_{ij}\sigma_{ij} \text{ 且 } f(1)=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{3})=f(\sqrt{6})=0,$$

   則對所有 $1\leq i,j\leq 2$, 皆有 $c_{ij}=0$
   (b) 試證明

$$\det\begin{pmatrix}\sigma_{11}(1) & \sigma_{12}(1) & \sigma_{21}(1) & \sigma_{22}(1)\\ \sigma_{11}(\sqrt{2}) & \sigma_{12}(\sqrt{2}) & \sigma_{21}(\sqrt{2}) & \sigma_{22}(\sqrt{2})\\ \sigma_{11}(\sqrt{3}) & \sigma_{12}(\sqrt{3}) & \sigma_{21}(\sqrt{3}) & \sigma_{22}(\sqrt{3})\\ \sigma_{11}(\sqrt{6}) & \sigma_{12}(\sqrt{6}) & \sigma_{21}(\sqrt{6}) & \sigma_{22}(\sqrt{6})\end{pmatrix}\neq 0$$

(6) 假設 L/K 是一個 finite extension 且 $|\mathrm{Gal}(L/K)|=[L:K]=n$. 令 $\mathrm{Gal}(L/K)=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$ 且 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in L$ 是 L/K 的一組 basis. 試證明

$$\det\begin{pmatrix}\sigma_1(\alpha_1) & \sigma_2(\alpha_1) & \cdots & \sigma_n(\alpha_1)\\ \sigma_1(\alpha_2) & \sigma_2(\alpha_2) & \cdots & \sigma_n(\alpha_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_1(\alpha_n) & \sigma_2(\alpha_n) & \cdots & \sigma_n(\alpha_n)\end{pmatrix}\neq 0.$$

(7) 假設 L/K 是一個 finite extension, F 是 L/K 的一個 intermediate field. 若 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/K)$ 考慮 $\sigma(F)=\{\sigma(\lambda)\mid\lambda\in F\}$.
   (a) 試證明 $\sigma(F)$ 也是 L/K 的 intermediate field.
   (b) 若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 是 F/K 的一組 basis, 試證明 $\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_n)$ 是 $\sigma(F)/K$ 的一組 basis, 並依此說明 $[F:K]=[\sigma(F):K]$.

(8) 假設 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 且 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 滿足 $\sigma(\sqrt{2})=(-1)\sqrt{2}$ 且 $\sigma(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$. 令 $H=\{1,\sigma\}\subseteq\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 已知 $\mathcal{F}(H)=\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, 試利用證明 $|H|=[L:\mathcal{F}(H)]$ 的方法找到 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 不全為 0 且滿足 $c_1+c_2\sqrt{2}+c_3\sqrt{3}=0$.

Chapter 3. Normal Extension 和 Separable Extension

(1) 假設 F/K 是一個 field extension, $f(x)\in K[x]$ 且 L_1,L_2 分別是 $f(x)$ over K 和 $f(x)$ over F 的 splitting field.
   (a) 若 L/K 是一個 field extension 滿足 $L_1\subseteq L$, 試說明 $f(x)$ splits completely in L.
   (b) 若 L/K 是一個 field extension 滿足 $K\subseteq L\subseteq L_1$ 且 $f(x)$ splits completely in L, 試說明 $L=L_1$.
   (c) 若 L/K 是一個 field extension 滿足 $L_1\subseteq L$ 且 $L_2\subseteq L$, 試證明 $L_1\subseteq L_2$.
   (d) 試證明 $L_1=L_2$ 若且唯若 $F\subseteq L_1$.

(2) 假設 K 是一個 field, $f(x)\in K[x]$ 且 L 是 $f(x)$ over K 的 splitting field. 若 $\deg(f(x))=n$, 試證明 $[L:K]\mid n!$.

6 November, 2007

(3) 假設 K 是一個 field 且 $f(x)\in K[x]$. 試利用數學歸納法證明 $f(x)$ over K 的 splitting field 必存在.

(4) 考慮 $f(x)=x^2-3$. 試在 $\mathbb{R}$ 中找到 $f(x)$ over $\mathbb{Q}$ 以及 $f(x)$ over $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的 splitting field.

(5) 令 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 且 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. 考慮 $\sigma\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 滿足 $\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$.
   (a) 試利用 The Fundamental Theorem for Splitting Field 說明存在 $\tau: L\to L$ 是一個 ring isomorphism 且滿足 $\tau\,|_K=\sigma$.
   (b) 利用 The Fundamental Theorem for Splitting Field 的證明方法找到兩相異 τ_1,τ_2 皆為 L 的 automorphism 且 extend σ.
   (c) 是由前面習題求過的 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 來說明所有 extends σ 可能的 L 的 automorphism 僅有兩種.

13 November, 2007

(6) 假設 L/K 是一個 finite extension 且 $\phi : L \to L'$ 是一個 ring isomorphism.
  (a) 試證明 $\phi(K) = \{\phi(k) \mid k \in K\}$ 是 L' 的 subfield.
  (b) 試證明若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ 是 L over K 的一組 basis, 則 $\phi(\alpha_1), \dots, \phi(\alpha_n)$ 是 L' over $\phi(K)$ 的一組 basis, 並依此得 $[L : K] = [L' : \phi(K)]$.

