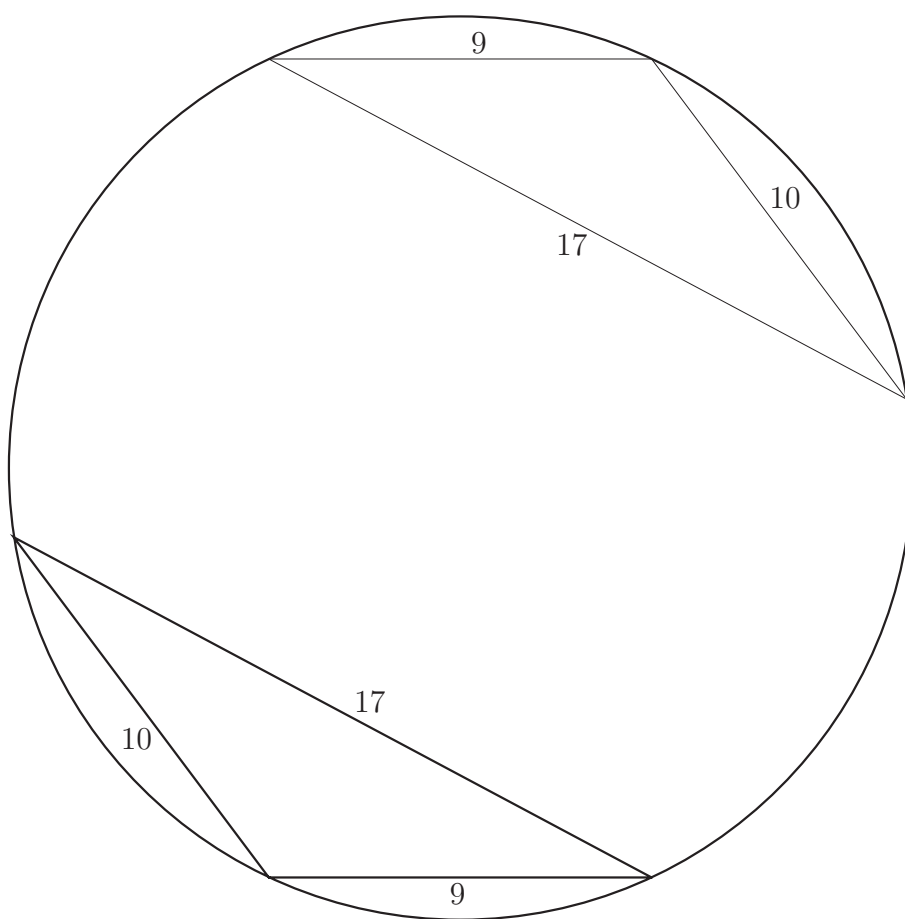


動手玩數學 (高一版)

許志農

國立台灣師範大學數學系

June 16, 2006



三角形的邊長、面積、三內角的三角函數值與外接圓半徑都是有理數

《動手玩數學》序

《動手玩數學》分為〈高一〉與〈高二〉兩冊，本書是第一冊，題目不是難、偏、怪，而是以啟發性，寓數學於趣味與娛樂之中為主。本書的每一回以高中數學的某章某節的數學概念為題，所精心設計出來的新穎數學趣題。前幾回算是國三升高一的銜接問題，其目的在於讓初中生快速養成具有思考與邏輯能力的學生。

《動手玩數學》每回的難度用顆星☆來呈現，從一顆星☆的入門題到五顆星☆☆☆☆☆的思考題都有。每一回分猜分成三部分，第一部份是題幹敘述與顆星設定，第二部份稱為〔玩鎖·玩索〕，是對題目的歷史背景做介紹，或對解題的方法提供提示，或者對所需的數學資料做溯源與整理的工作（包含擴張與延伸）。第三部份則是解答，為了讓學生真正的動手玩數學，第三部份的解答不在本書裡，而是放在本人的數學網站《師父中的師父》上，歡迎前往下載：

