台北市九十一年度資賦優異教育方案數學競賽
個人賽試題

第一部份：填充題（每題 12 分）

一、 從 2, 3, 5, 7, 9 五個數字中剔除一個數字之後，將剩下的四個數字經適當的排列後，得到一個完全平方數，試求此完全平方數。

も　答：________

二、 數學兼哲學家伽利略，於公元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁。出版《對話錄》一書到在獄中過世是伽利略人生中最灰暗的 10 年。

年輕的伽利略發明十倍率的望遠鏡，並在隔年就發現木星的歐羅巴衛星。發現衛星到接受審判剛好是他被監禁時間的三倍。事實上，發明望遠鏡到出版《對話錄》算是伽利略的黃金歲月，這段時間正好是他發現衛星時年齡的一半。試問：伽利略在哪一年發現歐羅巴衛星？

も　答：________

三、 甲乙丙丁戊五個小朋友原來在同一所幼稚園，現在他們都上小學了，分別在 A、B、C、D、E 五所學校。提示：

1. 丙丁不在 A 學校上學。
2. 甲丁不在 D 學校上學。
3. 丙和戊與在 E 學校上學的小朋友住在同一棟樓裡。
4. 丙經常和在 B 學校上學的小朋友一起做作功課，有時乙也在。
5. 甲和丙有空時，就找在 A、C 上學的小朋友一起玩。
6. 而且，丁和戊經常到 B 學校玩。
7. 但是，在 E 學校上學的小朋友從來不到 B 學校去玩。

將甲乙丙丁戊這五個人所就讀的學校，依序填在空格裡！

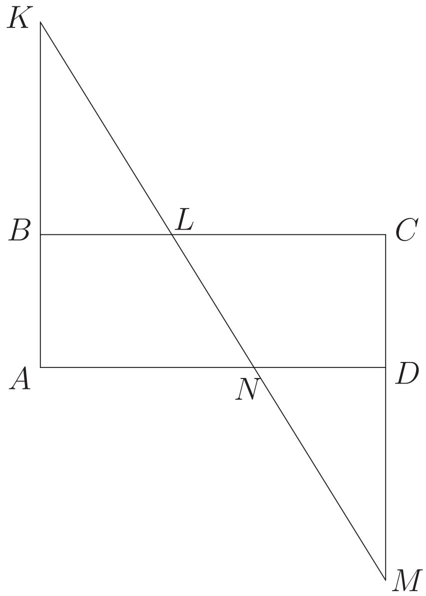
も

も　答：________

四、 如下圖：$ABCD$ 是一個矩形，$AB = BL = DN = a, BC = AK = CM = b\ \ (a < b)$，而且 K, L, N, M 四點共線。試求

$$\frac{b}{a}$$

的值。



ㄜ 答：________________

五、 化簡

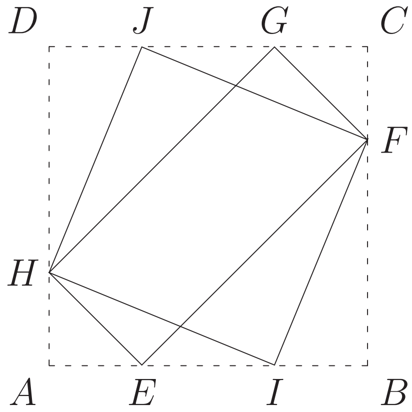
$$\frac{1+3+5+\cdots+999}{1001+1003+1005+\cdots+1999} = ?$$

ㄜ

ㄜ 答：________________

第二部份：計算證明題，共兩題。

壹、 如下圖，試證明：矩形 $EFGH$ 的面積 $+$ 矩形 $IFJH$ 的面積 $=$ 矩形 $ABCD$ 的面積。



（20 分）

貳、 設實數 a_1, a_2, b_1, b_2 滿足 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 及 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$。試證明：不等式

$$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$$

成立。（20 分）

參考解答

一、 $5329 = 73^2$。

二、 1610 年。

三、 BEDCA。

四、 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$。

五、 $\frac{1}{3}$。

壹、 假設 a, b, x, y, z 是如下圖所示的線段長。利用

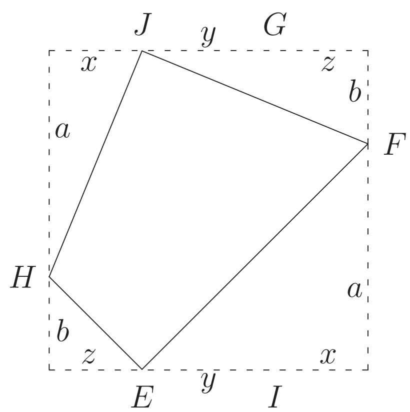
$$HF^2 = (a^2 + x^2) + \big((y+z)^2 + b^2\big) = \big(a^2 + (x+y)^2\big) + (z^2 + b^2) \Rightarrow x = z.$$

