台北縣九十二學年度縣立高中職
數學科競賽試題（計算、證明題卷）

本試卷共有四題，總共五十分，將答案寫在答案卷上：

一、 在一容器內裝有濃度 10% 的溶液 100 公克，注入濃度為 40% 的溶液 25 公克，均勻攪拌後，再倒出混合液 25 公克。如此反覆進行下去。設 $a_n\%$ 代表稀釋 n 次後，溶液的濃度，並令 $a_0\% = 10\%$（溶液初始濃度）。

(1) 求 a_1 的值。（4 分）

(2) 列出 a_n 與 a_{n+1} 的相關式子。（4 分）

(3) 求 a_n 的一般公式。（7 分）

二、 設 q 為正整數，p 是滿足 $-q < p < q$ 的整數。令

$$\begin{aligned} a &= 3q; \\ b &= 4q - 2p; \\ c &= 5q - 4p. \end{aligned}$$

(1) 證明 a, b, c 構成三角形的三邊邊長。（4 分）

(2) 若 c 所對應的角為 $\angle C$，則求 $\cos\angle C$ 的值。（5 分）

(3) 設 α 是介於 -1 與 1 之間的有理數。證明可以找到一個三角形 ABC 使得 AB, BC, CA 都是有理數，而且

$$\cos\angle ACB = \alpha.$$

（6 分）

三、 小明的數學課本被頑皮的弟弟用黑色簽字筆塗成如下的樣子：

$$\begin{array}{rrrrr|r} & 1 & -1 & +5 & -11 & \bullet \\ +) & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline & 1 & \bullet & \bullet & \multicolumn{1}{|r}{+3} & \end{array}$$

若只知上式是綜合除法的演算式子，而且被塗黑的數都是實數，請你幫無奈的小明寫出原來的演算式。（10 分）

四、 已知 P_1, P_2 是三角形 ABC 內部的兩個點，且令 P_1 至 BC, CA, AB 的距離為 a_1, b_1, c_1，P_2 至 BC, CA, AB 的距離為 a_2, b_2, c_2。

設 P 是線段 P_1P_2 上的一點，而且滿足

$$\frac{P_1P}{P_1P_2} = \lambda.$$

若 P 至 BC, CA, AB 的距離為 a, b, c，則

(1) 證明

$$a = (1-\lambda)a_1 + \lambda a_2.$$

（4 分）

(2) 如果 P_1 至三角形 ABC 的三邊距離和與 P_2 至三角形 ABC 的三邊距離和都等於 s，那麼 P 至三角形 ABC 的三邊距離和也等於 s。（6 分）

參考答案

一、 (1) 根據題意

$$a_1\% = \frac{100 \cdot a_0\% + 25 \cdot 40\%}{125} \Rightarrow a_1 = 16.$$

(2) 根據題意

$$a_{n+1}\% = \frac{100 \cdot a_n\% + 25 \cdot 40\%}{125} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8.$$

(3) 將

$$a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 8$$

整理成

$$(a_{n+1} - 40) = \frac{4}{5}(a_n - 40).$$

由此關係式得知，數列 $\langle a_n - 40 \rangle$ 是首項為 $a_1 - 40 = 16 - 40 = -24$，公比 $\frac{4}{5}$ 的等比數列。故

$$a_n - 40 = (a_1 - 40)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

解得

$$a_n = 40 - 24\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 40 - 30\left(\frac{4}{5}\right)^{n}.$$

二、 (1) 由

$$\begin{aligned} a + b - c &= 2q + 2p > 0 \\ a - b + c &= 4q - 2p > 2q > 0 \\ -a + b + c &= 6q - 6p > 0 \end{aligned}$$

得知「正數 a, b, c 中，任何兩數的和大於第三數」，故 a, b, c 構成三角形的三邊邊長。

(2) 由餘弦定律知

$$\begin{aligned}\cos\angle C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{9q^2+(4q-2p)^2-(5q-4p)^2}{2(3q)(4q-2p)}\\ &= \frac{24pq-12p^2}{24q^2-12pq}\\ &= \frac{q}{p}.\end{aligned}$$

(3) 令 $\alpha=\frac{p}{q}$（其中 q 是正整數，p 是介於 $-q$ 與 q 之間的整數），且令 $AB=5q-4p, BC=3q, CA=4q-2p$。由 (1) 知道 AB, BC, CA 可以構成有理數邊的三角形 ABC，由 (2) 知道

$$\cos\angle ACB=\frac{p}{q}=\alpha.$$

三、 令 $f(x)=x^3-x^2+5x-11$，右上黑圓圈為 a。由綜合除法知道

$$x^3-x^2+5x-11=(x-a)\left(x^2+\bullet x+\bullet\right)+3,$$

即 $x-a$ 是

$$\left(x^3-x^2+5x-11\right)-3=x^3-x^2+5x-14$$

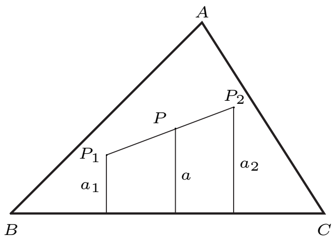
的因式。將 $x^3-x^2+5x-14$ 因式分解得到

$$x^3-x^2+5x-14=(x-2)\left(x^2+x+7\right).$$

因為實數 a 是 $(x-2)\left(x^2+x+7\right)=0$ 的一根，又 $x^2+x+7=0$ 的兩根 $\frac{-1-3\sqrt{3}i}{2}$ 都是複數根，所以 $a=2$。原式應為

$$\begin{array}{rrrrr|l} & 1 & -1 & +5 & -11 & 2\\ +) & & +2 & +2 & +14 & \\ \hline & 1 & +1 & +7 & \multicolumn{1}{|r|}{+3} & \\ \cline{5-5}\end{array}$$

四、 (1) 考慮下圖：



由相似性得到比例式如下

$$\lambda = \frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}$$

整理得到

$$a = (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2.$$

(2) 同 (1) 的方法可以得到另兩個等式如下

$$\begin{aligned} b &= (1 - \lambda)b_1 + \lambda b_2; \\ c &= (1 - \lambda)c_1 + \lambda c_2. \end{aligned}$$

將這三個等式相加得到

$$\begin{aligned} a + b + c &= (1 - \lambda)(a_1 + b_1 + c_1) + \lambda c_2(a_2 + b_2 + c_2) \\ &= (1 - \lambda)s + \lambda s \\ &= s, \end{aligned}$$

得證。