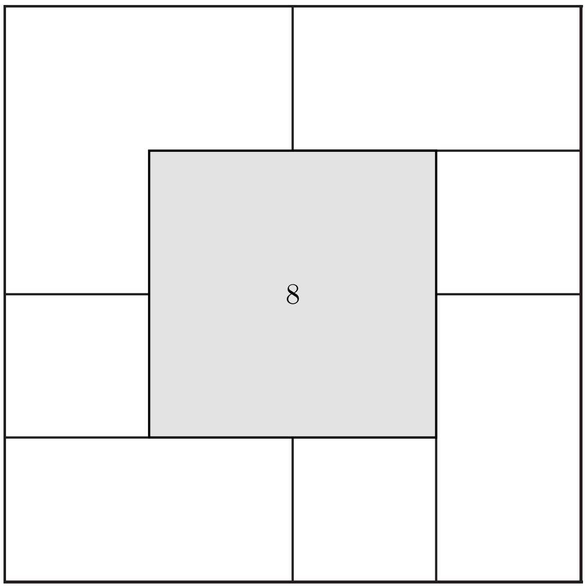
如何經營數理資優班

國立台灣師範大學數學系
許志農



八個全等的正方形一個放在另一個的上邊。如果數字 8 的正方形是最後放的，試確定其它 7 個正方形安放的順序，使得最終結果看上去像圖上那樣排列。

目 錄

最近幾年，各種資優班（數理，語文，美術，音樂，舞蹈，體育等）如雨後春筍般，在各個高中設立。學校為了招收資優生或留住優秀學生絞盡腦汁，而各學科為了派誰去教資優班，怎麼經營資優班傷透腦筋。很多學校把績優班當資優班來經營，也有學校把資優班想成績優班來訓練。

1 學校選才重點⋯重智慧，輕知識

天才‥是放對位置的人。知識是別人的，可以從書本得到的，而智慧是自己的創意或領悟，兩者有極大的差異。資優生的訓練除豐富的知識外，智慧的提升才是重點，有智慧才有巧思，才有創

意及創造力。因此，資優班的招生應以智慧的檢測為重，知識的要求為輔。

又以數理資優班為例，科學靠的是懷疑，沒有懷疑科學不會進步；相反的，宗教靠的是信任，沒有信任宗教性的體會不會發生。因此，數理資優班的選才應以具有高度懷疑眼光的學生為主，而教學應該是開放性的，而不是填鴨式的信任教學。就因為東方的教學太填鴨式了，所以東方的科學仍然停留在很原始的階段。

例如底下開放式的情境試題，適合考選資優生：

例題 **1** 一家庭（父親、母親和孩子們）去某地旅遊，甲旅行社說：「如果父親買全票一張，其餘人可享受半票優待」；乙旅行社說：「家庭旅行算團體票，按原價的六五優惠」。這兩家旅行社的原價是一樣的，試就家庭裡不同的孩子數，分別計算兩家旅行社的收費（建立運算式），並討論哪家旅行社更優惠。

進退場機制的建立：學校以學測成績或自己命題的成績錄取資優生，一年之後，必須考慮有些學生可能不適合在這個班級。這時退場機制的建立就很重要，否則學生與家長可能會形成複雜的問題。

2 專題研究或科展指導…途徑雖多，旅人卻少

科展研究必須有開始，既使那個開始是錯誤的也沒關係，通過錯誤，透過摸索，窮盡錯誤，窮盡摸索，常常可以找到正確的出口，也許在某個未知的，說不準的，難以預料的時刻，當摸索或思索達到頂峰的時候，你就會在那個出口上。這就是從事專題研究或科展的心路歷程，也是有系統科學研究的第一步。

對於專題研究的內容或科展題目要因材施教，因人給題，就如愛因斯坦說的：「科學研究好像鑽木板，有人喜歡鑽薄的，我喜歡鑽厚的」。學生也要有愛因斯坦的研究精神：「思考，思考，再思考」。

專題研究的內容可以是知識性或知識性的延申，而學生所從事的科展問題必須是具有智慧，創意或創新的問題。專題研究是讓學生吸取豐富知識或領會如何作研究的精神，重點在知識的吸取或經驗的累積，而科展是要求得到有智慧或創意的成果。

