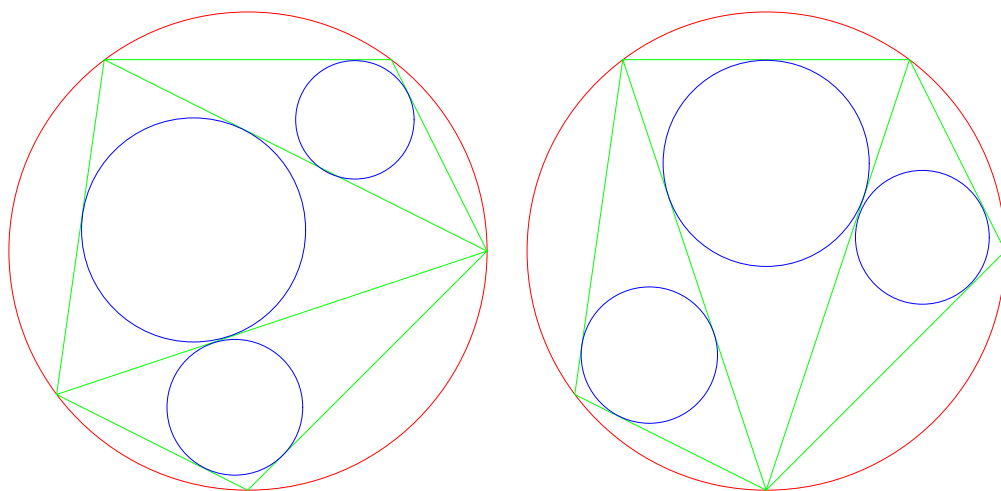


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1 鴿籠原理 (抽屜原理)	1
1.1 鴿籠原理 (抽屜原理)	1
1.2 鴿籠原理的算數應用	1
1.3 羅瑟貝利猜想	2

1 鴿籠原理（抽屜原理）

如果你家有四個人，卻僅有三個房間，那麼至少有一個房間要住兩個人以上；或者你買了五樣東西共花了一百零一元，那麼這五樣東西中，至少有一樣的價值超過二十元。諸如此類的簡單算術稱為鴿籠原理（或抽屜原理），所以鴿籠原理是我們日常生活中常會碰到的基本現象。本節的主要目的，就是要在適當的數論及幾何問題上引進鴿籠原理，看是否能得到一些不顯然或者是意想不到的結果。

1.1 鴿籠原理（抽屜原理）

定理 1.1（鴿籠原理） 試證明

- (1) 將 n 個東西分成 m 類。若 $n \geq m + 1$ ，則至少有一類東西的數目大於或等於 2。
- (2) 將 n 個東西分成 m 類。若 $n \geq rm + 1$ ，則至少有一類東西的數目大於或等於 $r + 1$ 。

【證明】這原理的證明是很明顯的，理由是將 n 個東西放在 m 個抽屜裡。若 $n \geq rm + 1$ ，則至少有一抽屜放了 $(r + 1)$ 個東西以上。 \square

1.2 鴿籠原理的算數應用

如果 x 是一個實數，我們將 x 表為一個整數與一個小於 1 的正小數的和，並用符號 $\{x\}$ 代表這個正小數。例如

$$\begin{aligned}x &= 2.345 \rightarrow x = 2 + 0.345 && \rightarrow \{x\} = 0.345, \\y &= -1.62 \rightarrow y = -2 + 0.38 && \rightarrow \{y\} = 0.38, \\z &= \sqrt{2} \rightarrow z = 1 + (\sqrt{2} - 1) && \rightarrow \{z\} = \sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

定理 1.2 如果 N 是一個正整數， α 是一個無理數。試證明可以找到整數 m, n 使得

$$0 < m + n\alpha < \frac{1}{N}.$$

【證明】因為 α 不是有理數，所以 $n\alpha$ （ n 是不為零的整數）的小數部份不為零。現在將 $(0, 1)$ 區間均分成 N 等分，即

$$\left(0, \frac{1}{N}\right], \left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right], \dots, \left(\frac{N-1}{N}, 1\right).$$

根據鴿籠原理知道：底下 $N + 1$ 個數

$$\{1 \cdot \alpha\}, \{2 \cdot \alpha\}, \dots, \{N \cdot \alpha\}, \{(N + 1) \cdot \alpha\} \in (0, 1)$$

至少有 2 個落在同一區間，並假設正整數

$$1 \leq n_1 < n_2 \leq N + 1$$

使得

$$\{n_1\alpha\}, \{n_2\alpha\}$$

落在同一區間，則

$$\begin{cases} n_1\alpha = m_1 + \{n_1\alpha\} \\ n_2\alpha = m_2 + \{n_2\alpha\} \\ |\{n_1\alpha\} - \{n_2\alpha\}| < \frac{1}{N} \end{cases} \Rightarrow |(m_1 - m_2) - (n_1 - n_2)\alpha| < \frac{1}{N}.$$

因此可以找到整數 $m = m_1 - m_2, n = -n_1 + n_2$ 或 $m = -(m_1 - m_2), n = n_1 - n_2$ 使得

$$0 < m + n\alpha < \frac{1}{N}.$$

☒

1.3 羅瑟貝利猜想

羅瑟貝利猜想是指：任意不被 5 整除的正整數 n 都存在至少一個正整數 m 使得 mn 的各位數字不是 6 就是 7。例如 $n = 23$ 時，我們取 $m = 29$ 得到 $29 \times 23 = 667$ 。在 1990 年時，羅瑟貝利猜想已被多位數學家解決^{1 2}（讀者是否有自己的解法呢）。在這節裡，我們將證明一個較簡單的版本如下：

