

國立台灣師範大學數學系
九十一學年度推薦甄選入學
指定項目甄試試題

壹、計算證明題（考試時間：2 小時）：

一、試求實數 a 的範圍，使得對每一個實數 x 都滿足

$$\log_a \frac{2x^2 + ax + 3}{x^2 + x + 2} \leq \log_a 3.$$

二、試找出所有的三位數，使其平方的末三位數等於本身。

三、試問有多少組不同的正整數解 (a, b, c, d, e) 滿足

$$(a + b + c - de)^2 = 2002(de - 112)^2.$$

四、試分別證明以下兩個性質：

(1) $\sin 11^\circ + \sin 14^\circ + \sin 20^\circ > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(2) 單位圓中任一內接三角形的面積與其三邊長乘積的比值恆為定值。

五、給定 c, d 兩正數，且設方程式 $x^2 - cx - d = 0$ 的兩實根為 α, β 。已知實數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足

$$a_{n+2} \leq ca_{n+1} + da_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

試證：可以找到兩正數 p, q 使得對每一個正整數 n 都滿足

$$a_n \leq p\alpha^n + q\beta^n.$$

貳、填充題（考試時間：120 分鐘）：

一、將全體正奇數分組如下： $\{1, 3\}, \{5, 7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19, 21, 23\}, \{25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}, \dots$ ，則第 n 組中的所有正奇數之和為 _____。

二、方程式

$$\sqrt[3]{(10+x)^2} + \sqrt[3]{(3+x)^2} = \sqrt[3]{(10+x)(-3-x)} + 7$$

的根為 _____。

三、西元 1943 年，第二次世界大戰還在激烈進行著。這時在英國軍營裡流傳著一個「用四個 4 來表出整數」的數學問題，為戰爭的緊張氣氛所繃緊的神經，找到了舒緩的機會。下面就是「用四個 4 來表出整數」的方法之一：令

$$a = \log_{\sqrt{4}} \left[\log_{\sqrt{4}} \left(\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}} \right) \right]$$

其中的 $\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}}$ 共含 2002 層二次根號，則 a 的值等於 _____。

四、設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} r & u & x \\ s & v & y \\ t & w & z \end{bmatrix}.$$

若 $AB = I_3$ ，其中 I_3 為三階單位矩陣，則 $y =$ _____。

五、都達家電維修服務中心共有四位技師。某日下午附近有四戶人家來電表示電視機需請技師維修，因為依規定服務中心隨時要有技師留守，所以中心決定派出其中三位技師前去服務，且每戶只去一位技師。試問四位技師的工作分配方法共 _____ 種。

六、若點 (u, v) 在橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 上，則 $uv + 4u + 6v + 1$ 的最大值等於 _____。

- 七、某四角錐的底面是邊長等於 1 的正方形，而每一側面都是腰長等於 2 的等腰三角形。設此四角錐中相鄰兩側面所夾的角（或稱二面角）為 θ ，則 $\cos \theta =$ _____。
- 八、在坐標平面上，已知二元二次方程式 $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x - 20y - 8 = 0$ 的圖形為拋物線，則其焦點的坐標為 _____。