科展的結束才是問題的開始，國內許多科展，由於老師出力太多，導致學生只是把它當知識死背，就得到不錯的名次，甚至保

送大學。等到升學之後，問題就開始浮現了，無法適應保送的學系，或考試不如聯考進來的學生，這樣會導致很嚴重的挫折感。

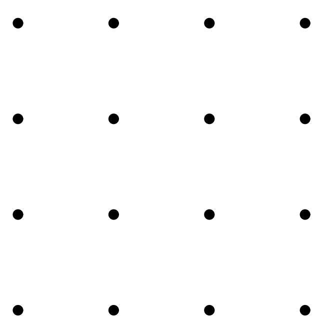
在最後一節（附錄）的內容就是可以當科展的教材。

3 充實課程…啟發重於記憶

資優課程設計所強調的是「質的提昇」而非「量的增多」，並應著重於獨立研究的能力與成果發表。舉例：對稱原理的教學實例：

例題 **2** 流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。

因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且至少有一人佔有比較多的房子，也就是說不會平手。試問：先畫或者後畫的人有必勝的策略。



教授與老師共同開發充實教材，搜集類似以上的例題，當作學生充實教材。

資優教育的方式可分成兩大類：加速教育與充實教育

(1) 加速教育：
加速教育是根據學生本身的能力，跨越年級限制，給予彈性及適性的教育，包括採用跳級、縮短修業、提早入學、進階預修等方式。

(2) 充實教育：
充實教育是在提供學生多樣化的學習內容及學習方式，以擴展其學習經驗，促進其才能發展。

4　經驗與資料的累積…永續傳承的重要

達賴喇嘛是第十四世的轉世活佛，如果妳相信轉世的話，那麼達賴就有六百多年的壽命了，在他腦裡累積的經驗，讀過的書籍與處理過的事物不知有多少，這也是藏傳佛教建立轉世這個概念的目的。

資優班的老師不可能永遠同一個，即使是，他也有退休的一天，因此將每年使用的教材，教授的演講講義，考試與競賽的試題，輔導學生的資料分門別類的管理，讓未來的老師可以輕鬆參考，是一項很重要的事情。我到過許多設有資優班的學校參觀過，在經驗與資料的永續傳承上，做得很好的並不多，大都由於當初沒有默契與共識，最後變成每個老師的資料不太願意提供出來（造成藏私現像）。

例如，一道不錯的科展常常第一年的學生只能得到部分成果，無法完成，如果就此放棄，太可惜，應該建檔以供後幾屆的學生參考。也許哪一屆的學生對這主題有興趣，可以有比較多的靈感，說不定會有進展，這樣下去，某一年就可以完成這不錯的科展題目。事實上，這成果是累積下來的，只是由最後完成的學生收穫而已。

除了不藏私外，讓不同學校的資優生彼此交流，也是一種不可避免的潮流。

5　教具與設備…書中自有黃金屋，網路可以一點通

資優班應有一專門的上課教室，適合讓學生分組研究，黑板也必須專門設計過。除此之外，還需有一間小型的圖書室，收集國內科普書籍，或科學教育館的歷居科展得獎作品，各種競賽試題等。

網路提供學生查閱資料的方便性與及時性，教室可以上網是基本要求。

6　水平與垂直之間…心智層面的函數

一個人的身體隨年紀增加稱為老化；而日常生活，應對進退多了之後，稱為成熟。將年紀用水平長度表示，成熟度用垂直高度刻畫，那麼成熟就是老化的函數，老化與年齡成正比，但成熟度不

一定與年齡成正比。每個人的函數高低不同，有人很快成熟，有人活到老還是像小孩子，天真無邪。

這情形也發生在學生，特別是資優生，智力與心理的成熟函數上。資優或績優生隨著智力密集訓練，或學校給予較多智慧的開發，在智力成熟度的成長上，遠優於一般生；但是，有好就有壞，在心理層面的成熟上可能就落差較大。如何讓智力與心理的這函數正常，是學校輔導單位與老師需注意及配合的。

7 榮譽與獎勵…自我回饋

資優班的老師需比教授其它普通班級的老師付出更多的心力與精神，同時學生也可以完成課業之外較多的工作。所以老師或學生有興趣可以申請或參與如下的獎勵，競賽或發表個人心得與文章：