<http://math.ntnu.edu.tw/~maco/play.htm>

《動手玩數學》盡可能以自然科學資訊當背景、人文素養為材料、社會典故做情境，集結這三種模型開創高中數學問題的另一個平台。提供有以下需求的人使用：

- (1) 讓國中基測考上高中的國三學生有消暑之良方。（前 25 回）
- (2) 當國中升高中開學前的輔導或自行閱讀教材。（前 25 回）
- (3) 高一數理資優班的補充教材，每週一回的進度。
- (4) 高一寒、暑假指定閱讀書籍，本書可以順便溫習這一年所學的數學重點。
- (5) 中學老師出題或充實使用。

最後，感謝李坤峰老師的提供資料與校對，許琬青老師的意見與繪圖。

許志農 敬上

二〇〇六年六月

maco@math.ntnu.edu.tw

目 錄

1 進入高中數學的第一堂課	4
2 亂中有序的高一上學期	9
3 函數魅影的高一下學期	18

1 進入高中數學的第一堂課

這一部份所安排的《動手玩數學》以銜接國、高中的數學課程為主。將國中重實作與高中重思維結合在一塊，設計一些複習國中重要數學觀念與解題方法的遊戲，提供準備進入高中就讀的學生消暑。對以基測考上高中的國三學生，在等待上高中的這幾個月裡，也可以把這裡的數學遊戲當消遣時間的數學之旅。另一個目的是讓高中老師在暑假上課或開學前有豐富、有趣的數學問題可以教授與吸引學生。

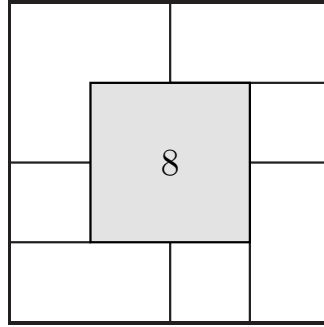
在此，通過數學遊戲的洗鍊，透過第一堂課的學習，讓他帶你進入高中數學的夢鄉。就讓我們開始把高中數學玩透透吧！



遊戲 1



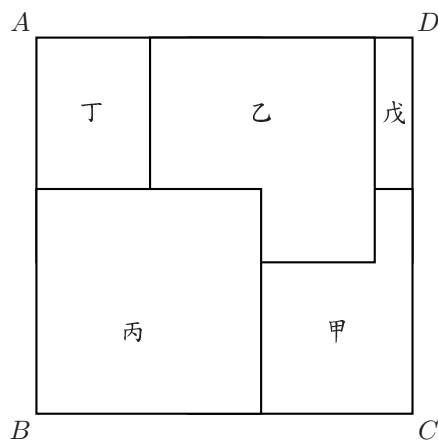
將八個全等的正方形堆疊在一起，如果數字 8 的正方形是最後放的，那麼確定其它 7 個正方形堆放的順序，使得最終看上去像圖中那樣的排列。



玩鎖·玩索

將每張正方形紙張先作編號，再針對兩個編號的紙張進行比較，考慮兩張紙張的先後重疊次序，就可以歸納出八張紙張重疊次序了。

如果時間充足，不妨想想底下這道出自日本小學數學競賽的延伸題（面積的數據經本人稍作美化）：有五張大小相同的正方形摺紙甲、乙、丙、丁、戊，按某種次序重疊，拼成一個大正方形 $ABCD$ ，如下圖所示。



此時，從上面看到甲、乙、丙部分的面積分別為

甲：18 平方公分；

乙：30 平方公分；

丙：36 平方公分。

從上面看到丁與戊部分的面積，各為多少呢？



遊戲 2

☆☆☆

藍委員半夜患了急性盲腸炎，需馬上動手術，但是他同時感染了一種具有高度傳染力的皮膚病。為了慎重起見，三位住院醫師依序輪流進去幫他動手術。每位動手術的醫師雙手必須戴手套，而且藍委員的皮膚病一定會污染使用過手套的外部。



除了藍委員外，三位住院醫師可能有一位也已經得了這種皮膚病，但我們並不清楚是哪一位醫師得這種皮膚病。正當手術要進行時，護士才發現只有兩副消過毒的手套可用，而且手術馬上要進行，已經沒時間消毒或再準備手套了。

