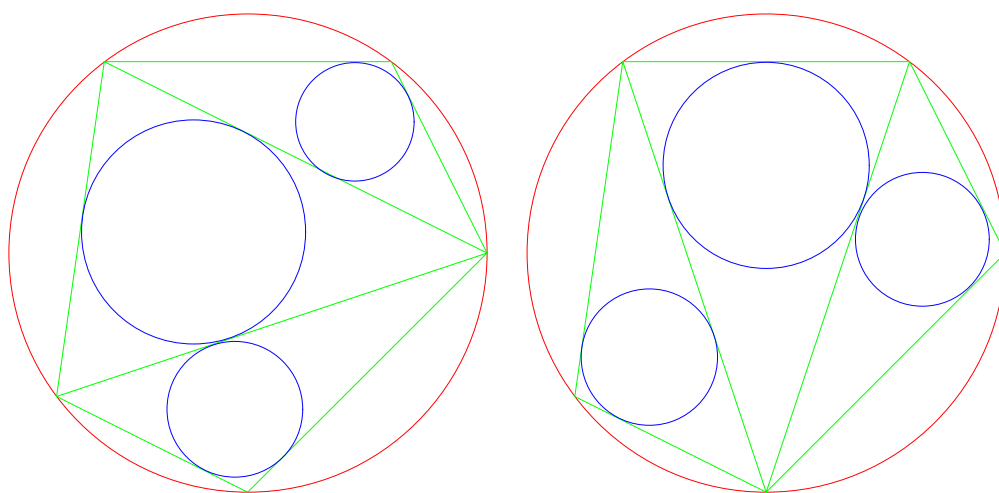


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1	千變萬化的不等式	1
1.1	條條道路通羅馬的不等式	1
1.2	不知如何下手的不等式	3

1 千變萬化的不等式

不等式問題常讓人有驚奇，摸不著邊，不知從何而降的感覺。大概是因為只看到漂亮的不等式，卻無從洞察製造這不等式的數學在哪兒（見樹不見林）。事實上，不等式問題經常是由幾何圖形或具有特殊性質的函數或生活中的模具所產生的。如何看穿這背後的黑手-圖形或函數或模具，是探索不等式問題的重點。

在這裡，我們提供了兩則可以多面向思維的不等式問題。當然也提供了從各種不同的角度切入所得到的證明。這些證明讓不等式問題應驗了蘇東坡的名句

“橫看成嶺、側成峰，高低遠近、各不同”。

1.1 條條道路通羅馬的不等式

定理 1.1 設實數 a_1, a_2, b_1, b_2 滿足 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 及 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 。試證明：不等式 $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ 成立。

【證法 1】（數線思維）由 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2$ 得到

$$(a_1 - a_2)^2 \geq (b_1 - b_2)^2 \Rightarrow a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2.$$

再與不等式 $4a_1 a_2 \geq 4b_1 b_2$ 相加，得到

$$a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2 \Rightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq (b_1 + b_2)^2.$$

因為 $a_1 + a_2 > 0, b_1 + b_2 > 0$ ，所以 $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ 。

【證法 2】（數線思維）由 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 得到

$$\sqrt{a_1} \geq \sqrt{b_1} \geq \sqrt{b_2} \geq \sqrt{a_2} > 0 \Rightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq (\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2})^2$$

利用 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2 > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) &\geq 2(\sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{b_1 b_2}) \geq 0 \\ \Rightarrow a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2. \end{aligned}$$

【證法 3】（分數思維）由 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2 > 0$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{b_2}{a_2} &\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} - 1 \geq \frac{b_2}{a_2} - 1 \\ &\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_1} \geq \frac{b_2 - a_2}{a_2}\end{aligned}$$

利用 $b_1 \geq a_2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq \frac{b_1}{a_2} \geq 1$$

利用 $a_1 - b_1 \geq 0, b_2 - a_2 \geq 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_1 - b_1 &\geq b_2 - a_2 \\ \Rightarrow a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2.\end{aligned}$$

【證法 4】（代數思維）設

$$\begin{cases} x = a_1 - b_1 \geq 0, \\ y = b_2 - a_2 \geq 0. \end{cases}$$

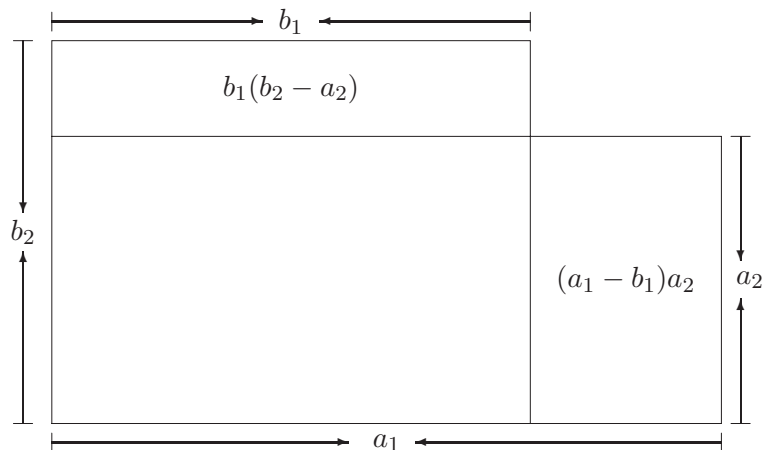
由 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ 推得

$$\begin{aligned}(b_1 + x)(b_2 - y) &\geq b_1 b_2 \Rightarrow x b_2 - y b_1 \geq x y \geq 0 \\ &\Rightarrow x b_2 \geq y b_1\end{aligned}$$

