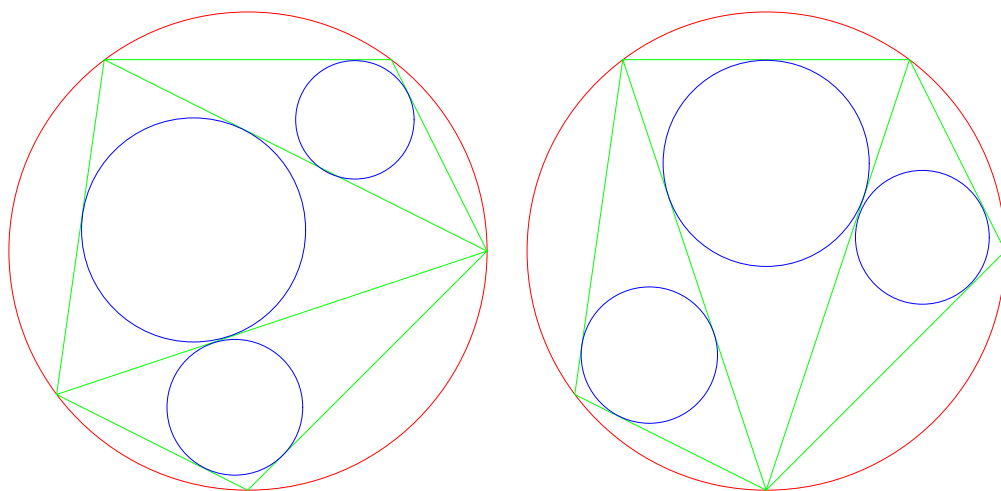


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1 祖壩原理與正投影面積公式

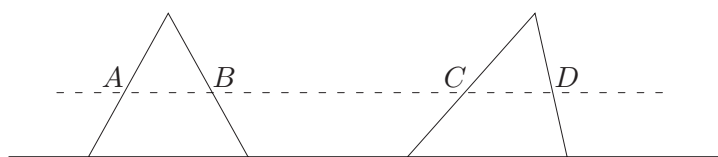
1

1 祖暅原理與正投影面積公式

三國時代的劉徽割圓術就是利用圓內接正多邊形面積來逼近圓周率 π （視圓內接正多邊形面積為圓面積），劉徽注《九章算術》時，從圓內接正六邊形起算，算到正192邊形，這時候 π 的近似值為 3.141024。劉徽並在注中寫下割圓術的精髓“割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。”



在公元五百年初，祖沖之的兒子祖暅，發揮了劉徽割圓的思想，提出了祖暅原理，這個原理成為計算面積與體積的有力工具。在陳述原理之前，我們先以一個具體而簡單的例子做說明：如下圖，兩個底長與高度一樣的三角形。當我們任意的劃一條水平虛線時，利用三角形的比例關係知道：線段 AB 與線段 CD 是等長的。基本上，祖暅原理就是說“具有這樣性質的兩個圖形的面積應該相等”。他的思想源頭就是劉徽的割圓術精髓“割之彌細，所差彌少，割之又割，以至於不可割，則兩圖形的面積相等矣。”。

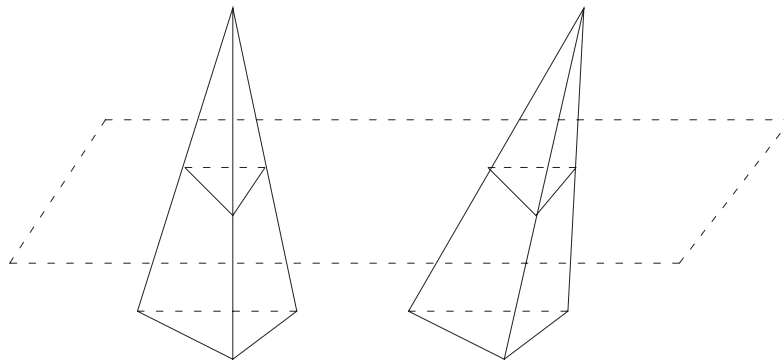


現在將祖暅原理陳述如下：

定理 1.1 (祖暅原理) 底下是四個判斷面積或體積相等的原理。

- (1) 設平面上有兩個圖形。若以某特定斜率的任意直線跟兩圖形相割，割出來的兩線段長總是相等，則此兩圖形的面積也是相等的。
- (2) 設空間中有兩個物體。若以某特定法向量的任意平面跟兩物體相截，截出來的兩塊面積總是相等，則此兩物體的體積也是相等的。