因此

$$\begin{aligned}
\text{四邊形 } ABCD \text{ 之面積} - \text{四邊形 } HEFJ \text{ 之面積}
&= \frac{ax + b(y+x) + a(x+y) + bx}{2} \\
&= \frac{(a+b)(2x+y)}{2} \\
&= \text{四邊形 } ABCD \text{ 面積的一半。}
\end{aligned}$$

所以

$$\text{矩形 } EFGH \text{ 之面積} + \text{矩形 } IFJH \text{ 之面積} = \text{矩形 } ABCD \text{ 之面積。}$$



貳、 【證法１】（數線思維）由 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2$ 得到

$$(a_1 - a_2)^2 \geq (b_1 - b_2)^2 \Rightarrow a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2.$$

再與不等式 $4a_1a_2 \geq 4b_1b_2$ 相加，得到

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 \Rightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq (b_1 + b_2)^2.$$

因為 $a_1+a_2>0, b_1+b_2>0$，所以 $a_1+a_2\ge b_1+b_2$。

【證法２】（數線思維）由 $a_1\ge b_1\ge b_2\ge a_2>0$ 得到

$$\sqrt{a_1}\ge\sqrt{b_1}\ge\sqrt{b_2}\ge\sqrt{a_2}>0\Rightarrow(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\ge(\sqrt{b_1}-\sqrt{b_2})^2$$

利用 $a_1a_2\ge b_1b_2>0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\ge 2(\sqrt{a_1a_2}-\sqrt{b_1b_2})\ge 0\\&\Rightarrow a_1+a_2\ge b_1+b_2.\end{aligned}$$

【證法３】（分數思維）由 $a_1a_2\ge b_1b_2>0$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1}\ge\frac{b_2}{a_2}&\Rightarrow\frac{a_1}{b_1}-1\ge\frac{b_2}{a_2}-1\\&\Rightarrow\frac{a_1-b_1}{b_1}\ge\frac{b_2-a_2}{a_2}\end{aligned}$$

利用 $b_1\ge a_2>0$

$$\Rightarrow\frac{a_1-b_1}{b_2-a_2}\ge\frac{b_1}{a_2}\ge 1$$

利用 $a_1-b_1\ge 0, b_2-a_2\ge 0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a_1-b_1\ge b_2-a_2\\&\Rightarrow a_1+a_2\ge b_1+b_2.\end{aligned}$$

【證法４】（代數思維）設

$$\begin{cases}x=a_1-b_1\ge 0,\\y=b_2-a_2\ge 0.\end{cases}$$

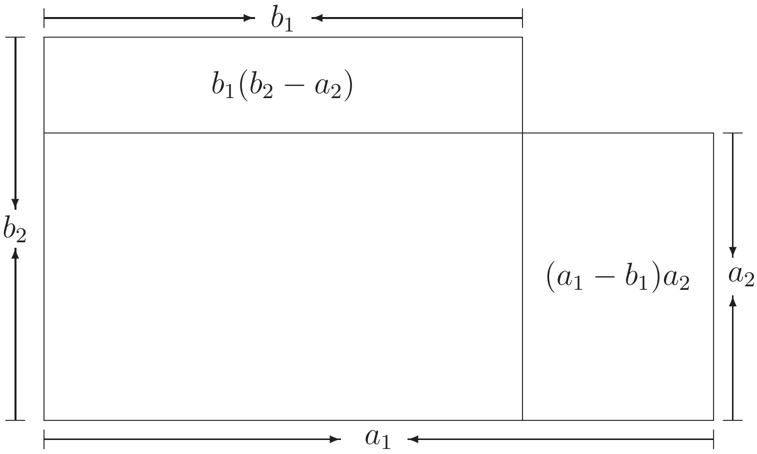
由 $a_1a_2\ge b_1b_2$ 推得

$$\begin{aligned}(b_1+x)(b_2-y)\ge b_1b_2&\Rightarrow xb_2-yb_1\ge xy\ge 0\\&\Rightarrow xb_2\ge yb_1\end{aligned}$$

利用 $b_1\ge b_2>0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x\ge y\\&\Rightarrow a_1-b_1\ge b_2-a_2\\&\Rightarrow a_1+a_2\ge b_1+b_2.\end{aligned}$$

【證法５】（幾何思維）考慮下圖：



由面積不等式 $a_1a_2 \geq b_1b_2$ 推得另一面積不等式

$$
\begin{aligned}
(a_1-b_1)a_2 \geq b_1(b_2-a_2) &\Rightarrow \frac{a_1-b_1}{b_2-a_2} \geq \frac{b_1}{a_2} \geq 1 \\
&\Rightarrow a_1-b_1 \geq b_2-a_2 \\
&\Rightarrow a_1+a_2 \geq b_1+b_2.
\end{aligned}
$$