

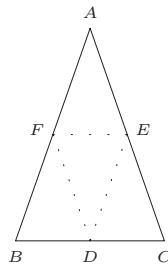
國立台灣師範大學數學系
九十二學年度推薦甄選入學
指定項目甄試試題

壹、計算證明題（考試時間：2 小時）：

- 一、(1) 設正整數 k 具有下述性質：「對每個正整數 n ， $9^n + 8n + 15$ 都是 2^k 的倍數。」試求出此種正整數 k 的最大值，並證明之。
- (2) 設 (1) 中所得的最大正整數為 m ，試說明 n 是哪些正整數時， $9^n + 8n + 15$ 是 2^m 的倍數、但不是 2^{m+1} 的倍數。
- 二、(1) 試證： $\cos \frac{\pi}{7}$ 是方程式 $8x^4 + 4x^3 - 8x - 3x + 1 = 0$ 的一根。
- (2) 試判定方程式 $8x^4 + 4x^3 - 8x - 3x + 1 = 0$ 共有多少個相異實根，並說明理由。
- 三、設 Γ 為一拋物線而 P 與 Q 為 Γ 上二相異點，過 Γ 的焦點 F 作一直線與 \overline{PQ} 垂直。若此垂直線與 Γ 的準線 l 交於點 K ，試證：過 K 而與準線垂直的直線必通過 \overline{PQ} 的中點。
- 四、甲乙兩人比賽投籃球，其規則如下：
- (a) 球投進時，就取得再投一球的資格；
- (b) 球未投進時，就喪失投球資格，換對方投球；
- (c) 先連進三球者獲勝。
- 設甲與乙投球能進籃的機率分別為 p 與 q ，而且由甲先投。試求甲獲勝的機率。
- 五、(1) 試求函數 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ 的最大值與最小值。
- (2) 試繪出函數 $g(x) = [\log_2 f(x)] + 2$ 的圖形，其中 $[a]$ 表示小於或等於 a 的最大整數。

貳、填充題（考試時間：120 分鐘）：

- 一、設 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x + 11$ ，試求 $f(2.002) \div$ (1) 。
（近似值精確到小數點後第三位）
- 二、若橢圓 $x^2 + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ 之圖形恆在拋物線 $y = ax^2 (a > 0)$ 圖形的上方，則 a 之值的範圍為 (2) 。
- 三、設 x 為任意實數，則函數 $f(x) = \frac{\cos x + 2 \sin x}{\cos x + 2 \sin x + 10}$ 的最大值為 (3) 。
- 四、若甲、乙、丙三人依甲乙丙甲乙丙……的順序擲一公正的骰子。先擲出 6 點者獲勝，問乙獲勝的機率為 (4) 。（化為最簡分數）
- 五、橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上的點到直線 $x + y = 10$ 的最短距離為 (5) 。
- 六、設 $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ ，則方程式 $\sin^2 \frac{y}{2} + \cos^2 x = 1$ 之圖形所圍成區域之面積為 (6) 。
- 七、如圖一所示， $\triangle ABC$ 為邊長 4, 6, 6 的等腰三角形，其三邊中點分別為 D, E, F ，沿著中點連線 DE, EF, FD 摺上來，使 A, B, C 三點重疊在 P 點成為一個四面體 $P-DEF$ 。試問此四面體的頂點 P 到底面 DEF 的高度為 (7) 。



圖一

- 八、小華和爸爸在玩井字遊戲（如圖二）。若是每回遊戲都把九格填滿（即九格中分別有『4 個○和 5 個X』或『5 個○和 4 個X』）共有 (8) 種不同的排法。（旋轉後看到的排法一樣時，視為同一種排法）

○	X	○
X	○	X
○	X	X

圖二