國立台灣師範大學數學系
九十三學年度推薦甄選入學
指定項目甄試試題

壹、計算證明題（考試時間：2 小時）：

一、 古埃及人將分子為 1，分母為正整數的分數稱為「么分數」，他們將么分數視為基本單位，而將一般的正分數表示成么分數的和。

若

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{21}, \frac{1}{b}$$

三個么分數依序形成等差數列，其中 a 與 b 是正整數且 $a < b$，則 a 與 b 的值分別為何？

二、 試討論 x 與 y 應滿足什麼條件，才能使不等式

$$\log_x(xy) \geq 4\log_{(xy)} y$$

成立。

三、 設 $0 \leq \theta < 2\pi$，則曲線 $(4 - 2\sin\theta)x^2 - (3\cos\theta)y = 0$ 與直線 $3x - y = 0$ 都有兩個交點（可能重合）。試問：當 θ 為何值時，這兩個交點的距離最大。

四、 已知雙曲線 $\Gamma : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 通過下述五個點：

$$P_1(0,1), P_2(0,-1), P_3(1,2), P_4(1,-2) \text{ 與 } P_5(-2,0),$$

試求雙曲線 Γ 的兩焦點座標。

五、 在某次網球友誼賽的兩場比賽中，一共準備了 12 顆網球，其中 7 顆是用過的球、 5 顆是新球。假設每顆球被取用的機率相等。

(1) 如果在第一場比賽中只用到 12 顆球的 3 顆，試求這 3 顆球都是新球的機率？

(2) 如果在第二場比賽中也只用到 12 顆球中的 3 顆，試求這 3 顆球在第二場比賽前都沒被用過的機率？

貳、填充題（考試時間：120 分鐘）：

一、 對於任意實數 x 而言，$2x^2+2(k-4)x+k$ 恆為正數，則 k 的範圍為 ＿(1)＿。

二、 設 a,b 為正整數，若 $a<b, 2a+5b=135$，且 a 與 b 的最小公倍數為 105，則數對 (a,b) 為 ＿(2)＿。

三、 若 $f(x)=123x^4-234x^3-345x^2+225x+100$，則 $f(3)$ 之值為 ＿(3)＿。

四、 假設 $(12,12\sqrt{3})$ 與 $(-12,-12\sqrt{3})$ 為平面上某一個橢圓之兩個焦點，而點 $(-5\sqrt{3},5)$ 落在這個橢圓上，則這個橢圓的內切圓之最大半徑為 ＿(4)＿。

五、 有一底半徑為 3、高為 4 的直圓錐面，若其內部有一球與底面相切，且與直圓錐面的切痕形成一個圓，則此圓的半徑為 ＿(5)＿。

六、 已知一正立方體的八個頂點的坐標如下：

$$(1,1,1),(-1,1,1,),(-1,-1,1),(1,-1,1),$$
$$(1,1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,-1),(1,-1,-1)$$

今有一平面 $x+2y+3z=4$ 與此正立方體相截，則其相截的截面面積為 ＿(6)＿。

七、 甲玩一種遊戲，勝敗的機率相等，勝則得 1 元，敗則失 1 元。若每回的勝敗獨立，當甲累積得 2 元或失 2 元則不再玩。已知甲玩第一回失 1 元，則最後甲得 2 元的機率為 ＿(7)＿。

八、 有五位同學，其中三位同學的身高分別為 171 公分，175 公分，176 公分，另兩位同學的身高分別為 ＿(8)＿ 時，這五位同學身高的標準差會最小。