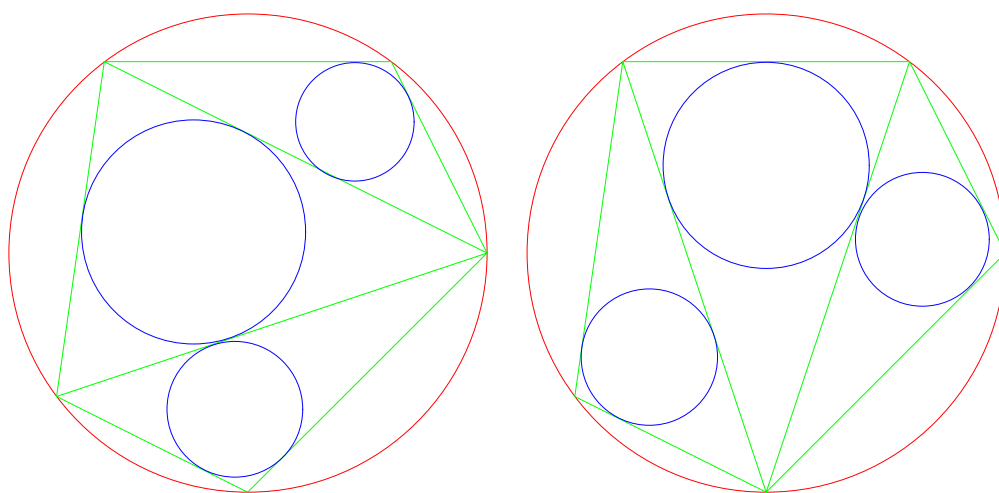


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1 質數問題

1

1 質數問題

在 ?? 節中，我們對“質數有無窮多個”給了許多種不同的證明方法。事實上，除了 2 是偶質數之外，剩下的質數都是奇質數。因為奇數可以分為被 4 除之，餘數為 1 與 3 兩類，所以在兩類中，是否都有無窮多個質數是這裡要探討的重點。我們將質數依被 4 除之，所得的餘數做分類如下：

$$\text{質數} \begin{cases} 2, \\ \text{奇質數} \begin{cases} 3, 7, 11, \dots & (\text{被 } 4 \text{ 除之, 餘數為 } 3), \\ 5, 13, 17, \dots & (\text{被 } 4 \text{ 除之, 餘數為 } 1). \end{cases} \end{cases}$$

事實上，任一公差與首項互質的算術數列（等差數列）均包含有無窮多個質數。這是十九世紀很有名的狄利克雷定理。由於狄利克雷定理的證明很難，在此我們僅討論一些特殊的算術數列而已（如被 4 除之，餘數為 1 或 3，被 6 除之，餘數為 5 等算術數列）。底下是整數論常用有關因數，倍數的一個引理：設 d 為正整數， a, b 為整數且 $d \mid a, d \mid b$ 則

$$d \mid am + bn,$$

其中 m, n 為整數。

定理 1.1 證明：被 4 除之，餘數為 3 的質數有無窮多個。

【證明】假設被 4 除之，餘數為 3 的質數僅有有限個且恰為

$$p_1 = 3, p_2 = 7, p_3, \dots, p_n$$

等 n 個質數。現在考慮正整數

$$N = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1.$$

因為 $N > 1$ 且 $N \equiv 3 \pmod{4}$ ，所以 N 可以寫成若干個奇質數的乘積且其中至少有一個被 4 除之，餘數為 3；即有一個質數 p_m ($1 \leq m \leq n$) 使得

$$p_m \mid N = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1, p_m \mid p_m \Rightarrow p_m \mid -1.$$

此與 $p_m > 1$ 矛盾。 □

定理 1.2 證明：被 4 除之，餘數為 1 的質數有無窮多個。

【證明】假設被 4 除之，餘數為 1 的質數僅有有限個且為

$$p_1 = 5, p_2 = 13, p_3, \dots, p_n$$

n 個。現在考慮正整數

$$N = (2p_1p_2 \cdots p_n)^2 + 1.$$

若 p 是 N 的一個質因數，則由

$$\begin{aligned} p|N &\Rightarrow (2p_1p_2\cdots p_n)^2 \equiv -1 \pmod{p} \\ &\Rightarrow (2p_1p_2\cdots p_n)^4 \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

因為 4 是滿足上式最小的正整數，由費馬小定理知道：

$$4|(p-1) \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}.$$

因此 $p = p_m (1 \leq m \leq n)$ 。由 $p_m|N$ 及 $p_m|p_m$ 得到 $p_m|1$ ，矛盾。故被 4 除之，餘數為 1 的質數有無窮多個。

習題 1.1 證明：被 6 除之，餘數為 5 的質數有無窮多個。

習題 1.2 證明：被 8 除之，餘數為 1 的質數有無窮多個。

習題 1.3 ¹ 設 n 為給定的正整數。證明：被 2^n 除之，餘數為 1 的質數有無窮多個。

習題 1.4 是否存在整數 n 使得 $n^4 - 20n^2 + 4$ 為質數。

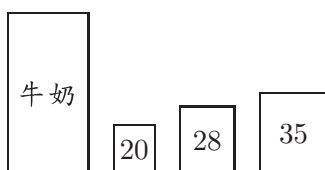
習題 1.5 ² 設 n 為整數。若

$$|n^3 - 6n^2 + 2n - 12|$$

是一個質數或是兩個質數（可以相同）相乘的正整數，則 n 的值為何？

動手玩數學

某人有一大桶的牛奶，但卻僅有 20 公升、28 公升及 35 公升的量杯各一個。請問應如何操作才能量得一公升的牛奶。



挑戰題

試證明

(1) 設 p 為奇質數且 x, y 為互質的整數。若 $p | x^2 + y^2$ ，則證明

$$p \equiv 1 \pmod{4}.$$

¹如果你已經會證明了，請仔細想想你的證明是否有瑕疵。

²試著因數分解此多項式並證明此多項式必為 3 的倍數。

(2)³ 證明：被 8 除之，餘數為 5 的質數有無窮多個。

狄利克雷定理

如果 a 與 b 是互質的正整數，我們用符號 $\pi(n; a, b)$ 表示不大於 n 且被 a 除之，餘數為 b 的質數個數。狄利克雷定理是說

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n; a, b)}{n / (\phi(a) \cdot \ln n)} = 1.$$

也就是說，當 n 很大時，不大於 n 且被 a 除之，餘數為 b 的質數個數大約為

$$\frac{n}{\phi(a) \cdot \ln n},$$

這裡的 $\phi(a)$ 是指尤拉 ϕ 函數。

³ 令 $N = (5 \cdot 13 \cdot 29 \cdots p_n)^2 + 2^2$, $N \equiv 5 \pmod{8}$ 。證明：若質數 p 整除 N ，則 $p \equiv 1 \pmod{4}$ 。