☆ 教育部教學卓越獎；

☆ 國立台灣科學教育館舉辦的中華民國中小學教師自然科學與數學教學設計競賽；

☆ 高級中學數學、資訊及自然學科能力競賽（初、複與決賽）；

☆ 縣與全國科展；

☆ 旺宏科學獎；

☆ 全國高中高職數學作文競賽；

☆ 奧林匹亞競賽；

☆ 師鐸獎；

☆ 中小學數學教師創意教學競賽；

☆ 台灣區 TRML 高中數學競賽；

☆ 環球城市杯數學競賽；

☆ 發表文章於科教月刊，數學傳播，數學新天地…等。

8　結語…一場校長，老師，家長與學生深深互動的遊戲

資優班或者績優班就是一個遊戲，一場校長，老師，家長與學生彼此間必須互相信任的遊戲。遊戲的成功必定是四方的努力配合，遊戲的失敗也是四方想法不同，目標不一致所引起的。

最後以

模仿與跟隨只能當老師，
領悟與創新可以當師父，
融解的空就是師父中的師父

相勉。

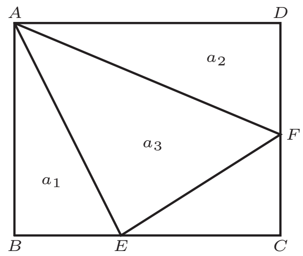
9 附錄 I：高斯五邊形定理⋯稀少，但成熟

「稀少，但成熟」是數學王子高斯的座右銘，高斯不僅是許多重要數學理論的原創者，在數論，算術與代數，實變與複變分析，機率論及平面幾何上，仍有許多高斯發現的小定理，正十七邊形可以尺規作圖就是一例。

在這裡，我們想介紹較少為人所知的另一個定理⋯高斯五邊形定理。這個定理跟古希臘的托勒密定理是等價的，也等價於接下來要介紹的 Monge 公式。 在介紹 Monge 公式與高斯五邊形定理之前，先談一個比較簡單的類似定理。

9.1 矩形定理

例題 **3** 如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 A 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

〔證明〕令 $BE = x, EC = y, DF = a, FC = b$，由

$$A + (a + b)(x + y) = 2A = 2(a_1 + a_2 + a_3) + by$$

知

$$A + ax + ay + bx + by = (a + b)x + a(x + y) + by + 2a_3.$$

整理得

$$A = ax + 2a_3.$$

故

$$\begin{aligned} A^2 &= axA + 2a_3A \\ &= x(a + b)a(x + y) + 2a_3A \\ &= (2a_1)(2a_2) + 2a_3A, \end{aligned}$$

即

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

$\boxtimes$

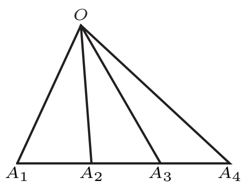
例題 3 是說，矩形面積 A 是以 a_1, a_2, a_3 為係數的二次方程式

$$x^2 - 2a_3x - 4a_1a_2 = 0$$

的一根。

9.2 Monge 公式

例題 4 〈圖一〉中的 A_2, A_3 是三角形 OA_1A_4 邊 A_1A_4 上的兩個點，〈圖二〉中的 A_1, A_2, A_3, A_4 是線段上的四個點，〈圖三〉中的 x_1, x_2, x_3, x_4 是數線上的四個點座標。



〈圖一〉

〈圖二〉

〈圖三〉

證明底下三個等式成立：

$$\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4;$$
$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 = A_1A_3 \cdot A_2A_4;$$
$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2).$$

〔證明〕如果令 $\triangle OA_1A_2 = p, \triangle OA_2A_3 = q, \triangle OA_3A_4 = r$，那麼第一個等式就相當於證明式子

$$pr + q(p + q + r) = (p + q)(q + r)$$

成立。但是它是一則恆等式，故一定相等。

將第一個等式的三角形面積用基本面積公式

$$\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$$

代入，因為它們的高都一樣，所以得到第二個等式成立。

將第二個等式中的線段長度改成數線上的座標相減得到第三個等式。 $\boxtimes$

事實上，上述三個恆等式與下列三角恆等式等價：

例題 **5** 若 α, β, γ 是任意三個角，則證明三角恆等式

$$\sin\alpha\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔證明〕在這裡提供兩種不同的解法：
〔解一〕利用例題 4 的結果，令 $\angle A_1OA_2 = \alpha, \angle A_2OA_3 = \beta, \angle A_3OA_4 = \gamma$。將等式

