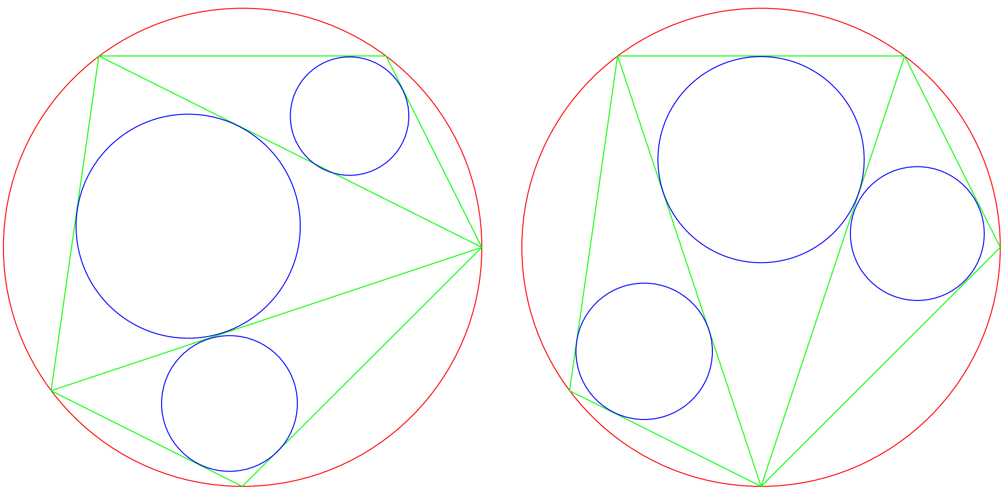
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 高斯引理

數學家高斯在數學上有許許多多有名的定理及猜想，高斯引理是大家最耳熟能詳及常用的一個。

1.1 高斯引理

定理 **1.1** (高斯引理) 如果首項係數是 1 的多項式

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

整除另一個首項係數為 1 的多項式

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

其中 $a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$ 為有理數； $c_{n-1}, \cdots, c_1, c_0$ 為整數，則証明

$$a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$$

必須是整數。（註：這裡的整除是指所得的商是一個首項係數為 1，其它項係數為有理數的多項式）

【證明】假設多項式 $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ 被多項式

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

除之，所得的商為

$$x^{n-m} + \frac{b_{n-m-1}}{b_{n-m}}x^{n-m-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_{n-m}}x + \frac{b_0}{b_{n-m}},$$

其中

$$b_{n-m}, b_{n-m-1}, \cdots, b_1, b_0$$

是最大公因數為 1 的整數。將它整理成如下的橫式

$$\begin{array}{rr} & x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ \times) & b_{n-m}x^{n-m} + b_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \\ \hline & b_{n-m}(x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) \end{array} \tag{1.1}$$

其次，將分數

$$a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$$

通分，可以令

$$a_i = \frac{a'_i}{a'_m}, \quad 0 \le i \le m-1,$$

其中 a'_m 為正整數且

$$a'_m, a'_{m-1}, \cdots, a'_1, a'_0$$

亦是最大公因數為 1 的整數。將乘式 (1.1) 乘以 a'_m 得到

$$\begin{array}{rr} & a'_m x^m + \cdots + a'_i x^i + \cdots + a'_0 \\ \times) & b_{n-m}x^{n-m} + \cdots + b_j x^j + \cdots + b_0 \\ \hline \multicolumn{2}{r}{a'_m b_{n-m}(x^n + \cdots + c_{i+j}x^{i+j} + \cdots + c_0)} \end{array} \tag{1.2}$$

我們的目標是證明：$a'_m = 1$。利用反證法，假設正整數 $a'_m \neq 1$，因此至少有一個質因數 p 整除 a'_m。由

$$(a'_m, a'_{m-1}, \cdots, a'_1, a'_0) = 1$$

及

$$(b_{n-m}, b_{n-m-1}, \cdots, b_1, b_0) = 1$$

知道：可以找到整數

$$i, j (0 \leq i \leq m-1; 0 \leq j \leq n-m)$$

使得

$$\begin{cases} p \mid a'_0, p \mid a'_1, \cdots, p \mid a'_{i-1}; p \mid b_0, p \mid b_1, \cdots, p \mid b_{j-1}, \\ \text{但是 } p \text{ 不能整除 } a'_i \text{ 及 } b_j. \end{cases} \tag{1.3}$$

現在比較乘式 (1.2) 中 x^{i+j} 項的係數：因為 $p \mid a'_m$，所以乘式 (1.2) 下方的 x^{i+j} 項的係數為 p 的倍數；而乘式 (1.2) 上方的 x^{i+j} 項的係數為

$$\cdots + a'_{i-1}b_{j+1} + a'_i b_j + a'_{i+1}b_{j-1} + \cdots.$$

利用式子 (1.3)，可以將它整理為

$$\cdots + a'_{i-1}b_{j+1} + a'_i b_j + a'_{i+1}b_{j-1} + \cdots = a'_i b_j + p \text{ 的倍數。}$$