為了不讓醫師互相感染皮膚病，該如何使用手套呢？護士說她知道。你知道嗎？

玩鎖・玩索

百密必有一疏是這道遊戲的寫照，很多學生想了一些情況之後就認定此遊戲無解。事實上，學生經常是漏掉或疏忽可能發生的不尋常情況。當你不得其解時，應該將所有可能的戴法思索一遍，答案一定可以找著。這道題目是在台北市某國小教書的洪淑琳網友問我的，她說這道問題是台北美國學校七年級的數學功課。本人將題目的情境稍作修改，取闌尾炎的諧音藍委員。

這道遊戲可以延伸一下：當醫生人數是 4 人時，想要安全完成手術，所需的最少手套數量是多少呢？依此可以推廣到 n 個醫生的一般情況。有興趣做專題研究或數學科展的同學，不妨想想看！

2 亂中有序的高一上學期

高一上學期的數學課程將對國中學過的整數，有理數，無理數，數列，二次函數與多項式進行補強與延伸。也會談到更深入的許多定理及算法，會讓學生覺得第一冊很雜，沒系統。這裡是根據教育部《九五暫綱》的第一冊章節次序，設計與研發許多有趣與值得進一步思考的相關數學問題或遊戲。你可以與第一冊的上課內容同步學習這裡的數學遊戲。



遊戲 3



紙張的尺寸分為國際標準組織尺寸和我國慣用尺寸兩種，而國內通用尺寸主要有「菊版紙」與「四六版紙」兩大類。若依面積來說，則最大的紙張稱為全開，其次有 2 開，3 開，4 開， \dots ，128 開等的對應紙張。菊版紙的全開是 25×35 （以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開（有時稱對開），3 開，4 開，8 開，12 開，16 開，20 開的大小列表如下圖所示。

規格 開數	英吋
全開	25×35
2 開	$25 \times 17\frac{1}{2}$
3 開	$25 \times 11\frac{2}{3}$
4 開	$12\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$
8 開	$12\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{4}$
12 開	$8\frac{1}{3} \times 8\frac{3}{4}$
16 開	$6\frac{1}{4} \times 8\frac{3}{4}$
20 開	$6\frac{1}{4} \times 7$

