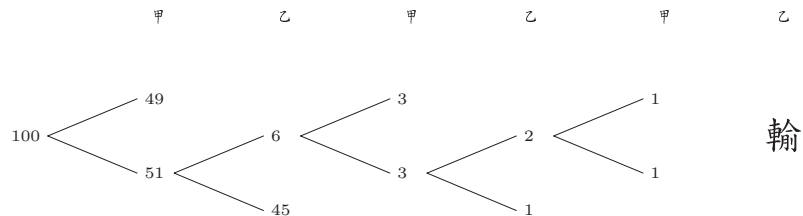


台北縣九十三學年度縣立高中職
數學科競賽試題（計算、證明題卷）

本試卷共有四題，總共五十分，將答案寫在答案卷上：

- 一、甲、乙兩人輪流拆數字，規則如下：甲先將 100 拆成兩個正整數的和，接下來乙從這兩個數字中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和；接著甲再從乙拆的兩數中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和， \dots ，一直繼續下去，直到有一方無法拆數，遊戲才停止。無法拆數的人輸。下圖是甲、乙兩人輪流拆數字的一個流程圖：



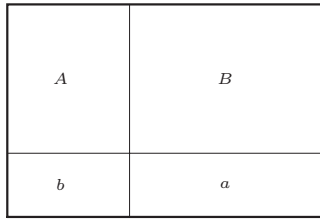
這流程圖代表的拆數過程為

- ① 甲將 100 拆成 49 與 51 的和；
- ② 乙選取 51，並將其拆成 6 與 45 的和；
- ③ 甲選取 6，並將其拆成 3 與 3 的和；
- ④ 乙選取 3，並將其拆成 1 與 2 的和；
- ⑤ 甲選取 2，並將其拆成 1 與 1 的和；
- ⑥ 乙僅能選取 1，但此時已不能拆了，故乙輸。

這道拆數遊戲在有限步驟下一定可以玩完，而且不會雙方平手。像這樣的遊戲常常是不公平的遊戲，也就是說，不是先玩者就是後玩者有必勝的策略，試問：先玩者或者是後玩者有必勝的策略，又此必勝策略為何？（14 分）

- 二、在實驗室做球的反彈實驗，當乒乓球從 30 公分高的地方放手讓球自然落下，第一次反彈高度為 24 公分，接下來都依此比例反彈，這樣的球才算合格的比賽用球。試問在第幾次反彈後，其高度會低於 3 公分。 $[\log_{10} 2 = 0.3010]$ （10 分）

- 三、如下圖



利用鉛直線與水平線將矩形分割成面積依序為 A, a, B, b 的四個矩形。

① 在何條件下， A, a, B, b 會滿足

$$a + A = bB.$$

② 在何條件下， A, a, B, b 會滿足

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}.$$

③ 在何條件下， A, a, B, b 會滿足

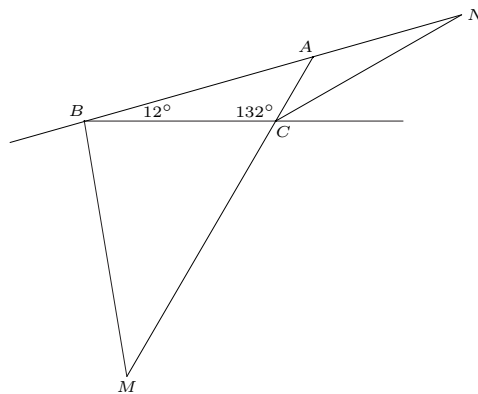
$$A - a = B - b.$$

④ 在何條件下， A, a, B, b 會滿足

$$aA = bB.$$

(12 分)

四、如下圖所示：



設 BM 與 CN 是三角形 ABC 的外角分角線。比較線段 BM 與 CN 的長度大小。(14 分)

參考答案

- 一、對正整數來說，每一個正偶整數都可以表成兩個正奇數的和，例如

$$2 = 1 + 1, 4 = 1 + 3, 6 = 1 + 5, 8 = 1 + 7, \dots;$$

而正奇數表成兩個正整數的和，其中必有一數是偶數，一數是奇數。

這拆數遊戲甲（先玩者）若將 100 拆成兩個正奇數的和，然後乙無論選那個奇數，其分解的數必有一正偶數，另一是正奇數：甲只需選那個正偶數，再將其分解成兩個正奇數的和，便立於不敗之地。

故甲（先玩者）有必勝的策略，其策略就是選取偶數，並將它分解成兩個正奇數的和。

- 二、由題目知道，合格的乒乓球每次反彈後的高度為前次的 $\frac{24}{30}$ 倍，假設反彈 k 次後，高度會低於 3 公分。可得到下列不等式

$$\begin{aligned} 30 \left(\frac{24}{30} \right)^k < 3 &\Rightarrow \left(\frac{4}{5} \right)^k < \frac{1}{10} \\ &\Rightarrow k \log \left(\frac{4}{5} \right) < -1 \\ &\Rightarrow k > \frac{-1}{\log \left(\frac{4}{5} \right)} \\ &\Rightarrow k > \frac{-1}{(2 \log 2) - (1 - \log 2)} \\ &\Rightarrow k > \frac{-1}{3 \log 2 - 1} \\ &\Rightarrow k > \frac{-1}{3 \times 0.3010 - 1} \\ &\Rightarrow k > 10.318. \end{aligned}$$

所以 k 至少為 11 次以上。

- 三、① 當鉛直線或水平線平分大矩形面積時，等式

$$a + A = bB$$

成立。

② 當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

成立。

③ 當鉛直線平分大矩形面積時，等式

$$A - a = B - b$$

成立。

④ 無論鉛直線或水平線為何，等式

$$aA = bB$$

恆成立。

四、因為 $\angle CBM = \frac{180^\circ - 12^\circ}{2} = 84^\circ$ ， $\angle BCM = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$ ，
所以

$$\angle BMC = 180^\circ - 84^\circ - 48^\circ = 48^\circ,$$

因此三角形 BMC 是等腰三角形，即 $BM = BC$ 。

因為 $\angle ACN = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ$ ， $\angle BAC = 180^\circ - 132^\circ - 12^\circ = 36^\circ$ ，所以

$$\angle BNC = 36^\circ - 12^\circ = 24^\circ,$$

因此三角形 BNC 是等腰三角形，即 $BC = CN$ 。

綜合得到 $BM = BC = CN$ 。