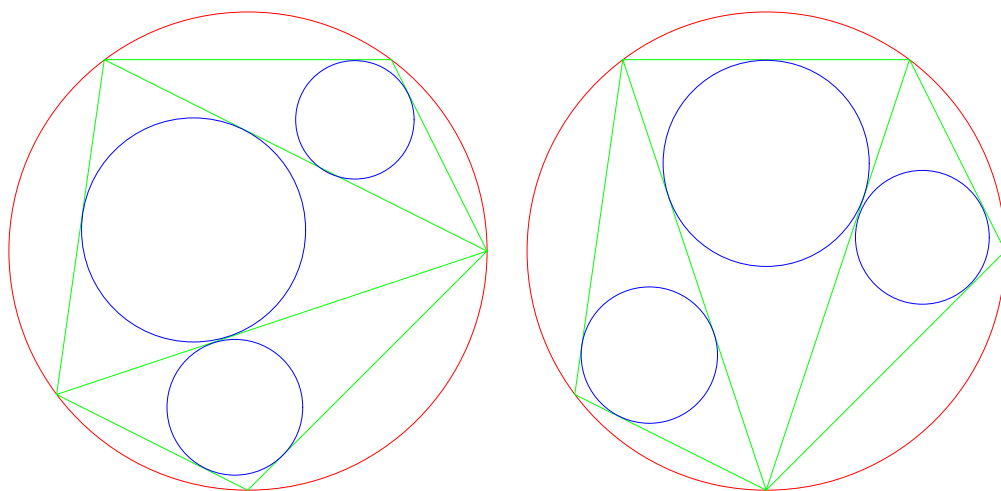


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目錄

1	四平方和與 $\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$ 定理	1
1.1	尤拉恆等式	1
1.2	四平方和問題	1
1.3	高斯 $\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$ 定理	3

1 四平方和與 $\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$ 定理

本文的主要目的是證明拉格朗日定理：每一個正整數皆可表為四個整數的平方和及高斯的三角形數定理：每一個正整數皆可表為三個三角形數的和。

1.1 尤拉恆等式

我們很容易證得如下的斐波那契恆等式：

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

事實上，我們有較複雜的尤拉恆等式：

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$

其中

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \\ z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ z_3 = x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4, \\ z_4 = x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2. \end{cases}$$

1.2 四平方和問題

定理 1.1 每一個質數皆可表為四個整數的平方和。

【證明】因為 $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ ，所以只需討論奇質數 p 即可。現在分兩個步驟來證明：

- (1) 證明：存在一個正整數 m ($1 \leq m < p$) 使得 mp 可表為四個整數的平方和。考慮下列 $p+1$ 個整數

$$1 + 0^2, 1 + 1^2, 1 + 2^2, \dots, 1 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \\ -0^2, -1^2, -2^2, \dots, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

根據鴿籠原理，必有兩個數被 p 除之，餘數相等且此兩數恰在上、下列各有一數。因此存在兩個整數 x, y 使得

$$\begin{cases} 1 + x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}, \\ 0 \leq x, y \leq \frac{p-1}{2}. \end{cases}$$

因為 $1 \leq 1 + x^2 + y^2 < 1 + 2\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 < p^2$ ，所以

$$0^2 + 1^2 + x^2 + y^2 = mp,$$

其中 $1 \leq m < p$ 。

(2) 假設正整數 m 是使 mp 可表為四個整數平方和的最小正整數。我們主要目的是證明 $m = 1$ 。由 (1) 可設

$$\begin{cases} mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ 1 \leq m < p. \end{cases}$$

首先證明 m 為奇數：如果 m 是偶數，則

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

亦為偶數。由

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv mp \equiv 0 \pmod{2}$$

容易推得 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 亦為偶數。因此產生下列三種情形：

- (a) x_1, x_2, x_3, x_4 均為偶數。
- (b) x_1, x_2, x_3, x_4 均為奇數。
- (c) x_1, x_2, x_3, x_4 中有兩個為偶數，兩個為奇數；為了方便，不妨假設 x_1, x_2 為偶數， x_3, x_4 為奇數。

無論是那一種情形，我們都有 $x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4$ 為偶數，因此得到

$$\frac{mp}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2,$$

即 $(mp)/2$ 能表為四個整數的平方和，這與 m 是最小的假設矛盾。所以 m 為奇數。

其次證明： $m = 1$ 。由前述知道 m 為奇數。如果 $3 \leq m < p$ ，容易推得 m 不能同時整除 x_1, x_2, x_3, x_4 （否則，由 $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ 知 p 不為質數）。因此存在四個不全為 0 的整數

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

滿足

$$\begin{cases} x_i \equiv y_i \pmod{m}, \\ |y_i| < \frac{m}{2}, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

因此有

$$\begin{cases} 1 \leq y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 < 4\left(\frac{m}{2}\right)^2 = m^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = nm, \quad 1 \leq n < m < p \\ \Rightarrow (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = nm^2p. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \\ z_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ z_3 = x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4, \\ z_4 = x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2. \end{cases}$$

因為 $x_i \equiv y_i \pmod{m}$ 及 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp \equiv 0 \pmod{m}$ ，所以

$$z_1 \equiv z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \equiv 0 \pmod{m}.$$