利用正整數因數分解的知識，對各種菊版紙的尺寸給個數學公式，又某人訂做名片，經計算得知名片的面積是 12.5 平方英吋，若該名片是採菊版紙製作，則此人的名片是幾開菊版紙。

~~~~~ 玩鎖・玩索 ~~~~~

九十五學年度學科能力測驗《數學考科》多選題第 11 題就是這遊戲的最好提示：

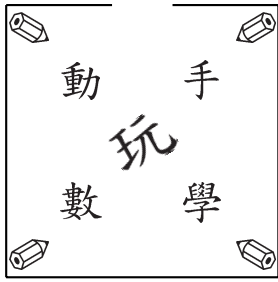
將正整數 18 分解成兩個正整數的乘積有

$$1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6$$

三種，又  $3 \times 6$  是這三種分解中，兩數的差最小的，我們稱  $3 \times 6$  為 18 的最佳分解。當  $p \times q (p \leq q)$  是正整數  $n$  的最佳分解時，我們規定函數  $F(n) = \frac{p}{q}$ ，例如  $F(18) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

下列有關函數  $F(n)$  的敘述，何者正確？

- (1)  $F(4) = 1$ 。
- (2)  $F(24) = \frac{3}{8}$ 。
- (3)  $F(27) = \frac{1}{3}$ 。
- (4) 若  $n$  是一個質數，則  $F(n) = \frac{1}{n}$ 。
- (5) 若  $n$  是一個完全平方數，則  $F(n) = 1$ 。



遊戲 4



設  $abc$  是一個三位數的正整數。我們都知道

- (1)  $abc$  是否為偶數，只需判斷  $c$  是否為偶數即可。
- (2)  $abc$  是否為 3 的倍數，只需判斷  $a + b + c$  是否為 3 的倍數即可。
- (3)  $abc$  是否為 9 的倍數，只需判斷  $a + b + c$  是否為 9 的倍數即可。
- (4)  $abc$  是否為 11 的倍數，只需判斷  $a - b + c$  是否為 11 的倍數即可。

除了這四個之外，相信很多人也記得 5 的倍數與 13 的倍數之判別方法。但是，你會 19 的倍數之判別方法嗎？請你檢驗底下的判別方法：

$$19|abc \Leftrightarrow 19|(10a + b + 2c),$$

也就是說， $abc$  是否為 19 的倍數，只需判斷  $10a + b + 2c$  是否為 19 的倍數即可。

## 玩鎖・玩索

判斷一個大的數是否為某數的倍數之判別方法是學習整數性質很重要的一環。上述判別 2, 3, 9, 11, 13 的倍數判別法不僅對三位數正整數適用，還可以推廣到一般的情形。關於這些判別方法的推理或證明，都需要用到整數的一個相當重要之除法性質：

