

國立台灣師範大學數學系
九十四學年度推薦甄選入學
指定項目甄試試題

壹、計算證明題（考試時間：2 小時）：

- 一、在滿足不等式 $\log_{\frac{1}{6}}((x-3)(x+6)) \geq -2$ 的所有實數 x 中，哪一個實數 x 使函數

$$f(x) = \left(\log_3 \frac{|x|}{3} \right) (\log_3 |x|)$$

產生最大值？其最大值為何？

- 二、設 a, b, c 是滿足 $0 < a, b, c \leq \frac{1}{4}$ 的三個常數。試證：二次方程式

$$c(1-b)x^2 - (1-a-b-c+2bc)x + b(1-c) = 0$$

的根都是正實數。

- 三、小呆很迷糊，出門時忘記帶鑰匙的機率為 $\frac{1}{10}$ 。在記得帶鑰匙的情況下，卻有 $\frac{1}{5}$ 的機率會帶錯鑰匙。此外，小呆出門時忘記鎖門的機率為 $\frac{1}{2}$ 。在不考慮其他因素的假設下，回答下列兩個問題：

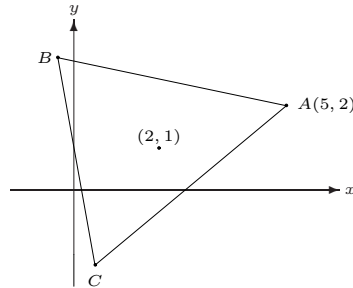
- (1) 小呆出門後，可以順利回到家裏的機率為何？
- (2) 在小呆出門後不能順利回到家裏的情況下，其原因是帶錯鑰匙的機率為何？

- 四、給定一拋物線 $\Gamma_1: y^2 = 8x$ 及其軸上一點 $N(10, 0)$ 。已知以 N 為圓心可作一圓 Γ_2 使得拋物線 Γ_1 與圓 Γ_2 相切於兩相異點，而且兩切點都不是拋物線 Γ_1 的頂點，則圓 Γ_2 的半徑為何？兩切點的坐標為何？（註：所謂兩曲線 Γ_1 與 Γ_2 相切於一點 P ，乃是指：曲線 Γ_1 過 P 的切線與曲線 Γ_2 過 P 的切線重合。）

- 五、若方程式 $2 \cos^2 x - \sin x + a = 0$ 在 $0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ 內恰有一個實根，則常數 a 之值為何？

貳、填充題（考試時間：120 分鐘）：

- 一、如下圖所示，正三角形 ABC 的重心坐標為 $(2, 1)$ ， A 點的坐標為 $(5, 2)$ ，則 B 點的坐標為 (1) 。



- 二、若兩拋物線 $y = x^2 + 2x - a$ 與 $y = -x^2 + 12x + (2a - 32)$ 的頂點在直線 $ax - 2y = 4$ 的異側，則常數 a 的範圍是 (2) 。

- 三、若函數 $f(x) = (\sqrt{3}\sin x - \cos x)\cos x, 0 \leq x \leq \pi$ ，在 $x = a$ 時有最大值 M ，則數對 $(a, M) =$ (3) 。

- 四、令 α, β 為方程式 $\log_2 x + \log_x 2 - 3 = 0$ 的兩根，則 $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha =$ (4) 。

- 五、甲乙兩人輪流擲骰子，每回擲兩顆公正的骰子。先擲出骰子點數和為 8 的人獲勝。若甲先擲，則比賽結果是乙在擲第 2 次時獲勝的機率是 (5) （以分數表示）。

- 六、以下分別是甲、乙、丙、丁四家商店某 15 個工作天之貨品銷售量：

甲：40, 49, 92, 20, 68, 56, 70, 97, 93, 18, 19, 65, 58, 34, 3.

乙：155, 164, 207, 135, 183, 171, 185, 212, 208, 133, 134, 180, 173, 149, 118.

丙：80, 98, 184, 40, 136, 112, 140, 194, 186, 36, 38, 130, 116, 68, 6.

丁：85, 103, 189, 45, 141, 117, 145, 199, 191, 41, 43, 135, 121, 73, 11.

下列關於這些商店這 15 天的銷售量之敘述，哪些正確？ (6) （可複選）

- (A) 甲店和乙店銷售量的標準差相等
- (B) 甲店和丙店銷售量的變異數相等
- (C) 甲店和丁店銷售量的標準差相等
- (D) 乙店和丙店銷售量的變異數相等
- (E) 乙店和丁店銷售量的標準差相等

- (F) 丙店和丁店銷售量的標準差相等
(G) 四家商店銷售量的變異數皆不相等

七、空間中有兩條直線 L_1 與 L_2 ， L_1 通過 $(0,0,0)$ 與 $(1,1,1)$ ， L_2 通過 $(1,1,0)$ 與 $(2,0,1)$ 。若點 P_1 在 L_1 上且點 P_2 在 L_2 上，則 P_1 到 P_2 距離的最小值為 (7) 。

八、

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \frac{11}{900} + \frac{13}{1764} + \frac{15}{3136} + \frac{17}{5184} + \frac{19}{8100} = \underline{\hspace{2cm}} \text{(8)}$$

(以最簡分數表示)。