

1 喜歡香蕉的青蛙…一子棋的誘惑

古老的池塘，
青蛙跳入，
撲通！

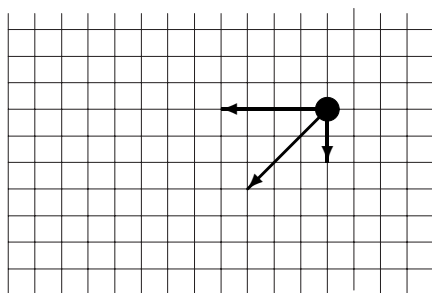
在這個古老池塘中有一個又一個的漣漪，它們是一個又一個的同心圓，這些圓是完整的，也是完美的。只有圓才能夠了解完美，古希臘的畢達哥拉斯知道，義大利的詩人但丁也清楚，

因此他們變得如此著迷於圓。

「青蛙」肯定是人的綽號，不會是名字。小時候，他的腿長苗窈，兩臂瘦小無肉。小學時，年輕的體育老師喜歡在沙坑裡練習跳遠，他也跟著練習，會跳的「青蛙」成為他的別號。小時候最容易吃到的免費水果，非香蕉莫屬，因為鄉下田間，常有土生土長的香蕉樹，把未熟的芭蕉摘下，放入米甕或者藏在稻草堆裡，讓它溫熟，漸漸的香蕉便成為青蛙的美食。上了大學的青蛙仍然無法忘懷香蕉這樣水果，為了贏得一串香蕉饗宴，不惜跟同學打賭，吃下十餘碗的飯。讓我來介紹這可愛的青蛙與可憐的香蕉，在服役期間所譜出的一段數學往事。

走過獅子鄉，踏進牡丹鄉，深入滿州鄉，繞回恆春東門城，進入靠海的車城，回到二重溪營區，是在南台灣服役所需面對的急行軍；繞過龍鸞潭，跑上關山看夕陽，駐守關山崖下山海里，則是最愉快的當兵日子。軍中的飯後水果常常是一根香蕉，在落山風相伴的晚上，思索著如何獲得比較多的香蕉，是無聊軍中生活裡的一大樂趣。諸葛孔明為了讓士兵們打發時間，發明「孔明棋」；而現在的我，為了從士兵手中贏得香蕉，「一子棋」就在我的數學頭腦裡誕生了：

題目：（一子棋遊戲）下圖是圍棋棋盤，一子棋是兩人玩的遊戲，甲先把一粒黑棋任意的擺放在棋盤的兩線交點上，擺好後，乙決定誰是先玩者，誰是後玩者。



遊戲規則如下：

- ① 先玩者與後玩者依序輪流移動黑棋。
- ② 可以向下，向左或向對角線方向移動任意格（如圖所示）。
- ③ 將黑棋移至左下頂點者贏。

對這樣的遊戲，贏的策略是什麼呢？

跟士兵們玩這道遊戲，表現出慷慨大方是需要的，可以讓士兵任意的擺放黑棋，由我決定誰先玩；若士兵想反過來讓我擺放黑棋，他來決定誰先玩，我也從善如流，只是我會將黑棋擺得遠遠的，知道贏的策略的我總是有辦法修正過來。印象中，從未在這一子棋遊戲失手過，我們的賭注當然是飯後的香蕉，這也是獲得比較多香蕉的方法。

事實上，“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：早期到美國討生活的華僑勞工，很多都從事鐵路工人，他們趁著休息時刻，經常玩“拈”這道遊戲，它的遊戲規則是這樣的：

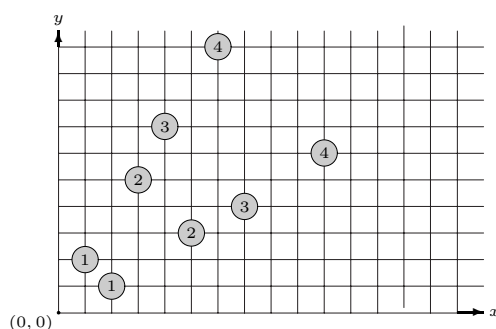
- (1) 先玩者與後玩者依序輪流拿取兩堆預先給定的石頭。
- (2) 可以從兩堆中的任一堆拿取任意顆的石頭或者同時從兩堆裡拿取石頭，但是拿取的個數必須一樣。
- (3) 最後將兩堆石頭取完者贏。

“一子棋遊戲”那三個條件幾乎是“拈”這三個條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐

標平面上操作，讓它較為數學化而已。現在就讓我們來談談“一子棋遊戲”的必勝策略吧！

青蛙的發現

“一子棋遊戲”對“拈”必勝策略的重新詮釋：把“拈”這道遊戲移植到坐標平面上玩，這對必勝策略的觀察是很有幫助的。首先將棋盤的左下頂點令為原點 $(0,0)$ ，棋盤最左邊的鉛直線是 y 軸，棋盤最下邊的水平線是 x 軸，棋盤就落在第一象限內：在此我們討論，當黑棋落在哪些坐標時，後玩者可以贏。



顯然，當黑棋落在 $(0,0)$ 點的向右水平方向，向上鉛直方向或右上對角方向時，先玩者一次移動就可以移到原點獲勝，所以把這三條射線上的點劃掉。剩下的點中，離原點最近的就是標號為 ① 的點 $(1,2)$ 與 $(2,1)$ ，這是後玩者可以贏的第一擺放位置。