$$\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4$$

換成面積公式得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}OA_1OA_2\sin\alpha \cdot \frac{1}{2}OA_3OA_4\sin\gamma \\ &+ \frac{1}{2}OA_2OA_3\sin\beta \cdot \frac{1}{2}OA_1OA_4\sin(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= \frac{1}{2}OA_1OA_3\sin(\alpha+\beta) \cdot \frac{1}{2}OA_2OA_4\sin(\beta+\gamma). \end{aligned}$$

將兩邊同時除以 $\frac{1}{4}OA_1OA_2OA_3OA_4$ 得到

$$\sin\alpha\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔解二〕利用三角學的積化和差與和差化積公式，得到

$$\begin{aligned} &\sin\alpha\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta \\ &= -\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\gamma) \\ &\quad - \frac{1}{2}\cos(\alpha+2\beta+\gamma) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma) \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+2\beta+\gamma)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-2\sin\frac{(\alpha-\gamma)+(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\gamma)-(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\right] \\ &= -\sin(\alpha+\beta)\sin(-\beta-\gamma) \\ &= \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma). \end{aligned}$$

$\boxtimes$

例題 **6** (Monge 公式) 設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 是凸五邊形，令 $\pi_{ij}(1 \le i, j \le 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積。證明

$$\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{14}\pi_{23} = \pi_{13}\pi_{24}.$$

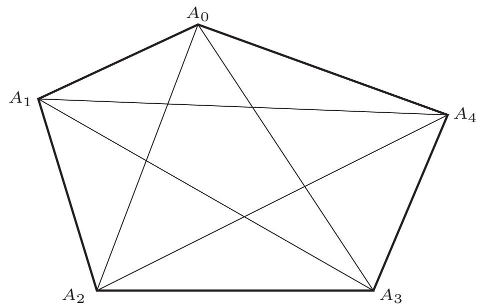
〔證明〕令 $\angle A_1A_0A_2 = \alpha, \angle A_2A_0A_3 = \beta, \angle A_3A_0A_4 = \gamma$，利用三角函數的面積公式得到

$$\begin{aligned}
&\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{14}\pi_{23} \\
&\quad = \frac{1}{2} A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times A_0A_4 \left[\sin\alpha\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\right] \\
&\quad = \frac{1}{2} A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times A_0A_4 \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) \\
&\quad = \pi_{13}\pi_{24}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

9.3 高斯五邊形定理

設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 為凸五邊形，三角形 $A_4A_0A_1$ 的面積為 a_0，$A_0A_1A_2$ 的面積為 a_1，$A_1A_2A_3$ 的面積為 a_2，$A_2A_3A_4$ 的面積為 a_3， $A_3A_4A_0$ 的面積為 a_4。



高斯證明五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積可以表成 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 的公式， 這就是有名的高斯五邊形面積公式：

定理 **1** 若令 A 是五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積，常數 c_1, c_2 定為

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \\
c_2 &= a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0,
\end{aligned}$$

則五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積 A 會滿足二次方程式

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

〔證明〕令 $\pi_{ij}(1 \le i, j \le 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積，則

$$
\begin{aligned}
\pi_{12} &= a_1;\\
\pi_{34} &= a_4;\\
\pi_{14} &= a_0;\\
\pi_{23} &= A - a_1 - a_4;\\
\pi_{13} &= A - a_2 - a_4;\\
\pi_{24} &= A - a_1 - a_3.
\end{aligned}
$$

利用Monge 公式得

$$a_1a_4 + a_0(A - a_1 - a_4) = (A - a_2 - a_4)(A - a_1 - a_3),$$

整理得

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

☒

想想看高斯問題的變形：如果令三角形

$$A_0A_2A_3, A_1A_3A_4, A_2A_4A_0, A_3A_0A_1, A_4A_1A_2$$

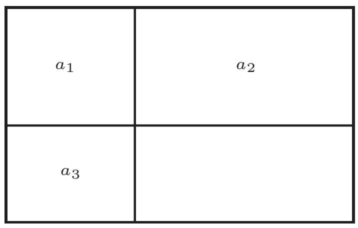
的面積依序為

$$a, b, c, d, e,$$

那麼五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積是否也可以表成以 a, b, c, d, e 為係數的二次方程式呢？類似這樣的問題就有很多可以探討了，甚至可以探討六，七，八，⋯邊形的情形。