利用 $b_1 \geq b_2 > 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x &\geq y \\ \Rightarrow a_1 - b_1 &\geq b_2 - a_2 \\ \Rightarrow a_1 + a_2 &\geq b_1 + b_2.\end{aligned}$$

【證法 5】（幾何思維）考慮下圖：



由面積不等式 $a_1a_2 \geq b_1b_2$ 推得另一面積不等式

$$\begin{aligned}(a_1 - b_1)a_2 \geq b_1(b_2 - a_2) &\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq \frac{b_1}{a_2} \geq 1 \\ &\Rightarrow a_1 - b_1 \geq b_2 - a_2 \\ &\Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2.\end{aligned}$$

【證法 6】（反證法）假設 $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$ 。

因為

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 + a_2)^2 < (b_1 + b_2)^2 = b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2,$$

所以

$$0 \leq 2(a_1a_2 - b_1b_2) < b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 \quad (1.1)$$

另一方面，由 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2$ 得到 $(a_1 - a_2)^2 \geq (b_1 - b_2)^2$ ，即

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geq b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2.$$

利用 $a_1a_2 \geq b_1b_2$ 推得

$$b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 \leq -2(a_1a_2 - b_1b_2) \leq 0. \quad (1.2)$$

因為式子 (1.1) 與 (1.2) 矛盾，所以假設錯誤，必需 $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ 。 \square

1.2 不知如何下手的不等式

定理 1.2 設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明： $pq + qr + rp - 2pqr < 1$ 。

【代數-幾何思維】令直線方程式為 $y = f(x) = (p + q - 2pq)x + pq - 1$ （將 p, q 視為固定的實數）。將 $x = 0, 1$ 代入，得到

$$f(0) = pq - 1 < 0; \quad f(1) = p + q - pq - 1 = -(p-1)(q-1) < 0,$$

所以此直線在 $[0, 1]$ 區間的值恆為負數，因此

$$f(r) = pq + qr + rp - 2pqr - 1 < 0.$$

得證。

【不等式思維】

$$\begin{aligned}1 - (pq + qr + rp - 2pqr) \\ &= (1 - pq - r + pqr) + r(-q - p + pq + 1) \\ &= (1 - pq)(1 - r) + r(1 - p)(1 - q) > 0.\end{aligned}$$

【幾何模型思維】將原來不等式重新詮釋如下：

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r < 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

幾何模型解釋如下：將

$1 \cdot 1 \cdot 1$ 視為 X, Y, Z 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積；

$p \cdot q \cdot 1$ 代表 X, Y, Z 軸正向上各取 $p, q, 1$ 單位之長方體的體積；

$1 \cdot q \cdot r$ 代表 X, Y, Z 軸正向上各取 $1, q, r$ 單位之長方體的體積；

$p \cdot 1 \cdot r$ 代表 X, Y, Z 軸正向上各取 $p, 1, r$ 單位之長方體的體積；

$p \cdot q \cdot r$ 代表 X, Y, Z 軸正向上各取 p, q, r 單位之長方體的體積。

你是否感受到這種幾何模型思維的功力了。

【推廣、提出猜想思維】本題目是一則三維度的不等式（因為含有 p, q, r 三個未知數）。照理說，每個維度都應有對應的不等式存在才是，所以我們提出最一般化的猜想如下：設實數 a_1, a_2, \dots, a_n 滿足

$$0 < a_1, a_2, \dots, a_n < 1.$$

試證明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_i} - (n-1) a_1 a_2 \cdots a_n < 1. \quad (1.3)$$

讀者應該容易利用數學歸納法證明這個猜想吧！

習題 1.1 設實數 a, b, c 滿足 $0 < a < b < c < 1$ 。問：長度為

$$\frac{c-a}{1-ca}, \frac{b-a}{1-ab}, \frac{c-b}{1-cb}$$

的三條線段是否可以構成一個三角形的三邊邊長？

動手玩數學

設實數 a, b 滿足 $-1 \leq b \leq a \leq 1$ 。你能比較

$$\frac{\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}}{2} \quad \text{與} \quad \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

的大小關係嗎？

挑戰題

如下圖，正方形 I 與正方形 II 的面積和為 1。試證明：剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積

$$\leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

I	II