(7) 假設 L/K 是一個 field extension 且 $[L : K] = 2$, 試證明 L/K 是一個 normal extension.

(8) 假設 L/K 是一個 field extension 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ 使得 $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/K$ 是一個 finite normal extension. 現假設 F/K 也是一個 field extension 且 $F \subseteq L$, 試證明 $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/F$ 也是一個 finite normal extension.

---

20 November, 2007

(9) 假設 L/K 是 field extension, $f(x), g(x) \in K[x]$. 試證明 $f(x) \mid g(x)$ in $K[x]$ 若且唯若 $f(x) \mid g(x)$ in $L[x]$.

(10) 假設 L/K 是一個 finite extension 且 $\mathrm{char}K = p$. 假設 L 不是 separable over K, 試證明 $p \mid [L : K]$.

(11) 假設 $L = K(\alpha)$ 是一個 finite extension, $L \subseteq N$ 且 N/K 是一個 normal extension.
  (a) 假設 $\mathrm{char}K = 0$, 試證明 $|\mathfrak{M}_K(L, N)| = [L : K]$.
  (b) 假設 $\mathrm{char}K = p$ 且 $p \nmid [L : K]$, 試證明 $|\mathfrak{M}_K(L, N)| = [L : K]$.
  (c) 假設 $\mathrm{char}K = p$ 且 L/K 不是 separable extension, 試證明

$$|\mathfrak{M}_K(L, N)| \leq \frac{[L : K]}{p}.$$

---

11 December, 2007

Chapter 4. Galois Extension

(1) 判斷並說明下列哪個 filed extension L/K 是 Galois extension.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $L = K(\alpha)$ 其中 α 是 $x^3 - 2 = 0$ 之一根.

(b) $K = \mathbb{Q}(\omega)$, $L = K(\alpha)$ 其中 ω, α 分別是 $x^2 + x + 1 = 0$ 與 $x^3 - 2 = 0$ 之一根.

(c) $K = \mathbb{Q}$, $L = K(\omega, \alpha)$ 其中 ω, α 分別是 $x^2 + x + 1 = 0$ 與 $x^3 - 2 = 0$ 之一根.

(d) $K = \mathbb{F}_3(\gamma)$, $L = K(\beta)$ 其中 γ 是 transcendental over $\mathbb{F}_3$ 且 β 是 $x^3 - \gamma = 0$ 之一根.

(e) $K = \mathbb{F}_3(\gamma)$, $L = K(\lambda)$ 其中 γ 是 transcendental over $\mathbb{F}_3$ 且 λ 是 $x^4 - \gamma = 0$ 之一根.

(f) $K = \mathbb{F}_3(\gamma)(\zeta)$, $L = K(\lambda)$ 其中 γ 是 transcendental over $\mathbb{F}_3$, ζ 是 $x^2 + 1 = 0$ 之一根且 λ 是 $x^4 - \gamma = 0$ 之一根.

(2) 判斷並說明下列哪個 filed extension L/K 是 Galois extension.

(a) K 是一個 field 且 $\mathrm{char} K \neq 2$, $L = K(\alpha)$ 其中 α over K 的 minimal polynomial 之 degree 為 2.

(b) $K = \mathbb{Q}$, $L = K(\beta)$ 其中 β over K 的 minimal polynomial 之 degree 為 3 且有虛根.

(3) 令 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 及 $K=\mathbb{Q}$.

(a) 試證明 L/K 是 Galois extension.

(b) 試找出 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有 subgroups.

(c) 試找出 L/K 所有的 intermediate fields.

(d) 試找出 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有的 normal subgroups.

(e) 試找出所有 L/K 的 intermediate field F 使得 F/K 是 Galois extension.

(4) 令 $L=\mathbb{Q}(\alpha)$ 其中 $\alpha\in\mathbb{C}$ 是 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 之一根且令 $K=\mathbb{Q}$.

(a) 試證明 L/K 是 Galois extension.

(b) 試找出 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有 subgroups.

(c) 試找出 L/K 所有的 intermediate fields.

(d) 試找出 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有的 normal subgroups.

(e) 試找出所有 L/K 的 intermediate field F 使得 F/K 是 Galois extension.

(5) 令 $L=\mathbb{Q}(\beta,\omega)$ 其中 $\beta,\omega\in\mathbb{C}$ 分別是 $x^3-2=0$ 以及 $x^2+x+1=0$ 之一根且令 $K=\mathbb{Q}$.

(a) 試證明 L/K 是 Galois extension.

(b) 試找出 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有 subgroups.

(c) 試找出 L/K 所有的 intermediate fields.

(d) 試找出 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的所有的 normal subgroups.

(e) 試找出所有 L/K 的 intermediate field F 使得 F/K 是 Galois extension.