思考問題

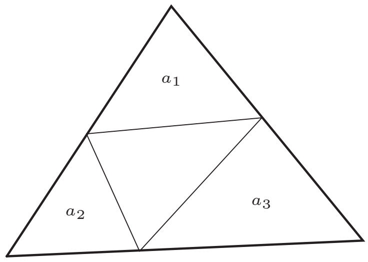
1 如下圖所示，面積為 A 的大矩形，被分割成四個小矩形，其中 a_1, a_2, a_3 為所在小矩形區域的面積。



證明

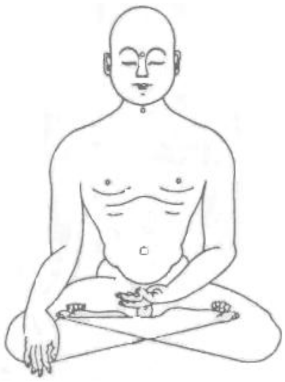
$$a_1(A - a_1) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

2 如下圖所示，三角形的面積為 A，三個角落的面積為 a_1, a_2, a_3：



試求 A, a_1, a_2, a_3 的關係。

10 附錄 II：用格子點串起的面積公式



數學經文

格子點，井然有序地座落在平面上的孤立點，他們沒有輕重之分，也無好壞之別。穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面⋯一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介。

欲瞭解幾何與代數的融合，需時常唸誦華羅庚的名言「數與形，本是相倚依，焉能分作兩邊飛，數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔裂分家萬是非，切莫記，幾何代數統一體，永遠聯繫，切莫分離。」

指考《數學乙》考過如下的填充題：
當平面上的點 (x, y) 之座標 x 與 y 都是整數，稱點 (x, y) 為格子點。數學家知道：座標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式

$$aS + bI + c$$

來表示，其中 S 代表三角形的周長上（三邊邊上）的格子點數，I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數，a, b, c 是固定的常數。求常數 a, b 與 c 的值。

這是有名的皮克公式，只需選定幾個以格子點為頂點的三角形便能求得公式中的常數 a, b 與 c 的值。現在讓我們以不同的角度來探索皮克公式！

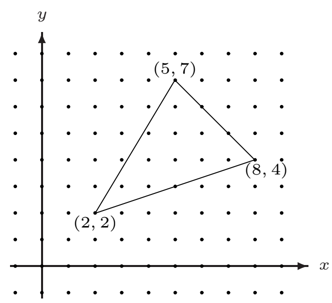
問題 1 (皮克公式) 以格子點為頂點的三角形面積可表為

$$\frac{S}{2} + I - 1$$

的形式。

10.1 井然有序的格子點

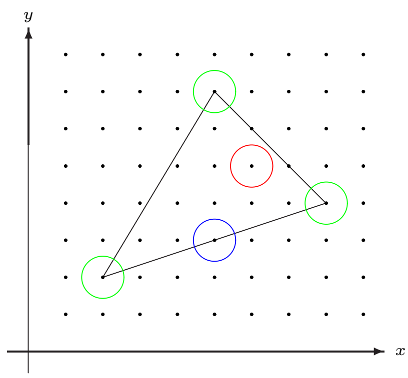
如下圖所示，x 與 y 座標都是整數的點（稱它們為格子點）井然有序的分佈於整個平面上：



觀察以格子點 $(2,2),(5,7),(8,4)$ 為頂點的三角形，內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。內部每個格子點附近的區域都在三角形內；而邊上的格子點中，在邊上但不是頂點的格子點附近幾乎有一半的區域在三角形內部，另一半在外部；但頂點附近，絕大部分的區域都在三角形外部。因此，三角形面積受其內部與邊上的格子點數影響。在下一小節中，我們將精細的討論這影響有多大。

10.2 用格子點串起的念珠⋯皮克公式

在前一小節中，我們將三角形內部或邊上的格子點區分成三類：內部格子點，邊上非頂點格子點與頂點格子點。現在各取一點為圓心，畫圓如下圖所示：



一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：
因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 I 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：