- (3) 設平面上有兩個圖形。若以某特定斜率的任意直線跟兩圖形相割，割出來的兩線段長之比例總是固定的，則此兩圖形的面積比也是同一個比值。
- (4) 設空間中有兩個物體。若以某特定法向量的任意平面跟兩物體相截，截出來的兩塊面積之比例總是固定的，則此兩物體的體積也是同一個比值。



兩個三角錐的底（三角形）全等且等高

上圖是兩個立在地面上的三角錐（它們的底三角形全等且等高，唯傾斜角度不一樣）。由相似的性質可知：任意平行於地面的平面所截出的兩個三角形之面積是一樣的（因為所截的三角形與底三角形之面積比一樣）。根據祖暅原理，這兩個三角錐的體積也是想等的。

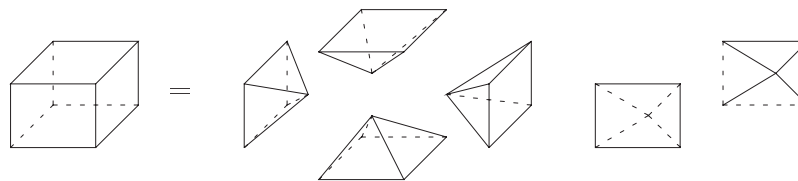
由上圖說明及祖暅原理容易推廣為

例題 1.1 兩個底面積相等且高度一樣的多邊形錐體的體積是一樣的。

例題 1.2 底為四邊形的錐體（或稱四角錐）之體積為

$$\frac{\text{四邊形底面積} \times \text{高}}{3}.$$

【證明】由下圖悟出：



☒

利用四角椎體積公式及祖暅原理

例題 1.3 圓錐體積為

$$\frac{\text{圓面積} \times \text{高}}{3}.$$

【證明】將欲求圓錐立在地上，並在圓錐旁邊立一個底面積跟它一樣，高度相等的四角錐。利用祖暅原理（採取平行於地面的平面來截）知道：這圓錐體積與四角錐體積一樣，套用四角錐體積公式，得證。 ☒

除了祖暅之外，祖暅的父親祖沖之與希臘數學家阿基米得也使用過“物體體積就是同一平行方向薄截面面積之和”的概念來求球體的體積。

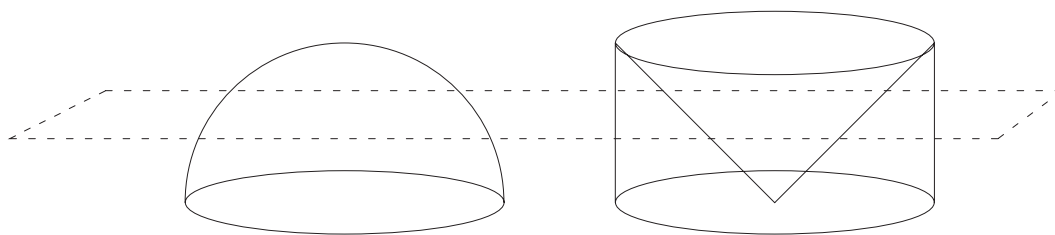
例題 1.4 半徑為 r 的球體體積為

$$\frac{4\pi r^3}{3}.$$

【證明】下圖左圖是一個半徑 r 的半球；右圖是底半徑 r 且高度也是 r 的圓柱，並從上方挖去半徑 r 且高度也是 r 的圓錐之後所構成的物體。他們都立在地平面上，斜線平面與地平面平行且離地面的高度為 h 。這時斜線平面與半球的截面是一個半徑為 $\sqrt{r^2 - h^2}$ 的圓，因此截面積為 $\pi(r^2 - h^2)$ 。另一方面，斜線平面與右圖的截面是一個介於半徑 r 與 h 之間的環形區域，所以截面積為 $\pi(r^2 - h^2)$ 。根據祖暅原理，半球的體積與右圖物體體積一樣。因為右圖物體體積 = 圓柱體積 - 圓錐體積，所以

$$\text{半球體積} = (\pi r^2) \times r - \frac{(\pi r^2) \times r}{3} = \frac{2\pi r^3}{3},$$