$$d|a, d|b \Rightarrow d|(am + bn).$$

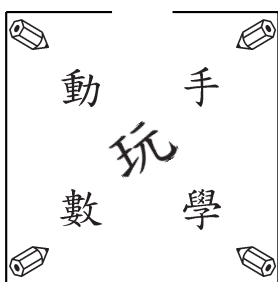
有關 19 倍數的判別法可以推廣為： $n + 1$  位的正整數

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

是 19 的倍數之判別方法為

$$10a_n + 2^0 a_{n-1} + 2^1 a_{n-2} + \cdots + 2^{n-2} a_1 + 2^{n-1} a_0$$

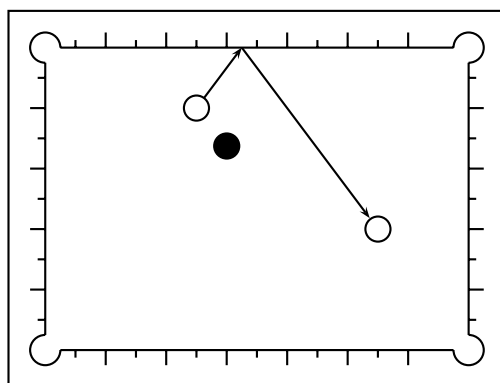
也是 19 的倍數。看了這個神奇的判別方法後，關於其它數的倍數判別方法，你有辦法挖掘嗎？



遊戲 5

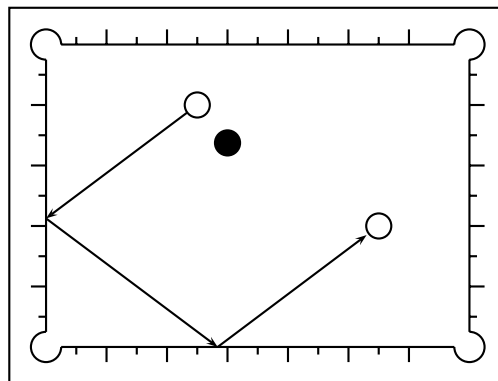
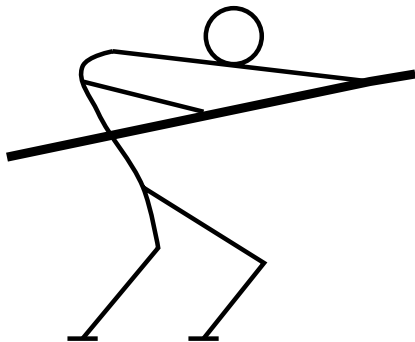


看過我國十六歲泰山神童吳珈慶打撞球嗎？當標的球被黑球擋住去路時，跳球（越過黑球上空）或間接擊球（碰撞檯邊再反射撞球）是常用的兩種擊球方法。



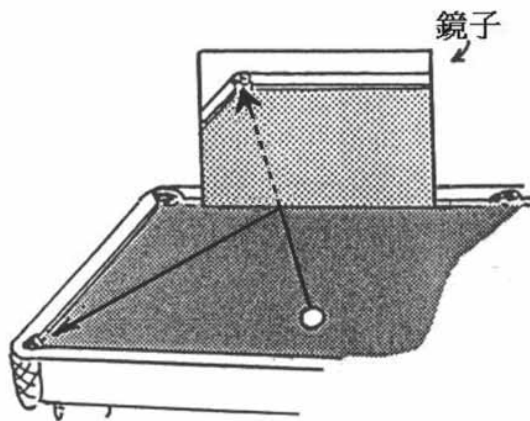
例如，在上圖中，想用白球撞擊另一顆箭頭所指的白球。因為黑球橫在中間，無法直接瞄準，所以借助球台邊的反射，是一招不錯的方式，但是，這時的瞄準點比較難拿捏，球在撞擊之前所跑的距離也跟著加長，失誤的機率提升不少。

- (1) 在上圖中，白球依實線方向前進，在碰到另一顆白球之前，總共走了多少距離（將球台邊相鄰兩長刻度的距離稱為 1 單位，答案以單位表示）。
- (2) 如果想表現一下高超的撞球技術，採取下圖中的實線撞球，那麼在碰到另一顆白球之前，總共行經了多少距離。

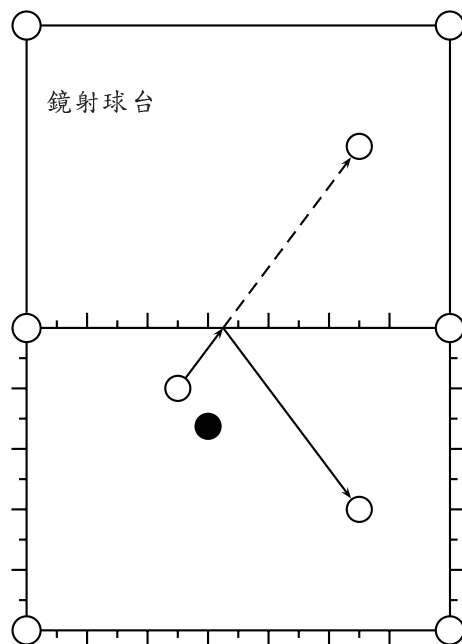


## 玩鎖・玩索

撞球最重要的物理性質就是入射角等於反射角，這個性質也可以用光學的物理性質來解釋，如下圖所示，在球台邊裝個鏡子，此時球行進的折線可以看成直線（跑進鏡子裡的球台）。



利用入射角等於反射角的鏡射原理，將折線拉直，如下圖所示（想成將球台往上作對稱）



應用這個概念，將折線一一拉直便可解題。

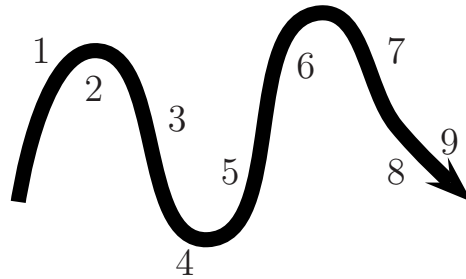




遊戲 6



一般街道門牌號碼的編碼原則是從 1, 2, 3, 4, ... 編起，奇數號門牌與偶數號門牌編在街道的不同邊。



汀菱的別墅座落在環山路偶數號門牌的最後一棟，學數學的汀菱常使用數學語言自豪的說：「對邊所有門牌號碼的總和比我家門牌號碼還多出 323 號。」

