

師父中的師父

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



目錄

1	數學遊戲的第一堂課	1
1.1	人生是彩色的，但頭腦卻是黑白的…思考黑、白相間的棋盤	2
1.2	串起黑、白兩色的念珠	2
1.3	再一次的接受考驗	3
1.4	對拆數進行觀察	4
1.5	可怕的對稱…捨就是得的考驗	5
1.6	需要更細微觀察的遊戲	6

1 數學遊戲的第一堂課



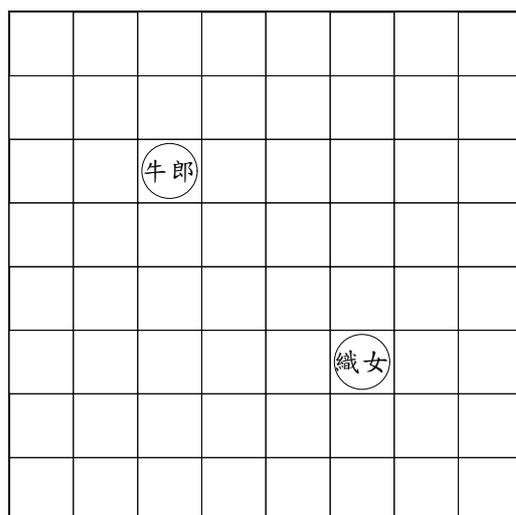
數學經文

是與非，對與錯，黑與白，輸與贏，愛與恨，情與仇是存在理性頭腦裡的兩端，就像銅板的正面與反面一樣。人的頭腦就在這樣的兩極擺盪，很難止於中間。當停止於中間的時刻發生時，一種清涼的瞥見就顯現了，但它依然只是一種可有可無的瞥見。

數學符號 \circ 與 \times ， $+1$ 與 -1 ，數字的奇數與偶數，跟黑與白一樣，都是文明的語言，也是頭腦的語言，所有受過邏輯訓練的人，都用這些符號來思考。當我們把心情與頭腦放鬆，超然、不做判斷的站在中線，且無時無刻的觀察這兩端所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。

題目：牛郎必須找到一條通向織女的道路，在抵達織女之前，他必須通過所有的格子各一次，而且僅能採取上、下、左、右的移動方式。

牛郎如何辦到呢？



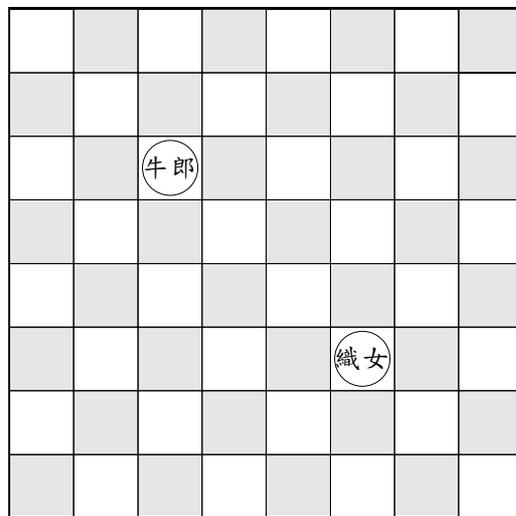
每一種活動都有學習它的第一堂課，例如理財有《理財的第一堂課》，修行有《修行的第一堂課》，上學有《開學的第一堂課》。

》，跳舞有《跳舞的第一堂課》。“入門”跟“第一堂課”是有相當差別的，入門是指基礎的訓練，從零開始的學習；而第一堂課則是告訴你這整個歷程的精髓在哪兒。所以第一堂課常常也是最後一堂課，因為重點都已經隱含在第一堂課的內容裡了，剩下的只是領悟與不斷的練習。一位好的老師或優秀的同學應該秉持著“入門”就是“第一堂課”，“第一堂課”就是“最後一堂課”的學習與教學的精神，這樣才能帶領你到那清涼的境界。

「旁觀者清、當局者迷」是棋藝遊戲的至理名言。在數學遊戲裡，當旁觀者，中立的第三者是至為重要的。當你想成那個玩的人，你就跟先玩者或後玩者有了認同，就容易陷入當局者迷的囚牢裡。所以跳脫出玩的人，而當超然、不做判斷的旁觀者，且無時無刻的觀察先玩者與後玩者出手後所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。現在就讓我們進入數學遊戲的第一堂課：