得證。



阿基米得與祖沖之求球體體積方法

☒

接下來，我們利用圓面積公式來推導橢圓的面積：

例題 1.5 設 $a > b > 0$ 。證明：橢圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的內部面積為 πab 。

【證明】下圖為圓（半徑為 a ）方程式

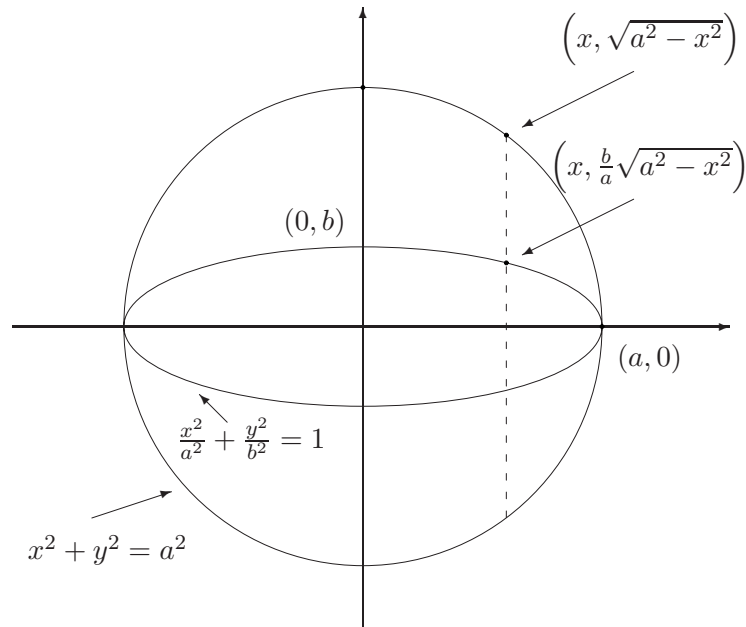
$$x^2 + y^2 = a^2$$

與橢圓（長軸為 a ，短軸為 b ）方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

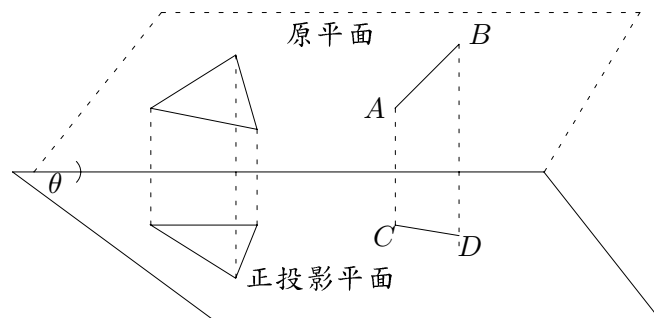
劃在一起的圖形。與 Y 軸相平行的虛線分別與圓及橢圓割出長度為 $2\sqrt{a^2 - x^2}$ 與 $2b\sqrt{a^2 - x^2}/a$ 的線段。根據祖暅原理，橢圓內部面積 = $b/a \times$ 圓面積，所以橢圓內部面積為

$$\frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab.$$



☒

今有夾角為 θ ($0 \leq \theta < \pi/2$) 的兩平面，其中一平面上有一個圖（稱此平面為原平面，此圖為原圖）。現在將原圖上每一個點對另一平面作垂足，這些垂足點所構成的圖形叫原圖在此平面的正投影圖（稱正投影圖所在的平面為正投影平面）。如下圖：左圖是一個三角形與其正投影圖三角形，右圖是線段 AB 與其正投影線段 CD 。值得一提的是：若線段 AB 與兩平面的交線垂直，則由兩平面夾角為 θ 的關係知道：正投影線段 CD 的長度為 $AB \times \cos \theta$ 。



例題 1.6 設原平面與正投影平面的夾角為 θ ($0 \leq \theta < \pi/2$)。若原平面上有一長度為 c 的線段，則其正投影線段長度 $\geq c \cos \theta$ 。

【證明】若此線段與兩平面的交線垂直，則上述說明知道：正投影線段長度為 $c \cos \theta$ 。若此線段與兩平面的交線不垂直，則可以造一個直角三角形 ABC 使得 $AB = c, \angle ACB = 90^\circ$ 且 AC 與兩平面的交線垂直。設三角形 $A'B'C'$ 為三角形 ABC 的正投影三角形。因為 AC 與兩平面的交線垂直，所以 $A'C' = AC \times \cos \theta$ 。因為 BC 與兩平面的交線平行，所以 $B'C' = BC$ 。由正投影三角形 $A'B'C'$ 仍為直角三角形得到

$$A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 = AC^2 \times \cos^2 \theta + BC^2 \geq AB^2 \times \cos^2 \theta.$$

