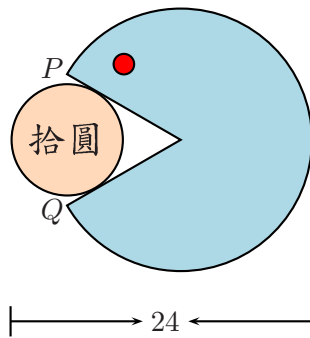


國立台灣師範大學數學系
九十五學年度推薦甄選入學
指定項目甄試試題

壹、計算證明題（考試時間：2 小時）：

- 一、設 θ 是位於第三象限的一個角，且 $\sin\theta\cos\theta = \frac{2}{5}$ ，試求 $5\cos\theta + 4\sin\theta$ 的所有可能值。
- 二、設 x 與 y 都是實數，且 $x^2 - xy + 4y^2 = 1$ ，試求 $x^2 + 4y^2$ 的最大值與最小值。
- 三、設 a, b 與 c 是都不等於 1 的相異正數。若 a, b 與 c 三數成等比數列，而 $\log_a b, \log_b c$ 與 $\log_c a$ 三數成等差數列，試求此等差數列的公差。
- 四、為了提醒同學某台自動販賣機會「吃錢」，班聯會想在機上漆一個小圓與一個缺六分之一圓的大圓相切的圖案，如下圖所示。基於空間考量，圖案的寬度要恰好 24 單位長，而且小圓必須與直線 PQ 有兩相異交點。漆大圓的油漆，每平方單位需要 6 元；漆小圓的油漆，每平方單位需要 45 元。試問兩圓的半徑分別為多少單位時油漆費用最少？



- 五、設一拋物線的頂點坐標為 $(1, -3)$ ，且對稱軸的方程式為 $2x + y + 1 = 0$ 。若此拋物線通過點 $(5, -3)$ ，試求此拋物線的方程式。

貳、填充題（考試時間：120 分鐘）：

- 一、設 a, b 為二實數，且方程式 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 有一根為 $1 + 2i$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 二、設 A, B, C, D 為單位圓上四點，且 AB 弧， BC 弧， CD 弧， DA 弧的長度比為 $1 : 2 : 4 : 5$ ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 三、給定空間二平面 $E_1 : 2x + y + z = 4, E_2 : x - 2y + 2z = 5$ ，則過點 $(1, 2, 3)$ 且與平面 E_1, E_2 垂直的平面方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 四、設 $f(t)$ 表示 $(0, 0)$ 到直線 $L_t : (3 \cos t)x + (5 \sin t)y = 15$ 的距離，則 $f(t)$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 五、有十個數 $a, b, c, d, e, f, 8, 11, 12, 17$ 。若此十個數的平均值和 a, b, c, d, e, f 六個數的平均值相等，且這兩組數的變異數也相等，則此變異數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 六、給定數列

$$\{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots, \overbrace{n, n, n, \dots, n}^{n \text{ 個 } n}, \dots\}.$$

此數列前 1000 項的和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 七、設函數 $f(x) = -\cos 4x + 10 \sin^2 x$ ，則 $f(x)$ 在區間 $0 \leq x \leq \pi$ 的最大值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- 八、隨意將編號 1 至 7 的七張卡片排成一列，恰有三張卡片所排的順序與它的編號相同的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。