由此式及尤拉恆等式得到

$$\begin{cases} nm^2p = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) \\ \quad = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \\ 1 \leq n < m < p \\ \Rightarrow np = \left(\frac{z_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{m}\right)^2 + \left(\frac{z_4}{m}\right)^2, \end{cases}$$

即 np 能表為四個整數的平方和，這與 m 是最小的假設矛盾。因此 $m = 1$ 。

由 (1), (2) 可知：每一個質數皆可表為四個整數的平方和。 ☒

定理 1.2 (拉格朗日定理) 每一個正整數皆可表為四個整數的平方和。

【證明】由前定理及尤拉恆等式馬上得證。 ☒

1.3 高斯 $\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta$ 定理

所謂三角形數是指可以表為

$$\frac{(n-1)n}{2}, \quad n \text{ 為正整數,}$$

的非負整數，所以前幾個三角形數為

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

高斯於 1796 年的七月十日，在他的一篇論文上寫道

$$\text{EYPHKA! } \text{num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

用今天的語言來說，就是要證明

定理 1.3 (高斯三角形數定理) 每一個正整數皆可表為三個三角形數的和。

在證明這個定理之前，我麼先敘述一個特別的定理

定理 1.4 所有被 8 除之，餘數為 3 的正整數皆可表為三個奇數的平方和。

【證明】在這裡，我們不打算證明這個定理，因為它的證明牽涉到較深入的算術知識。¹ ☒

【高斯三角形數定理的證明】設 N 是給定的正整數，利用前定理知道： $8N + 3$ 可以表為三個奇數的平方和，並令

$$8N + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 = 4(a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c) + 3.$$

得到

$$N = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2}.$$

得證。 ☒

習題 1.1 試驗證尤拉恆等式。

習題 1.2 是否“每一個質數皆可表為三個整數的平方和”。

習題 1.3 試將 119 表為最少個正整數的平方和。

習題 1.4 試將 2023 表為最少個正整數的平方和。

習題 1.5 我們可以利用拉格朗日定理來證明四次方和的問題：

(1) 證明恆等式

$$6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i + x_j)^4 + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^4.$$

(2) 設 n 為正整數。證明 $6n^2$ 可表為 12 個整數的四次方和。

(3) 證明每個正整數都可表為 53 個整數的四次方和。

習題 1.6 已知 $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ 是六個未知數，是否存在整係數多項式

$$\begin{aligned} z_1 &= f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), \\ z_2 &= g(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), \\ z_3 &= h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

滿足

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2).$$

習題 1.7 數學家尤拉發現：如果 T 是一個三角形數，則

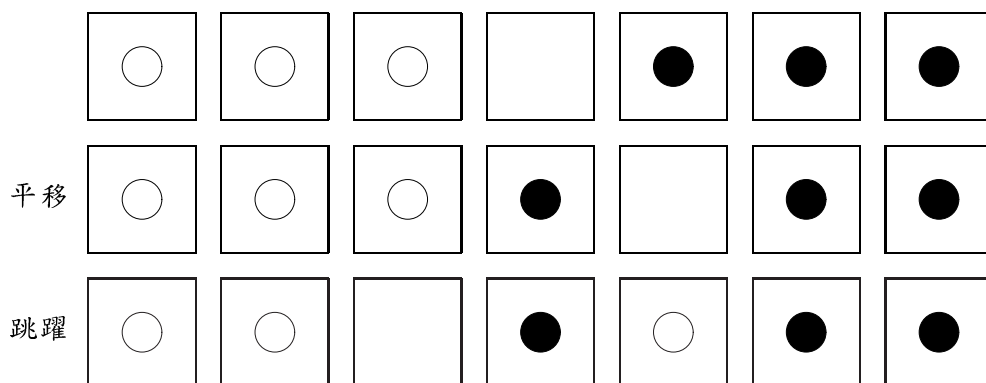
$$1 \cdot T + 0, 9 \cdot T + 1, 25 \cdot T + 3, 49T + 6, 81 \cdot T + 10$$

也是三角形數。你能根據這個發現，得到一般的公式嗎？

¹有興趣的同學可以參考 M. B. Nathanson 的書 Additive Number Theory 的第 23 頁。

動手玩數學

如下圖：在七個排成一直線的正方格上放置三粒白棋，三粒黑棋。第二圖是將黑棋“平移”，第三圖則是將第二圖的白棋“跳躍”。如果限制每次只能採取“平移”或者“跳躍”兩種運動（無論白棋或者黑棋均可平移或跳躍），則須運動幾次方能將三粒白棋與三粒黑棋完全互換。



挑戰題

設 $n \geq 3$ 為正整數。試證明存在奇正整數 x 與 y 滿足

$$2^n = x^2 + 7y^2.$$

完全平方數的猜想

數學家沃森使用較深的橢圓函數證明了

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

僅在 $n = 1$ 及 $n = 24$ 時才是個完全平方數，大數學家莫德爾則要求“是否有比較基本的證明方法”（也就是說，一般高中生或大學生就可以看懂的證明方法）？

莫德爾亦猜想

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

僅在 $n = 2, 7, 15$ 及 74 時才是個完全平方數。直到目前為止仍不知此猜想是否為正確。