台灣大學數學系八十九學年度大學推薦甄試
數學學科試題

☆☆☆筆試試題☆☆☆

1. 設 α, β 為 $x^2+\sqrt{10}x+2=0$ 的兩根，求

$$\left|\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}\right|$$

之值。

2. a. 設 $L_1: x+y=0$，以 L_1 為對稱軸，求點 $P(a,b)$ 的對稱點 Q 的座標。

   b. 設 $L_2: x+y=1$，以 L_2 為對稱軸，求點 $P(a,b)$ 的對稱點 R 的座標。

   c. 設 $\Gamma: y=x^2+2$，以 L_2 為對稱軸，試求拋物線 Γ 的對稱圖形的方程式。

3. 設 G 為三角形 $\triangle ABC$ 的重心，過 G 作任意直線與線段 AB, AC 分別交於 P, Q 且 $P \neq A, Q \neq A$。試證

$$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}$$

為定值。

4. 令 $f(x)=-x(x-1)(x+1)$。一質點在 x 軸上運動，在 t 時刻的位置是 $x(t)$，已知該質點的速度 $v(t)=\frac{dx(t)}{dx}$ 滿足 $v=f(x)$，即 $v(t)=f(x(t))$。

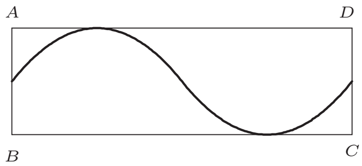
   a. 當 $x(0)>1$ 時，$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=?$

   b. 當 $0<x(0)<1$ 時，$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=?$

   c. 當 $-1<x(0)<0$ 時，$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=?$

   d. 當 $x(0)<-1$ 時，$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=?$

5. 如圖，$ABCD$ 為長方形紙張，$AD=2\pi, AB=2$ 其上繪有一條正弦曲線，將紙張由左向右捲起，捲成半徑為一的圓柱並讓 A, B 點分別與 D, C 點疊和。



a. 紙捲上的曲線是否在一平面上？

b. 紙捲上的曲線是否為一橢圓？如果是，長軸短軸各為多少？

6. 袋中起初有 3 個紅球，2 個白球。每次從袋中取出一球後，將此球以及與它同色的 5 個球（共六個球）一齊放回袋中。

   a. 試問第二次取出白球的機率為多少？

   b. 試問第三次取出白球的機率為多少？

   c. 由前兩小題的答案猜猜第 n 次取出白球的機率為多少？並請證明你（妳）的猜想。

   d. 若取出白球得 5 分，取出紅球得 8 分，則連續取球 5 次，總得分之期望值為若干？

☆☆☆口試試題☆☆☆

題目 A：設數列定義如下：

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1 \\
F_2 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

試證對任意自然數 n 恆有 $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$。

題目 B：如圖所示，有一寬為 a 之長紙條，自底端 DE 上任取一點 A，以 AB 為摺痕把 AEB 這一角摺起來，使 E 點合到紙條左邊的 C 點。當然 B, C 兩點隨 A 點變動而變動。問 A 要如何才可使 BC 最短。