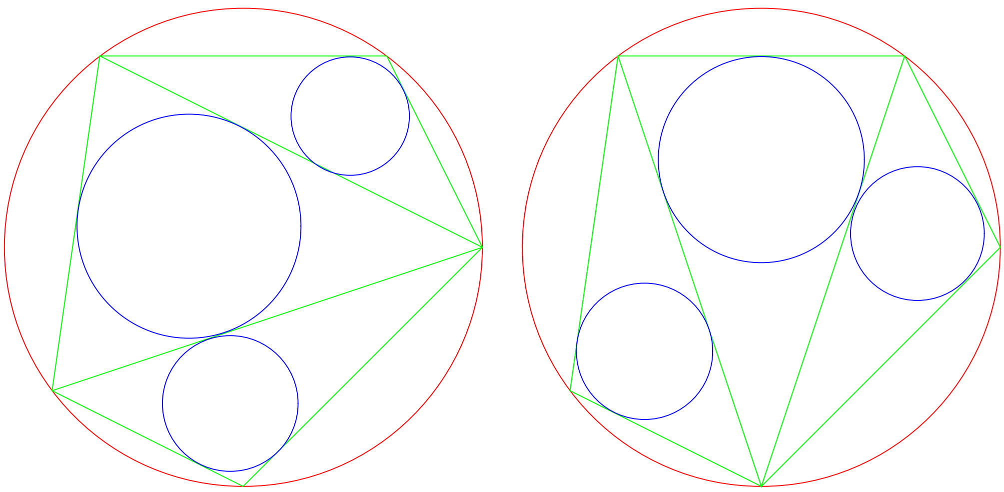
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 分數問題

1.1 一則分數問題

我們對圓周率 $\pi = 3.141592653\cdots$ 及自然指數 $e = 2.718281828$ 這兩個常數很熟悉。除此之外，還有一個很有名的尤拉常數 γ 是由極限定義來的：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \doteq 0.577215\cdots .$$

如果將分數和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

通分，化簡成最簡分數（設此最簡分數為 b_n/a_n）。我們所碰到的麻煩是 a_n 很大。不僅會讓你算到手軟，即使是利用電腦，也很容易超過電腦的負荷，使電腦當機。因此想要進一步的瞭解分數 b_n/a_n 的一些算術的性質，必須採取別的方式才行。下一個例題就是借助同餘的方法來探討這個重要的分數。在此之前，我們先將整數同餘的概念，推廣至分數同餘。假設 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ 是兩個分數。如果分數差 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ 通分後所得的最簡分數的分母不為 3 的倍數；但是分子卻是 3 的倍數，則我們計為如下的符號

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod 3.$$

例如

$$\frac{1}{4} \equiv -\frac{1}{5} \pmod 3,$$

這是因為

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}.$$

又

$$\frac{363}{140} \equiv 0 \pmod 3, \quad \frac{761}{280} \equiv -1 \pmod 3,$$

這是因為

$$\frac{363}{140}-0=\frac{3\cdot 121}{140}, \quad \frac{761}{280}+1=\frac{1041}{280}=\frac{3\cdot 347}{280}.$$

同理，很容易檢查

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &\equiv 0 \pmod 3,\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} &\equiv 0 \pmod 3,\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &\equiv -1 \pmod 3.
\end{aligned}$$

這三個分數同餘式子告訴我們：分數 $b_2/a_2, b_7/a_7$ 的分母 a_2, a_7 不是 3 的倍數；分子 b_2, b_7 卻是 3 的倍數，而 a_8, b_8 都不是 3 的倍數。

例題 **1.1** 設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。試確定所有 n 的值使得 $3 \mid b_n$。

【証明】由計算得知首兩個成立的正整數為 $n=2,7$ 且 $n=8$ 不成立，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &= \frac{3}{2},\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} &= \frac{363}{140},\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &= \frac{761}{280}.\end{aligned}$$

假設下一個成立的正整數 $n=3q+j>8\,(0\le j<3; q\ge 3)$。因為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\equiv\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\equiv\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\equiv\cdots\equiv 0 \pmod 3$$

所以

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q})+\frac{1}{3q+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3.$$

因此

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q}$$

的分子必為 3 的倍數才可能成立，即 $q=7$ 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} &\equiv \frac{1}{3}\left(\frac{363}{140}\right)+\frac{1}{21+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3\\ &\equiv -1+\frac{1}{21+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3.\end{aligned}$$