再由式子 (1.3) 知道此數不是 p 的倍數。互相矛盾，即 $a'_m = 1$，所以

$$a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0$$

為整數。 ⊠

1.2 高斯引理的應用

一個角如果可以表為 $\frac{n}{m}\pi$（其中 m 為正整數，n 為整數）則我們稱這種角為有理角。

定理 **1.2** 如果 m, n 為正整數且 $\cos\frac{n}{m}\pi$ 為有理數則

$$\cos\frac{n}{m}\pi = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1.$$

【証明】根據棣美佛定理知道

$$\cos\frac{n}{m}\pi + i\sin\frac{n}{m}\pi, \cos\frac{n}{m}\pi - i\sin\frac{n}{m}\pi$$

為方程式 $x^{2m}-1=0$ 的兩個根，所以

$$\begin{aligned}&x^2-2\cos\tfrac{n}{m}\pi x+1\\&=(x-\cos\tfrac{n}{m}\pi+i\sin\tfrac{n}{m}\pi)(x-\cos\tfrac{n}{m}\pi-i\sin\tfrac{n}{m}\pi)\mid x^{2m}-1.\end{aligned}$$

因為 $2\cos\frac{n}{m}\pi$為有理數，所以由高斯引理知道 $2\cos\frac{n}{m}\pi$ 為整數。所以我們得到

$$2\cos\frac{n}{m}\pi=-2,-1,0,1,2\Rightarrow\cos\frac{n}{m}\pi=0,\pm\frac{1}{2},\pm1.$$

又因為取特別角時，我們有

$$\cos 0\pi=1,\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\cos\frac{\pi}{2}=0,\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\cos\pi=-1.$$

所以這五個值都可能發生。 ☒

這個定理是說：在 x 為有理數時（除了幾組特別值之外），函數 $f(x)=\cos(x\cdot\pi)$ 的值都是無理數。這是三角函數一個很重要而且奇怪的現象。

定理 **1.3** 三邊長為有理數且三內角為有理角的三角形必為正三角形。

【証明】設三角形 $\triangle ABC$ 的三邊長及三內角分別為 a,b,c 及 $\angle A,\angle B,\angle C$；由餘弦定理知道 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$；因為 a,b,c 為有理數，所以 $\cos\angle A$ 亦為有理數。根據定理 1.2 得

$$\cos\angle A=0,\pm\frac{1}{2},\pm1\Rightarrow\angle A=60^\circ,90^\circ,120^\circ.$$

同理有

$$\begin{cases}\angle A=60^\circ,90^\circ,120^\circ\\\angle B=60^\circ,90^\circ,120^\circ\\\angle C=60^\circ,90^\circ,120^\circ\end{cases}\Rightarrow\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ.$$

因此三角形 $\triangle ABC$ 為正三角形。 ☒

三角形最重要的兩個量為三邊的邊長及三個內角的角度。當三邊的邊長給定時，三內角的角度可以經由餘弦定理確定；而三內角的角度知道時，三邊的邊長比也可以經由正弦定理算出。這告訴我們，這兩個量是互相牽制的。有些人比較喜歡三邊邊長是正整數的三角形；但是也有些人比較欣賞三內角是有理角的三角形。定理 1.3 告訴我們，這兩種人共同中意的三角形就只有正三角形而已。也就是說，魚（好的邊長）與熊掌（好的內角）是不能兼得的。

習題 **1.1** 如果 m,n 為正整數且 $\sin\frac{n}{m}\pi$ 為有理數，則求 $\sin\frac{n}{m}\pi$ 的可能值。

習題 **1.2** 如果 m,n 為正整數且 $\tan\frac{n}{m}\pi$ 為有理數，則求 $\tan\frac{n}{m}\pi$ 的可能值。

習題 **1.3** 設 a,b 是互質的整數，且一次因式 $ax-b$ 整除整係數多項式

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

證明：整除所得的商式也是一個整係數多項式。

習題 **1.4** 設 m, n 為正整數，且令 $\theta = \frac{n}{m}\pi$。

(1) 如果 $\sin\theta + \cos\theta$ 為有理數，則求 $\sin\theta + \cos\theta$ 的可能值。

(2) 是否有這樣的 θ 滿足 $0 < n/m < 1/2$ 及 $\sin\theta - \cos 2\theta$ 為有理數。

動手玩數學

下圖是一張寫有八個數字的紙張。現在沿著格子線摺數次之後，變成看起來是一個正方格大小，但是厚度卻有八張紙張厚。如果依照次序將數字寫下來會產生一個八位數的正整數。你是否可以找到好的摺疊方式，讓產生的八位數恰為 12345678。

1	8	7	4
2	3	6	5

如果要變成 12364587，可辦到嗎？

挑戰題

試確定所有滿足底下條件的正整數 m 與正整數 n：

$$\sin\frac{2\pi}{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

高斯

德國大數學家，生於 1777 年，死於 1855 年。高斯是一位天才數學家，被稱為數學王子。終其一生做了很多數學上偉大的貢獻，即使是今天的數學，仍然受高斯的影響非常深遠。高斯證明了古代有名的作圖題“正十七邊形可尺規作圖”，另外他也證明了“被八除之餘數不為七的正整數皆可表為三個整數的平方和”。事實上，在數論上，高斯有很多偉大的貢獻。

高斯提過很多有名的問題；例如是否有無窮多個質數 p 使得 $\frac{1}{p}$ 的循環節為 $p-1$ 位。 $p=7$ 即是一個

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}.$$

事實上，如果“黎曼猜想”成立的話，我們可以證明這樣的質數有無窮多個。

代數上有名的代數基本定理是高斯首先給予證明的。所謂的代數基本定理是指：任意以複數為係數的多項式（次數大於零次）必有複數根存在。