1.1 人生是彩色的，但頭腦卻是黑白的…思考黑、白相間的棋盤

西洋棋的棋盤就是由黑白兩種顏色的方格相間而成的棋盤。讓我們將這道遊戲的棋盤塗成西洋棋的棋盤形式：



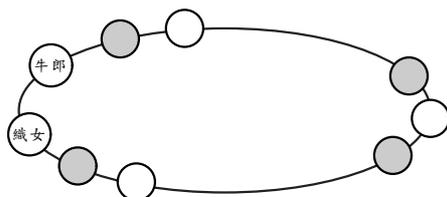
棋盤上有 32 塊黑色方格與 32 塊白色方格，牛郎與織女都站在白色方格上。

1.2 串起黑、白兩色的念珠

牛郎從自己所在的白色方格出發，因為白色方格的上、下、左、

右都是黑色方格，所以牛郎的下一站肯定是黑色方格，再下一站又回到白色方格，…，如此白、黑方格交錯出現，最後走到織女所在的白色方格。

如果將白色方格想成白色念珠，黑色方格當成黑色念珠，那麼牛郎依序走過的黑、白方格所串起的黑、白念珠將是如下的形狀：



仔細瞧瞧這串黑、白兩色相間的念珠，在牛郎與織女的位置卻是同樣的白色，其餘的位置都是黑、白兩色相間。顯然這串念珠的白色比黑色念珠多一粒，但這與白，黑色念珠都是 32 粒不合。因此，牛郎是不可能找到通往織女的路徑。 ☒

1.3 再一次的接受考驗

如果你能讀到這裡，且有所得，那很好。接下來給一則心靈與理性頭腦都受用的啟示：「每個人的腦中儲存了很多思想，每個思想就像一粒念珠，而思考就像線，有正向思考的人會拋棄沒用的念珠，而將有用的念珠用那條看不見的線串在一起。」

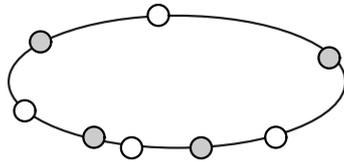
例題 1 如下圖所示，它是由七粒黑色珠子與八粒白兩色珠子所串起的念珠：



黑、白或白、黑念珠間的空隙稱為“槃涅空隙”。

給任意的黑、白兩色珠子（個數可以不一樣），無論以何種方式串起念珠，都會有偶數個槃涅空隙。

〔解〕因為黑色與黑色珠子間的空隙及白色與白色珠子間的空隙不是“繫涅空隙”，所以可以將相鄰的黑色珠子綁在一起，視為一粒黑色珠子，也將相鄰的白色珠子綁在一起，視為一粒白色珠子。以上圖為例，經過整理之後變成黑、白相間的一串念珠：



因為念珠黑、白相間，而且偶數個，所以產生偶數個“繫涅空隙”（繫涅空隙等於黑、白念珠的總數）。 ☒

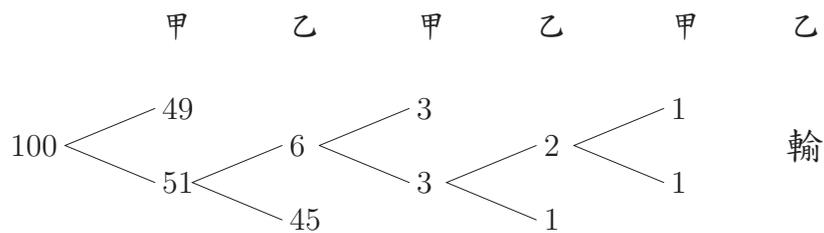
有了這經驗之後，請完成中興大學的推甄試題：

練習 1 在線段 AB 的兩端之間任意取 n 個點，則 AB 被分割成 $n+1$ 小段。將這 n 點任意標示為 A 或 B ，如圖所示。試證在這 $n+1$ 小段中，被標示為 AB 或 BA 的小段共有奇數個。



1.4 對拆數進行觀察

甲、乙兩人輪流拆數字，規則如下：甲先將 100 拆成兩個正整數的和，接下來乙從這兩個數字中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和；接著甲再從乙拆的兩數中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和， \dots ，一直繼續下去，直到有一方無法拆數，遊戲才停止。無法拆數的人輸。下圖是甲、乙兩人輪流拆數字的一個流程圖：



這流程圖代表的拆數過程為

- ① 甲將 100 拆成 49 與 51 的和；
- ② 乙選取 51，並將它拆成 6 與 45 的和；
- ③ 甲選取 6，並將它拆成 3 與 3 的和；
- ④ 乙選取 3，並將它拆成 1 與 2 的和；
- ⑤ 甲選取 2，並將它拆成 1 與 1 的和；
- ⑥ 乙僅能選取 1，但此時已不能拆了，故乙輸。

這道拆數遊戲在有限步驟下一定可以玩完，而且不會雙方平手。像這樣的遊戲常常是不公平的遊戲，也就是說，不是先玩者就是後玩者有必勝的策略，而這必勝的策略經常是需要用數學來呈現的：