定理 1.3 任意正整數 n 都存在至少一個正整數 m 使得 mn 的各位數字不是 1 就是 0。（例如： $n = 7$ 時可取 $m = 143$ 得到 $143 \times 7 = 1001$ ）

我們考慮下列 $n + 1$ 個數（把它們想成 $n + 1$ 隻鴿子）

$$1, 11, 111, \dots, \overbrace{111 \dots 1}^n, \overbrace{111 \dots 1}^{n+1}$$

被 n 除之所得餘數（餘數相同者表示住在同一個籠子）。因為有 $n + 1$ 個正整數，所以根據鴿籠原理知道：至少有兩個數被 n 除之，餘數一樣。設此兩數為

$$a = \overbrace{111 \dots 1}^i, \quad b = \overbrace{111 \dots 1}^j; \quad i < j$$

則

$$n \mid (b - a) = \overbrace{111 \dots 1}^{j-i} \overbrace{000 \dots 0}^i$$

得證。☒

習題 1.1 阿山的家是一個 3×4 平方單位的矩形。若阿山生了六個小孩，則證明至少有兩個小孩的距離不大於 $\sqrt{5}$ 單位。

¹G. Berzsenyi, The Roseberry conjecture, Quantum (May 1990).

²G. Berzsenyi, At sixes and sevens, Quantum (November 1990).

習題 1.2 十七位科學家中每一位和其他人都通信。在他們的信件往來中僅僅討論三個題目，而每兩位科學家僅討論一個題目。證明至少有三位科學家，他們彼此討論的問題都一樣。³

習題 1.3 在半徑為 1 的圓上畫一個正方形及一個正三角形。若圓周上的這七個頂點不相同，則證明至少有兩個頂點所構成的弧長不大於 $\frac{\pi}{12}$ 。

習題 1.4 單位長的正方形內任意擺放若干個圓（圓半徑可以不相等）。若這些圓的周長和為 7，則證明：可以畫一條與正方形邊平行的線且此線至少與三個圓相交。

習題 1.5 如果 N, p 是正整數， q 為整數， α 是一個無理數。證明可以找到整數 m, n 使得

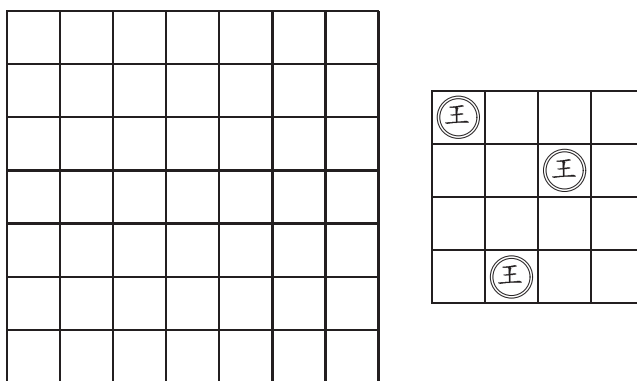
$$\left| m + n\alpha - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{N}.$$

習題 1.6 設 m 為正整數且正整數 $17 \cdot m$ 的各位數字不是 1 就是 0。試求 m 的最小值為何？

習題 1.7 設 m 為正整數且正整數 $29 \cdot m$ 的各位數字不是 1 就是 0。試求 m 的最小值為何？

動手玩數學

在 7×7 的棋盤上（共有 49 個方格）。當一位國王站在某一個格子內時，以此格子為中心的平行、垂直及兩條對角線上的格子都是此國王管轄的範圍。請問：至少需要幾位國王，才有辦法管轄整個棋盤（注意：非國王所在的方格可以由兩個以上的國王共管，但是國王所在的方格不能由兩個以上的國王共管，也就是王不見王的意思）。例如下圖是三個國王管轄 4×4 棋盤的情形：



挑戰題

³先固定一位科學家。

證明：平面上任一凸 $2n$ 邊形的對角線中，至少有一條與此多邊形的所有邊都不平行。⁴

正方形內放置點的猜想

“正方形內放置點問題”一直是幾何學上很有趣卻很難的問題。所謂“正方形內放置點問題”是說：在單位長的正方形內（含邊）放置相異的 n 個點，應該如何放置才能使此 n 個相異點中最接近的兩個點距離最大，設此最大距離為 d_n 。很明顯的， $n = 2$ 時，將兩點放置在此正方形的對角線的兩端則得到最大的距離 $\sqrt{2}$ （任何其它兩點的擺設均得不到此距離），所以 $d_2 = \sqrt{2}$ ；同理 $n = 4$ 時，將四點放置在此正方形的四個頂點則得到 $d_4 = 1$ 。事實上，數學家已經知道的 d_n 有如下：

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{2}, & d_3 &= \sqrt{6} - \sqrt{2}, \\ d_4 &= 1, & d_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ d_6 &= \frac{\sqrt{13}}{6}, & d_7 &= 4 - 2\sqrt{3}, \\ d_8 &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, & d_9 &= \frac{1}{2}, \\ d_{14} &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}, & d_{16} &= \frac{1}{3}, \\ d_{25} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

至於 d_{10} 僅知道它的近似值約為 0.421。當 n 值很大時，數學家們可以證明 d_n 的值約與

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{n}}$$

的值接近。（聰明的讀者是否能證明 $d_3 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 呢？）

⁴計算對角線數目，再利用反證法及鴿籠原理將對角線分配到與它平行的邊上。本問題原本是很難的題目，但是在鴿籠原理的使用之下，變為容易。