1　來自巨人的投射

「站在巨人的肩上，可以看得更遠；來自巨人的投射，可以照得更亮」是學數學的人渴望有的際遇，想要獲得的加持；但是，巨人的肩膀容易攀爬嗎？巨人的“數光”會普照在每個人身上嗎？這裏要講的這道題目，其背後隱藏著一段與巨人有關的歷史；但是這題目本身卻只是巨人投射之下的一個簡單產物。雖然是個簡單的特例，但想要巧妙解決它，也必須是個奇人才辦得到。就讓我們開始吧！

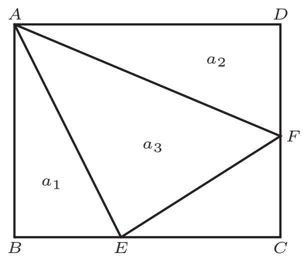
那是一個寒冷的午後，辦公室的電暖氣帶來一絲暖意，幫我工作的助理正打著電腦。幫我工作的助理有兩類，用嚴肅一點的話說，就是「有給職助理」與「無給職助理」兩種，有給職助理是數學系的大學生居多。這幾年經濟不是很好，清寒的優秀學生，可以當我的有給職助理，除了寒暑假幫我寫解答，校對數學資料，試讀一些文章外，最重要的要求，也是唯一條件，就是學期成績至少要達到八十五分以上（告訴你們一個秘密，其實她們常常都超過九十分，比我大學成績都還好）。至於無給職助理就是願意幫我，做牛做馬般，讀校第一手資料的老師了，順便對我的文章給些建議及看法，很感謝她們的付出。

手邊正在處理這期問題集的投稿，像過去一樣，快速的翻閱著老師或學生們的解答。說時遲，那時快，手與腦筋同時定格在一則吸引我的解答上，這在過去是從未發生過的事，原來這是個妙解，肯定出自奇人之手。心中雖然高興，為了順便檢定一下助理的功力，嘴裡說著「這幾個解答回去讀一下，把好的解答打下來」。這是我常用的一種測試，助理們大多不會讓我失望。幾天後，助理告訴我「那個解答特別妙，值得推薦，但是想不通那位老師如何想到這樣的解法」。就在幾天前，一個更寒冷的午後，在拜訪淡江鄭惟厚教授的路上，問題集企劃提起那個我建議刊登的解答，我半開玩笑的建議，應該在該解答的右上角加上一個“獎”字。

說到這妙解的題目那就更妙了，約莫半年前，彰師大科教中心主辦一場「中區數學新知研討會」，邀請我給個演講，希望談一些可以給中學教師拿去當科展教材，又具有數學深度的題目。

這讓我想起很久以前，在一本書裡看到，談論有關高斯五邊形面積公式的問題。印象中，它好像是說：「給定任意五邊形，相鄰三個頂點所形成的三角形稱為基本三角形，一共有五個基本三角形。高斯證明：五邊形的面積可以用這五個基本三角形的面積來表示。」至於如何表示，書裡並沒有細講了。經過我搜尋國外數學網站的結果，好不容易找到一篇談論“高斯五邊形面積公式”的文章。事實上，這五邊形的面積恰好是某個以基本三角形面積為係數的二次方程式之一根。有了這些資料，我就開始寫演講的講義。又有一個問題產生了，我不想一開始就導進高斯這個複雜的公式，想要先引一個簡單的例子，但相應的例子哪裡找呢？還好，在大陸《中學生數學雜誌》與北一女的數學競賽題目裡，我發現了一點跡象。站在巨人高斯的肩上（將面積與一元二次方程式扯上關係），我把這跡象投射到四邊形上，得到如下的例子：

如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 S 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

這就是數學問題集裡的題目敘述，同時也是那場演講的開胃菜。曲終人未散，戲棚下站久就是你的，為了回饋你的耐心跟毅力，我們就把奇人的智慧馬上揭曉吧！

投稿者的瞥見

將四條線段 CD, CB, CE, CF 配對相乘，得到等式

$$(CD \times CB) \cdot (CE \times CF) = (CD \times CE) \cdot (CB \times CF).$$

將它們轉換成面積，得

$$S \cdot (2(S - a_1 - a_2 - a_3)) = (S - 2a_1) \cdot (S - 2a_2).$$

整理得到

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

放個馬後炮，整個問題的關鍵點就是 E, F 兩個點，所以考慮從 C 點畫出的四條線段 CD, CB, CE, CF 的不同配對乘積是合情合理的想法。

練習 **1** 將二次方程式的兩個根求出，並確認何者才是面積 S 的值。

練習 **2** 當你具有投影面積的素質或向量內積的知識時，應該想想看！將矩形改成平行四邊形，這個恆等式是否依然成立。投稿者的解釋仍然適用嗎？