已知環山路兩邊的門牌號碼依 1, 2, 3, 4, 5, ... 的次序編排，而且完全沒有跳號或漏號，求汀菱的別墅門牌號碼是幾號？



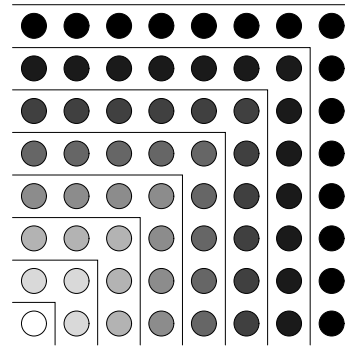
## 玩鎖・玩索

級數

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

可以透過等差級數的求和公式得到，也可以利用數學歸納法證明，甚至可以使用下圖的「無字證明」模式來詮釋：

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

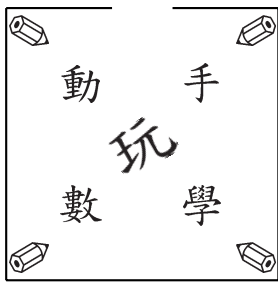


談到「無字證明」，必須介紹尼爾森所寫的兩本無字證明的書（Proof Without Words I & II）。所謂的無字證明就是透過簡易的幾何規律，讓讀者相信或看出欲證明的式子是明顯成立的。當讀者還無法領悟時，只需少許的提示或解說就可以明白。想要達到這樣的神奇效果，必須有很簡易且巧妙的幾何圖形才辦得到。

透過這道級數和，應該不難算出汀菱家的門牌號碼。

### 3 函數魅影的高一下學期

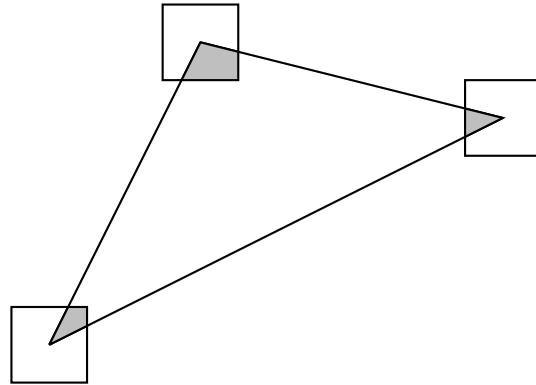
高一下學期的數學課程將進入專門討論，比較有系統介紹的開端。整個第二冊以介紹指、對數及三角函數為主，顯然函數的意義特別重要。我們循著指數、對數、銳角三角函數、三角測量、廣意角三角函數、和角公式、三角函數疊和與棣美弗定理的教學軌跡，設計許多帶有科學情境的題目，也規劃了一些重要定理或公式的無字證明題，供老師或學生對數學有另一種不同的學習與看法。希望這裡呈現的題目或遊戲會讓學生愉快學習，老師如獲至寶。



遊戲 7

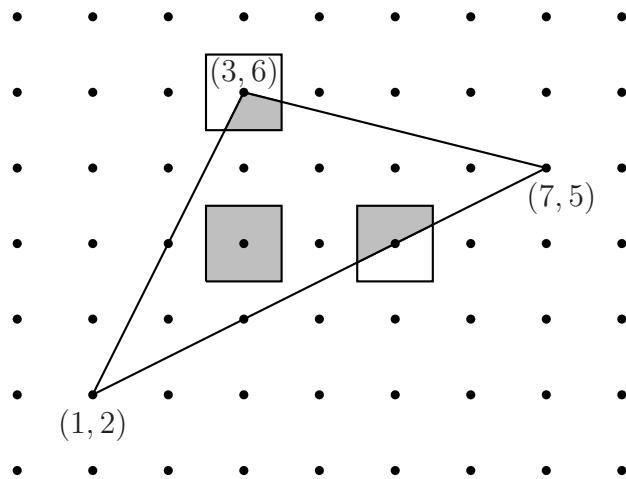
☆☆☆☆☆

在下圖的三角形中，分別以頂點為中心，方向一致的畫三個單位正方形：



求三角形內部與正方形重疊的三塊灰色區域之面積和。

在坐標平面上標出  $x$  與  $y$  坐標都是整數的點（稱這種點為格子點），例如下圖的黑點就是格子點，而三角形的三個頂點剛好是坐標為  $(1, 2)$ ,  $(3, 6)$  與  $(7, 5)$  的格子點。我們想要利用格子點來計算三角形的面積：首先格子點被三角形分成四類，即三角形內部的格子點，邊上（不是頂點）的格子點，頂點的格子點及三角形外部的格子點。



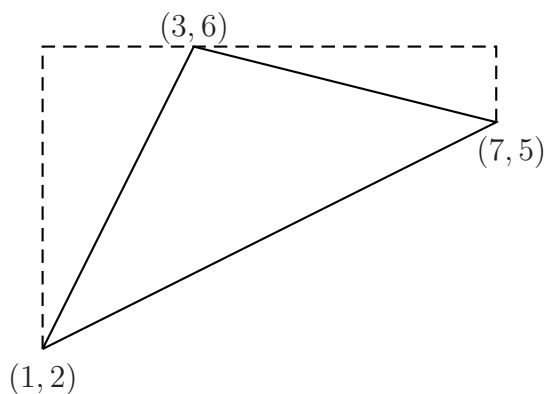
接著就在每個格子點附近鋪上單位正方形，而且讓正方形中心與格子點重疊。上圖就是內部，邊上與頂點各鋪上一個單位正方形的情形，其中灰色區域代表三角形內部，白色區域是三角形外部。