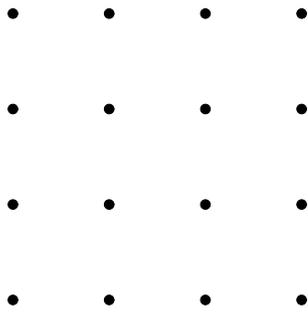
練習 2 找個對手一起玩，並思索到底是先玩者或者是後玩者有必勝的策略，又此必勝策略為何？

1.5 可怕的對稱…捨就是得的考驗

雖然「對稱」是很優美且容易的概念，但是「對稱」使用得當的話，它的威力是無窮且可怕的。就讓我們欣賞幾道與「對稱」沾上邊的數學遊戲，並欣賞「對稱」產生的美學。

流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。

因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且至少有一人佔有比較多的房子，也就是說不會平手。



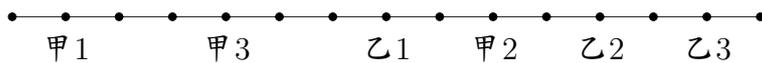
練習 3 試問：先畫或者後畫的人有必勝的策略，其策略又是什麼。

再來玩一道遊戲：

練習 4 如下圖所示，直線上有 15 個點，甲、乙兩個人輪流每次只能選取一個點（甲先玩、乙後玩），而且每次所新選取的點，不能在之前已選過的點的旁邊。最後當有人不能選取點的時候，那個人就輸了。



例如下圖是甲、乙選點的過程：



甲、乙兩人在經過三輪的選點後，甲已經無法再選點了，故乙贏得這遊戲。

試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

1.6 需要更細微觀察的遊戲

最後我們介紹一道需要細心觀察的遊戲：甲、乙兩人輪流選數字的遊戲，甲先選並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從



中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。下表是甲、乙兩人玩這遊戲的過程：

- ① 甲選 3；剩下數字為 17 ② 乙選 4；剩下數字為 13
 ③ 甲選 2；剩下數字為 11 ④ 乙選 5；剩下數字為 6
 ⑤ 甲選 3；剩下數字為 3 ⑥ 乙選 1；剩下數字為 2
 ⑦ 甲選 2；剩下數字為 0，故甲贏。

20	1	2	3	4	5	剩下數字
甲			●			17
乙				●		13
甲		●				11
乙					●	6
甲			●			3
乙	●					2
甲		●				0 (贏)

例題 2 試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

〔解〕分析如下：

- ① 先考慮哪些數字是乙（後玩者）會贏的數字，顯然 1, 2, 3, 4, 5 都是甲會贏；你可能以為 6 是乙會贏，其實不對，當甲先選 3 時，乙沒辦法選 3，只能選 1 或 2，故數字 6 還是甲會贏。
- ② 數字 7 是乙會贏的第一個數字（甲選 2, 3, 4, 5 時，乙選 5, 4, 3, 2；但是甲選 1 時，剩下的數字為 6，利用①的方法，乙可選 3 獲勝）。
- ③ 數字 8, 9, 10, 11, 12 是甲會贏的數字（甲分別選取 1, 2, 3, 4, 5 時，剩下的數字為 7，由②知道，甲會贏）。
- ④ 數字 13 是乙會贏的第二個數字。當甲選 1, 2, 4, 5 時，乙選 5, 4, 2, 1，此時剩下數字為 7，由②知道乙會贏；當甲選 3 時，剩下數字為 10，乙選 5，此時剩下數字為 5，因為甲不能選 5，故在甲選其餘數字之後，以可以將剩下的數字取完。

- ⑤ 數字 14, 15, 16, 17, 18 是甲會贏的數字（甲分別選取 1, 2, 3, 4, 5 時，剩下的數字為 13，由④知道，甲會贏）。
- ⑥ 數字 19 是甲會贏的數字（甲選取 3 時，剩下的數字為 16，此時乙不能選 3，故乙選 1, 2, 4, 5 時，乙選 2, 1, 5, 4，剩下的數字為 13 或 7，由④或②知道甲會贏）。
- ⑦ 數字 20 是乙會贏的第三個數字。當甲選 2, 3, 4, 5 時，乙選 5, 4, 3, 2，此時剩下數字為 13，由④知道乙會贏；當甲選 1 時，剩下數字為 19，由⑥知道乙會贏。

由①②③④⑤⑥⑦的分析得知：在限定數字是 20 的情形下，乙（後玩者）會贏

〔註〕乙（後玩者）會贏的數字依小到大分別為

$$7, 13 = 7+6, 20 = 7+6+7, 26 = 7+6+7+6, 33 = 7+6+7+6+7, \dots$$