因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：

因為三內角和為 180°，所以三頂點附近的區域只能拼出 $\frac{1}{2}$ 單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

⊠

從“富有創意的思維”中，是否可以啟發你推導以格子點為頂點的四邊形，五邊形，⋯，甚至多邊形的面積公式呢？嘗試四邊形的情形看看！

練習 **1** 利用上述方法推導以格子點為頂點的四邊形面積公式（以符號 S, I 表示）。

10.3 師父中的師父

談到三角形的面積公式，不外乎會想到類似

$$\frac{底\times高}{2}, \frac{1}{2}ab\sin\angle C, \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

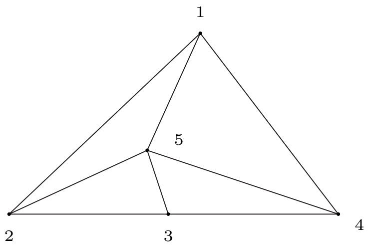
這樣的公式。這幾個面積公式的推導並不困難，而且其證明互有因果關係。不像皮克公式，自成一格，特別是公式中的常數 $\frac{1}{2}, 1, -1$ 充分反應了三角形內部、邊上與頂點這些格子點的份量。將幾何與代數完全融合，這也印證華羅庚說的「⋯數缺形時少直覺，形少數時難入微⋯」。皮克以三角形內部、邊上的格子點為珠子，然後用他腦中細微無形的線串出漂亮的「皮克公式」這串念珠。因此，皮克可以說是研究三角形面積公式的“師父中的師父”。

幾何圖形必須透過眼睛來欣賞與觀察，但是沒有耳朵的話，卻無法聆聽她所發出的天籟之音；同樣的，代數式子必須靠靈敏的耳朵來聆聽，但是沒有眼睛的話，卻無法看到她所呈現的美貌。

因此，「沒有幾何的代數是瞎子、沒有代數的幾何是聾子。」對一位眼、耳健全的人，不應輕易放棄她可以同時擁有欣賞與聆聽的本能。

你想當師父中的師父嗎？請完成底下的練習：

練習 2 (稜線定理) 十八世紀盛行的「三角測量」就是將欲丈量的凸多邊形切割成若干個小三角形來一一丈量。如下圖



就是一個三角形被切割成四個小三角形的情形，其中 $1, 2, 3, 4, 5$ 稱之為丈量點，兩丈量點之間的黑線（需丈量的線）稱之為丈量稜線（上圖中恰有 8 條丈量稜線）。

在丈量凸多邊形的所有丈量點數記為 B，內部（不含邊上）的丈量點數記為 I；所需丈量的丈量稜線數記為 S。

根據「三角測量」的經驗法則得知：會有實數 a, b, c 使得式子

$$S = aB + bI + c$$

恆成立。試以幾個實際的圖例求出 a, b, c 的值。

練習 3 (尤拉公式) 承練習 2 的符號，令丈量點與丈量稜線所分割出的三角形總數有 T 個。已知會有實數 a, b, c 使得式子

$$T = aB + bE + c$$

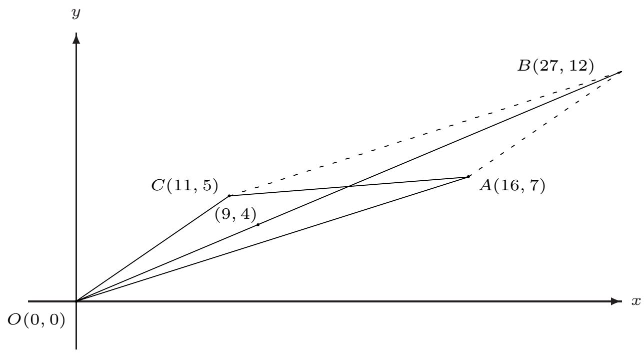
恆成立，試求 a, b, c 的值。

10.4 皮克公式的插曲

大家都很好奇「介於 $\frac{7}{16} < \frac{b}{a} < \frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$ 有無窮多個，究竟分母 a 最小的那個分數是誰呢？」你可曾想過皮克公式對這樣的問題是有幫助的。

請容許我先解釋一下這節中的部分數學經文「…穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面…一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介…。」

