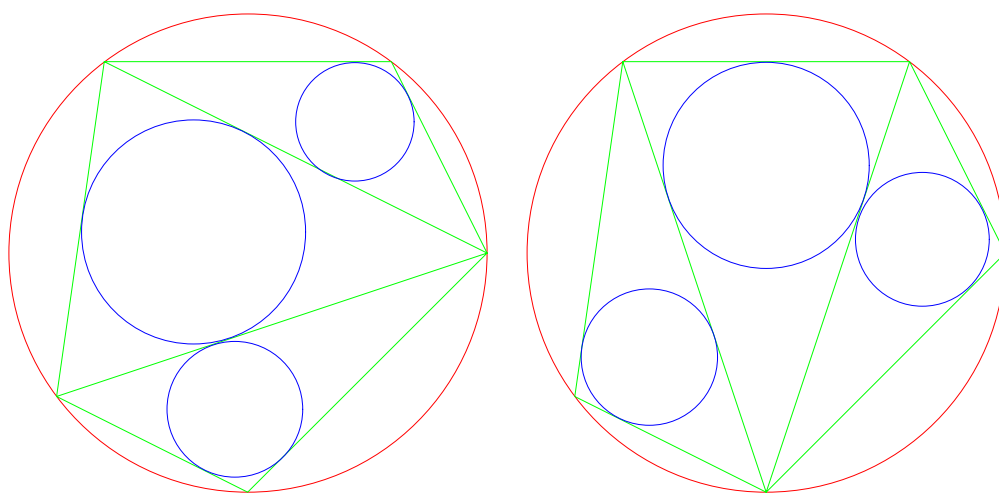


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1 大家一起來猜數字

1

1 大家一起來猜數字

俗語說”路遙知馬力，日久見人心”，”知人知面不知心”。可見想瞭解一個人的心裡想甚麼是很困難的一件事。這節的謎題就是想藉著 43,57 這兩個數字，來猜透一個人心裡所想的數字。過程是這樣的：

你在心裡想一個小於 50 的正整數（可別說出來哪個數），且從 43,57 這兩數中選一個數（同樣不說出選哪一個數）。然後將心裡想的數與選的數相乘（例如：（表一）是你心裡想的數為 38，選的數為 43 所得到的計算結果；（表二）則是你心裡想的數為 46，選的數為 57 所得到的計算結果）。

想的數	38
×) 選的數	43
<hr/>	
	114
	152
<hr/>	
	1634
	末兩位數

(表一)

想的數	46
×) 選的數	57
<hr/>	
	322
	230
<hr/>	
	2622
	末兩位數

(表二)

如果你只告訴我計算結果的末兩位數，那我一定能夠很快的猜透你心裡所想的數字及你選的數字。你能知道其中的玄機嗎？

【解答】一個數字的末兩位數剛好就是對這個數字模 100 所得到的餘數。因此假設你心裡想的數字為 S , ($1 \leq S < 50$)。

(1) 如果你選的數字為 43，則將相乘得到的末兩位數再乘以 7 得到

$$\begin{aligned}(S \times 43 \text{ 的末兩位數}) \times 7 &\equiv S \times 43 \times 7 \text{ 的末兩位數} \pmod{100} \\ &\equiv 300S + S \pmod{100} \\ &\equiv S \pmod{100}.\end{aligned}$$

所得到的新末兩位數為 S (剛好是你心裡想的數)。

(2) 如果你選的數字為 57，則將相乘得到的末兩位數再乘以 7 得到

$$\begin{aligned}(S \times 57 \text{ 的末兩位數}) \times 7 &\equiv S \times 57 \times 7 \text{ 的末兩位數} \pmod{100} \\ &\equiv 100(4S - 1) + (100 - S) \pmod{100} \\ &\equiv 100 - S \pmod{100}.\end{aligned}$$

所得到的新末兩位數為 $100 > 100 - S > 50$ ($S = 100 - (100 - S)$ 剛好是你心裡想的數)。

因此我們得到的結論是：將你相乘得到的末兩位數再乘以 7，並取它的末兩位數為新的末兩位數。如果這所得的新末兩位數不超過 50，則你心裡想的數為此新末兩位數，所選的數為 43；否則你心裡想的數為 100 減去此新末兩位數，所選的數為 57。 ☒

將 (表一)、(表二) 的情形驗算如下：

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="text-align: right;">34 末兩位數</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">×)</td> <td style="text-align: right;">7</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">238 新末兩位數</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="padding-top: 10px;">選 43, 想 38</td> </tr> </table>		34 末兩位數	×)	7				238 新末兩位數	選 43, 想 38		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;"></td> <td style="text-align: right;">22 末兩位數</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">×)</td> <td style="text-align: right;">7</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: right;">154 新末兩位數</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="padding-top: 10px;">100 - 54 = 46</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="padding-top: 10px;">選 57, 想 46</td> </tr> </table>		22 末兩位數	×)	7				154 新末兩位數	100 - 54 = 46		選 57, 想 46	
	34 末兩位數																						
×)	7																						
	238 新末兩位數																						
選 43, 想 38																							
	22 末兩位數																						
×)	7																						
	154 新末兩位數																						
100 - 54 = 46																							
選 57, 想 46																							