由簡易計算得 $j=1$，即 $n=22$ 且明顯的知道 $n=23$ 不成立。

利用同樣的方法設下一個成立的正整數為 $n=3q+j>23\;(0\le j<3; q\ge 8)$。因為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{3q+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j} \pmod 3,$$

所以同理得 $q=22$，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\\ &\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j} \pmod 3\\ &\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{17}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)\\ &\quad+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}\right)\\ &\quad+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j} \pmod 3\\ &\equiv\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\\ &\quad+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j} \pmod 3.\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j}\pmod 3.$$

由

$$\begin{aligned}
j=0 &\;\Rightarrow\; \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{66}\equiv 1 \pmod 3\\
j=1 &\;\Rightarrow\; \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{67}\equiv 2 \pmod 3\\
j=2 &\;\Rightarrow\; \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{68}\equiv 1 \pmod 3
\end{aligned}$$

知 j 值不存在。故僅 $n=2,7,22$ 三個正整數合乎所求。 ⊠

1.2 質數的倒數和發散

在證明下個定理之前，我們先介紹一個符號 $F_S(n)$。設 S 是由某些質數所構成的一個集合，函數 $F_S(n)$ 是指所有 $\leq n$ 且其質因數均落在 S 的正整數的個數。假設集合 S 的元素個數僅為有限個，因為每個正整數 x 均可表為 $x=sm^2\leq n$，其中 s 沒有平方因子，所以我們有

$$F_S(n)\leq 2^{|S|}\sqrt{n}.$$

定理 **1.1** 證明

$$\sum_{p\text{ 是質數}}\frac{1}{p}$$

發散。

【証明】假設

$$\sum_{p\text{ 是質數}}\frac{1}{p}$$

是收斂的，則必存在一個正整數 n_0 使得

$$\sum_{p\text{ 是質數},\ p>n_0}\frac{1}{p}<\frac{1}{2}.$$

現在令 $n_0\leq n$ 且 S 代表所有 $\leq n_0$ 的質數所構成的集合。考慮正整數 $m(1\leq m\leq n)$ 且 m 含有不在 S 的質因數；這樣子的 m 的個數有

$$n-F_S(n)\leq\sum_{\text{質數 }p>n_0}\left[\frac{n}{p}\right]\leq\sum_{\text{質數 }p>n_0}\frac{n}{p}<\frac{n}{2}\text{ 個。}$$

因此得到 $\frac{n}{2}\leq F_S(n)\leq 2^{|S|}\sqrt{n}\leq 2^{n_0-1}\sqrt{n}$，即 $\sqrt{n}\leq 2^{n_0}$；因為 n_0 是固定的，當 n 變大時就產生了矛盾。因此

$$\sum_{p\text{ 是質數}}\frac{1}{p}$$

發散。 ⊠

習題 **1.1** 設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。試確定 n 的值使得 $5 \mid b_n$。

習題 **1.2** 設 n 為正整數且 $n>1$。試證明

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不為正整數。

習題 **1.3** 設 n 為正整數且 $n>1$。試證明

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

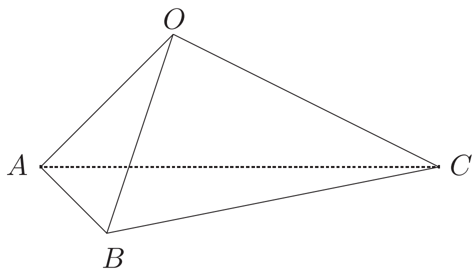
不為正整數。

動手玩數學

如圖：$O\text{-}ABC$ 是一個四面體且邊長為 $BC=a, OA=a'; AC=b, OB=b'; AB=c, OC=c'$。試證明：

$$a+a', b+b', c+c'$$

可構成一個三角形的三邊邊長。



挑戰題

設 n 為正整數，試證明

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots$$

不為 3 的倍數。

分數問題

設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。是否有無窮多個正整數 n 使得

$$11 \mid b_n.$$

經由計算看出，應該有無窮多個正整數 n 滿足上述條件。

$\boxed{\text{交錯分數的同餘定理}}$

設 p 是一個質數。柯能證明：

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k \cdot 2^k} \pmod{p}.$$

孫智偉證明：

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{3p}{4}\right]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k \cdot 2^k} \pmod{p}.$$