通過兩個格子點的直線之斜率剛好是“（兩格子點的 y 座標差）÷（兩格子點的 x 座標差）” 這個有理數。相反的，有理數 $\frac{7}{16}$ 與 $\frac{5}{11}$ 可以想成是通過 $(0,0),(16,7)$ 與通過 $(0,0),(11,5)$ 這兩條直線的斜率。 考慮下圖



① 四邊形 $OABC$ 是一個平行四邊形， B 點座標為

$$(27,12) = (16,7) + (11,5).$$

直線 OB 通過格子點 $(9,4)$，且該直線的斜率為 $\frac{4}{9}$。

② 三角形 OAC 的面積為

$$\frac{1}{2}|11 \cdot 7 - 16 \cdot 5| = \frac{3}{2}.$$

③ 三角形 OAC 的邊上格點僅頂點 3 個而已，根據皮克公式知道

$$\frac{3}{2} + I - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow I = 1.$$

因此三角形 OAC 的內部格子點數僅一點，即 $(9,4)$ 是三角形 OAC 內部唯一的格子點。

綜合得到：通過 $(0,0),(9,4)$ 的直線的斜率 $\frac{4}{9}$ 是介於 $\frac{7}{16} < \frac{b}{a} < \frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$，分母 a 最小的那個。故答案為

$$\frac{4}{9}.$$

⊠

練習 **4** 考慮底下兩個問題：

(1) 試求以 $(0,0),(8,5),(13,8)$ 為頂點的三角形內部格子點之數目。

(2) 求介於 $\frac{5}{8}$ 與 $\frac{8}{13}$ 之間分母最小的分數。

10.5 宰相肚裡可撐船

這節對皮克三角形面積公式

$$\frac{S}{2}+I-1$$

與練習 2 的稜線定理

$$S=2B+I-3$$

作解釋如下：

① 皮克公式 $\frac{S}{2}+I-1$：
由公式得知，三角形邊上每個格子點的貢獻是 $\frac{1}{2}$；但三角形內部的每個格子點之貢獻是 1。因此，內部格子點數越多的三角形，其面積就越大。

② 稜線定理 $S=2B+I-3$：
此公式說，邊上每設立一丈量點會貢獻出 2 條丈量稜線；但內部每設立一丈量點會貢獻出 3 條丈量稜線。欲使丈量稜線越少，應儘可能將丈量點設在邊上，不要設在內部。也就是說，內部丈量點越多的多邊形，其丈量稜線就越多。

10.6 廓庵十牛圖的啟示

從畢達哥拉斯的畢氏定理，將直角三角形與代數 $c^2=a^2+b^2$ 相連結，皮克公式，將格子點三角形面積與代數 $\frac{S}{2}+I-1$ 相連繫，到稜線定理，將多邊形與代數 $S=2B+I-3$ 相銜接，都讓華羅庚的名言「數缺形時少直覺，形少數時難入微」餘音繞樑，三月不止。這樣的例子不僅數學上有，其它領域也不遑多讓。在十二世紀時，宋朝廓庵禪師對修行、求法的過程作了前無古人，後無來者的妙喻，且讓我們接受他的點化吧！

《十牛圖》最初有八幅畫，不是十幅，它們不是佛教的，是道教的。它們的起始不詳，沒有人知道它們是怎麼開始的，誰畫出了第一幅牛圖。但在十二世紀，宋朝廓庵禪師把它們重畫了一遍，不僅如此，他還增加了兩幅畫，八幅變成了十幅。這十圖分別為一、尋牛，二、見跡，三、見牛，四、得牛，五、牧牛，六、騎牛歸家，七、忘牛存人，八、人牛俱忘，九、返本還源，十、入廛垂手。

廓庵畫《十牛圖》的目的，是為了探尋“禪宗的修行、求法”這不可表達的內在旅程作出獨特的嘗試。但他畫了《十牛圖》後並不滿足，於是他寫了詩來補充，作為附錄。首先他畫了這十幅圖畫；覺得不滿意，他寫了十首小詩，畫中缺了什麼，他就嘗試在詩歌中補充它們。他還是覺得不滿意。於是他又寫了十篇散文注釋。我知道他一定仍然覺得不滿意，但沒有什麼可做了。真實是博大的，表達是有限的，但他盡了最大的努力。