習題 1.1 如果將選的數字 43, 57 改成 33, 67，那你知道如何應付嗎？

習題 1.2 你是否會設計像本謎題的猜數字問題？

習題 1.3 阿三在心裡想一個不超過 500 的正整數，且從 143, 857 這兩數中選一個數，然後將心裡想的數與選的數相乘，結果此乘數的末三位數為 231。你能推敲阿三想的數字及選的數字為何嗎？

習題 1.4 曉明心裡想一個小於 100 的正整數，他將此數除以 9，並將所得的餘數再乘以 55，得到第一個數；又將此心裡想的數除以 11，並將所得的餘數再乘以 45，得到第二個數。曉明只告訴我們，這兩個數的和是 335，你能猜到曉明心裡想的數嗎？

習題 1.5 一個小國家的地牢裡關著三名囚犯，他們原本是數學家，但因觸怒了國王而被關入地牢。這一天國王心情不錯，把三名囚犯叫到跟前來，跟他們說：這裡有五頂帽子，三黑兩白，我要任意讓你們各戴上一頂，你們只能看到別人頭上的帽子，但是看不到自己頭上的帽子，也看不到剩下的帽子。如果有人能說出自己頭上帽子的顏色，我就當場赦他無罪！但是如果說錯了，就立刻拉出去處死！如果沒有人說得出，就通通再關回去。三個囚犯戴著帽子之後，起先個個噤若寒蟬，面面相覷，沒有人敢說一句話。過一會兒，突然有一個囚犯知道自己頭上帽子的顏色了。請問他戴的是什麼顏色的帽子，並說明理由。（這是一則很適合考驗中學生思考能力的數學遊戲，你可以試著做這樣的五頂帽子，讓學生來玩這個遊戲，也就是讓學生動手玩數學）

習題 1.6 港警所接到一則檢舉電話：有一艘將要啟航的貨櫃輪上，有一只貨櫃裝有違禁品，並給了一個數 $50\frac{9}{11}$ 。根據警方人員的調查，這艘船上的貨櫃編號為 $1, 2, 3, \dots$ 之連續正整數。檢警人員研判，這個數 $50\frac{9}{11}$ 應是剔除藏有違禁品的那只貨櫃外，其他所有貨櫃編號的算數平均數。

根據這些研判，辦案人員藉由準確的計算找到了這個藏有違禁品貨櫃的編號。你知道共有多少只貨櫃在這艘船上嗎？藏違禁品的貨櫃編號是幾號嗎？

動手玩數學

設甲、乙、丙、丁四人參加一項考試，其中是非題共有七題，每道題答對得 1 分，不答得 0 分，答錯倒扣 1 分。下表記錄著每個人的答題情形（空白代表此人該題未答），已知甲、乙、丙、丁四人在是非題部分都得到兩分，試由此推知各題的正確答案並加以說明。

題目 \ 考生	甲	乙	丙	丁
第一題	○	○		X
第二題		X	○	X
第三題	X	○	X	X
第四題	○	○	X	○
第五題	X	X	○	○
第六題	○	X	X	
第七題	○		○	X
得分	2	2	2	2

挑戰題

算命仙程大位¹擅長猜測算命者的年齡，而且屢試不爽。他的伎倆是這樣的：首先請算命者將他的年齡分別除以 3, 5 及 7，得到三個餘數，然後將此三個餘數分別乘以 70, 21 及 15，最後將得到的三個乘數相加。算命者只要告訴程大位最後相加的總數，程大位便立刻得知算命者的確實年齡。你知道算命仙程大位是如何得到的嗎？

¹程大位是《算法統宗》的作者，此題改編自他的口訣「三人同行七十稀，五樹梅花二一枝，七子團圓月正半，除百零五便得知」。

矩形的邊長猜想

這是有關矩形的一則很有名的問題。儘管已經被很多數學家解決了，但是如果有好的證明方法，還是值得寫下來。問題是這樣的：如果你手邊有許多（當然是有限）各式各樣的小矩形（同一長、寬的小矩形可以超過一個以上）。這些小矩形有一個特色就是每個小矩形至少有一邊的長度是正整數。有一天奇蹟發生了，你兒子將這些小矩形拼湊出一個大矩形來（沒有重疊及空隙發生）。

之後，你兒子拿著直尺去量他拼湊出來的大矩形，竟然發現這個大矩形也有一邊的長度是正整數。你同意你兒子這個偉大的發現嗎（也就是說，如果可以拼出大矩形的話，則大矩形的邊長至少有一邊的長度亦為整數）？