因此 $A'B' \geq c \cos \theta$ 。 ☒

定理 1.2 (正投影面積公式) 設原平面與正投影平面的夾角為 θ ($0 \leq \theta < \pi/2$)。那麼正投影圖的面積為原圖面積的 $\cos \theta$ 倍，即：正投影圖之面積 = 原圖面積 $\times \cos \theta$ 。

【證明】任取一與原平面與正投影平面的交線垂直之平面。若此平面與原圖所割的線段長為 c ，則此平面與正投影圖所割的線段長為 $c \cos \theta$ 。根據祖暅原理得知：正投影圖面積 = 原圖面積 $\times \cos \theta$ 。 ☒

例題 1.7 (牛頓定理) 試證明：

- (1) 設 A, B, C, D 是平面上四個固定點，且 AB 與 CD 不平行。證明：使 $\triangle PAB$ 之面積 + $\triangle PCD$ 之面積和為某固定常數之 P 點的軌跡為一直線或者不存在。
- (2) 證明：圓外切四邊形的兩條對角線之中點連線必通過圓心。

【證明】有關 (1) 的證明：將原圖形經過適當的投影，使 AB, CD 投影後互相垂直。有關 (2) 的證明：利用 (1) 的結果，證明欲求三點共線。 ☒

例題 1.8 空間中有一平面 Γ ，此平面上有一個面積為 S 的三角形。若此三角形在 xy, yz, zx 平面上的正投影圖面積分別為 S_z, S_x, S_y 。請依下列步驟證明等式

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (1.1)$$

- (1) 【立體畢氏定理】設 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ 為空間中的三點且 O 代表原點。試證明： $\triangle ABC^2 = \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2$ 。
- (2) 若平面 Γ 與 xy, yz, zx 平面的夾角分別為 $\theta_z, \theta_x, \theta_y$ 。試證明： $1 = \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z$ 。
- (3) 證明等式 (1.1) 成立。

【證明】請讀者自行完成。 ☒

習題 1.1 在矩形的邊上任取三個點，何時此三點所圍成的三角形面積為最大？

習題 1.2 任一三角形是否可以經過適當的投影之後成為直角三角形？

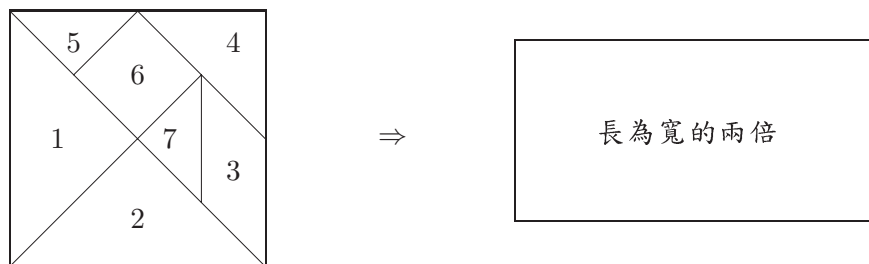
習題 1.3 試完成下列問題：

- (a) 橢圓投影之後的圖形可能有哪些？
- (b) 利用正投影面積公式證明橢圓面積公式。
- (c) 圓內接三角形何時面積最大？
- (d) 橢圓內接三角形何時面積最大？

習題 1.4 圓內接四邊形何時面積最大？又橢圓內接四邊形何時面積最大？

動手玩數學

下左圖是一個正方形被分割成七塊多邊形（即所謂的七巧板），下右圖是一個長為寬的兩倍之矩形（其面積與左正方形一樣）。是否可以將七巧板擺放在此矩形上（不可重疊）？



挑戰題

單位正立方體被平面所截出之最大截面積為何？（利用正投影面積公式）

祖沖之與祖暅

祖暅是祖沖之的兒子。祖沖之為南北朝的天文曆算家，以編製大明曆、計算圓週率 π 之值（繼承三國時代劉徽割圓術的想法）、證明球的體積公式聞名。月球上有個地方以其命名，以紀念他的成就。事實上，祖沖之及其父、子三人都算是數學家。

劉徽、祖沖之、祖暅及阿基米得的“割之彌細，所失彌少”之精神可以視為當代微積分想法的濫觴。