接下來，將點 $(1,2)$ 與 $(2,1)$ 的向右水平方向，向上鉛直方向及右上對角方向的點劃掉，剩下的點中，離原點最近的就是標號為 ② 的點 $(3,5)$ 與 $(5,3)$ ，這是後玩者可以贏的第二擺放位置。

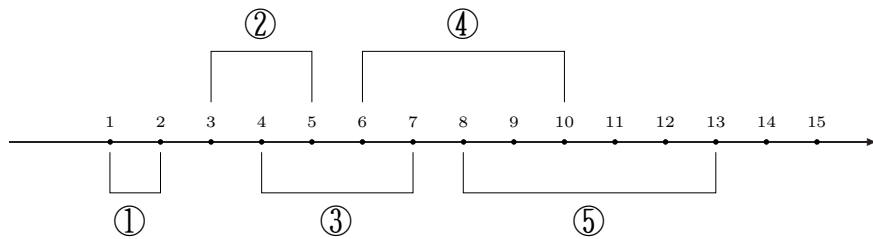
同樣的，將點 $(3,5)$ 與 $(5,3)$ 的向右水平方向，向上鉛直方向及右上對角方向的點劃掉，剩下的點中，離原點最近的就是標號為 ③ 的點 $(4,7)$ 與 $(7,4)$ ，這是後玩者可以贏的第三擺放位置。

如此繼續下去，就可以得到後玩者會贏的關鍵點， $(6,10), (10,6); (8,13), (13,8); \dots$ 。在玩的過程中，只需佔據這些要塞，必勝卷在握。

每次這樣的劃線刪除很費時間，這裡提出比較簡單的方法：將所有的正整數

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots$

標記在數線上如下



如上圖所示，從最小的 1 開始，取與它相距 1 單位的點 2 配成一對，得 $(1, 2)$ 與 $(2, 1)$ 。

接下來，從剩下最小的數 3 開始，取與它相距 2 單位的點 5 配成一對，得 $(3, 5)$ 與 $(5, 3)$ 。

同樣的，從剩下最小的數 4 開始，取與它相距 3 單位的點 7 配成一對，得 $(4, 7)$ 與 $(7, 4)$ 。

如此繼續下去，就可以得到更多的關鍵數對， $(6, 10)$, $(10, 6)$; $(8, 13)$, $(13, 8)$; \dots ; 等等。

從上述的分析得知，擺棋的人比較容易輸，因為誰先玩的控制權被不擺棋的人掌握。不過，因為這道遊戲的關鍵數對不容易發掘，所以初學者很難快速的體驗出贏的策略。這也是我選它來騙取香蕉的原因了。

七、八年後的一個下午，師大附中幾位參與奧林匹亞數學競賽的學生們，帶著一樣禮物到師大分部的辦公室找我。他們是聽從高中數學老師的指示，那個指示也是來自數學老師太太（我的大學同學）的命令，希望我笑納那神奇又特別的禮物…一串香蕉。

練習 1 在一子棋遊戲中，後玩者會贏的黑棋擺放點坐標（表成 x 坐標小於 y 坐標的形式）依序為

$$(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), \dots$$

求第十個坐標為何？

當兵時所留下有意義的東西都跟恆春有關，一樣是在山海里捕捉到的恆春長肛竹節蟲，我把牠做成標本框起來，框背題有「男兒有淚不輕彈」的話；另一樣則是一疊很厚，又泛黃的稿紙，那

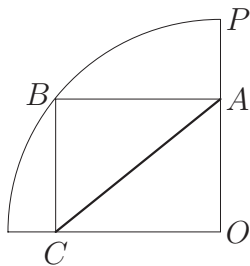
是放假時，躲在恆春圖書館寫下的數學稿子，它們都是一些收集來或自己編輯的數學問題。沒想過會在大學教書，當初都是設定給高中生做的題目，檢查稿子的日期才發現，原來這一工作持續到讀博士班時都還進行著。寫到這兒，忽然讓我想起三百年前的偉大數學家尤拉，他不僅多產（生產數百篇論文，也生產十三個小孩），也喜歡跟小孩及孫子玩數學遊戲，對青少年的數學啟發也很努力。

尤拉寫過《代數》這樣的高中數學書籍，也蒐集很多啟發青少年學習數學的趣味題。我在恆春圖書館的工作有點類似這樣的味道，當然我的題目跟尤拉蒐集的問題沒辦法比，這裡談的“一子棋遊戲”也是泛黃稿紙裡的一道遊戲題。

練習 2 甲、乙、丙三人在一起賭博，第一回合結束時，甲輸給其它兩人的錢數分別等他們手中的錢數；第二回合結束時，乙輸給其它兩人的錢數也等他們手中的錢數；第三回合結束時，丙輸給其它兩人的錢數又等他們手中的錢數。這時三人手中的錢數都是 24 萬元。

問：賭博前這三人手中各有多少錢？（尤拉蒐集題）

練習 3 (log 謎題) 下圖是一個四分之一圓，內有一個矩形 $OABC$ ，其中 $OA = \log 5$, $AP = \log 2$ ，求 AC 長度。



(1990. 1. 17 恆春圖書館)

練習 4 (年齡謎題) 阿草，阿花夫婦有個孩子叫阿樹。三十年前，阿草是阿花年齡的兩倍，現在，阿草的年齡是阿樹年齡的兩倍加上阿花的年齡。再過四年，阿樹的年齡會是阿草，阿花的年齡差。

試求阿花現在的年齡。（1989. 12. 29 山海里）