對修行者來說：「圖畫是無意識的語言，它是視覺化的語言；文字是有意識的語言，它是頭腦裡的語言；而詩歌是潛意識的語言，它是溝通圖與文字的橋樑。」圖、詩歌與文字都無法完全描述修行、求法的全部，但圖可以無限想像，可以給點暗示，詩歌與文字可以補充說明，兩者對內在旅程的探尋不無小補；但對數學家來說：「幾何是欣賞的語言，它是視覺化的語言；而代數是聆聽的語言，它是思考化的語言。」幾何圖形永遠無法十分精確，但提供無限的想像與漣漪，代數式子很難有浪漫的聯想，但提供慎密的解釋；因此幾何與代數的互補性足以刻畫科學的現象與性質。

在此提供《十牛圖》的幾個圖供參考，值得注意的是第八圖是個空圖，就是“空無”的意思。

第一圖：尋牛

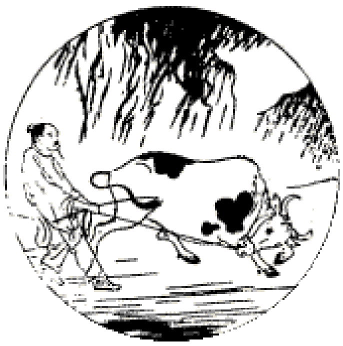
忙忙撥草去追尋，
水闊山遙路更深。
力盡神疲無處覓，
但聞楓樹晚蟬吟。

第二圖：見跡

水邊林下跡偏多，
芳草離披見也麼，
縱是深山更深處，
遼天鼻孔怎藏他?

第三圖：見牛

黃鶯枝上一聲聲，
日暖風和岸柳青，
只此更無回避處，
森森頭角畫難成。



第四圖：得牛

竭盡精神獲得渠，
心強力壯卒難除，
有時才到高原上，
又入煙雲深處居。

第五圖：牧牛

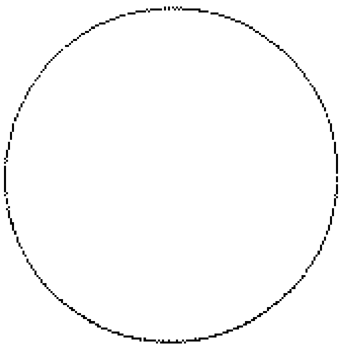
鞭索時時不離身，
恐伊縱步入埃塵，
相將牧得純和也，
羈鎖無拘自逐人。

第六圖：騎牛歸家

騎牛迤邐欲還家，
羌笛聲聲送晚霞。
一拍一歌無限意，
知音何必鼓唇牙。

第七圖：忘牛存人

騎牛已得到家山，
牛也空兮人也閑，
紅日三竿猶作夢，
鞭繩空頓草堂間。



第八圖：人牛俱忘

鞭索人牛盡屬空，
碧天廖廓信難通。
紅爐焰上爭熔雪，
到此方能合祖宗。

第九圖：返本還源
返本還源已費功，
爭如直下若盲聾，
庵中不見庵前物，
水自茫茫花自紅。

第十圖：入廛垂手
露胸跣足入廛來，
抹土涂灰笑滿腮。
不用神仙真秘訣，
直教枯木放花開。

10.7 途徑雖多，旅人卻少

在這章裡，用了三種不同的語言來描述數學，第一種是意識頭腦裡的語言（白話文），鉅細靡遺的描述了“皮克面積公式及其應用”；第二種是淺意識裡的語言（詩文），寫下模糊中帶有清晰，提示中帶有暗示的“數學經文”；第三種是無意識裡的語言（圖畫），借助廓庵禪師的《十牛圖》讓讀者對數學的學習，帶有“橫看成嶺，側成峰，高底遠近解讀各不同”的風韻，圖畫描述數學可虛擬，可實際，有模糊，有清晰，既提示，又暗示，讓人留下無限的解讀與想像空間。

頭腦清晰的人就可以用白話文這種語言描寫數學，這樣的人可以當老師；作點夢或喝點酒的人才能用詩文般的語言描述數學，就如同華羅庚的詩「數缺形時少直覺，形少數時難入微」一樣，這樣的人足以當師父；發點瘋的人可以用圖畫般的語言描述數學，就如同廓庵禪師用《十牛圖》描述“修行、求法”一樣，這樣的人就是師父中的師父。