在一百多年前，數學家皮克無意間發現，當三角形的三個頂點

都是格子點時，若  $I$  代表此三角形內部的格子點數目， $S$  代表邊上（含頂點）的格子點數目，則此三角形的面積可以用  $I$  及  $S$  來表示。你可以知道那個面積公式為何嗎？

在你還在思考之際，讓我們來計算以  $(1, 2)$ ,  $(3, 6)$  與  $(7, 5)$  為頂點的三角形之面積  $\Delta$ ：作補助線如下，此時三角形的面積就等於大梯形面積扣掉兩側的直角三角形面積，即

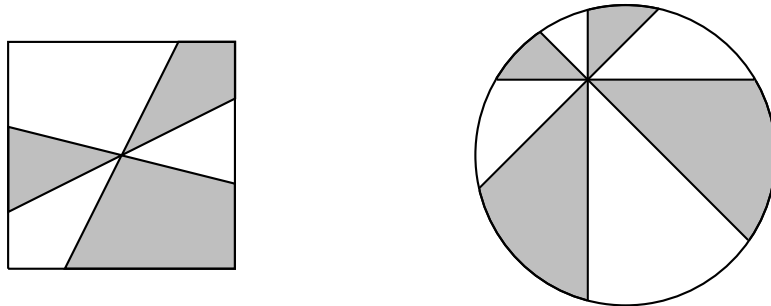
$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{[(6-5) + (6-2)](7-1)}{2} - \frac{(3-1)(6-2)}{2} - \frac{(7-3)(6-5)}{2} \\ &= 15 - 4 - 2 \\ &= 9.\end{aligned}$$



而此三角形所對應的  $I, S$  值為  $I = 7, S = 6$ ，你找到對應的公式了嗎？

## 玩鎖・玩索

將三個方向一致的單位正方形疊合在一起，也就是說，在單位正方形的中心畫三條分別與三角形的邊平行之直線，此時就產生如下圖的左圖，三個灰色區域的面積與三個白色區域的面積是相等的。事實上，有一道較困難的歷史名題與這題相關，它是一道切披薩的問題。如下圖的右圖，在披薩上選一個任意點，過此點畫四條線將披薩切成八份，要求這四條線中，任兩相鄰的線必須夾 $45^\circ$ ，而且一條為水平線，一條是鉛直線。圖中四塊灰色披薩與四塊白色披薩的面積相等。



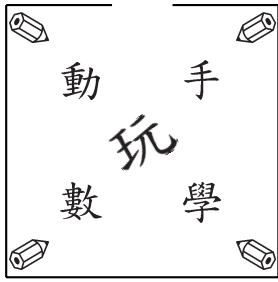
指考《數學乙》考過如下的填充題：

當平面上的點  $(x, y)$  之座標  $x$  與  $y$  都是整數，稱點  $(x, y)$  為格子點。數學家知道：座標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式

$$aS + bI + c$$

來表示，其中  $S$  代表三角形的周長上（三邊邊上）的格子點數， $I$  是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數， $a, b, c$  是固定的常數。求常數  $a, b$  與  $c$  的值。

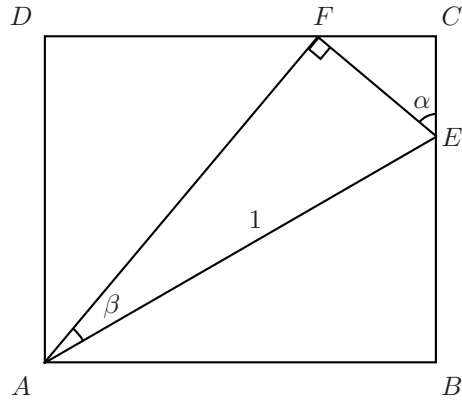
這是有名的皮克公式，只需選定幾個以格子點為頂點的三角形便能求得公式中的常數  $a, b$  與  $c$  的值。根據這個提示，你該會猜想皮克公式的形式吧！☒



遊戲 8



在矩形  $ABCD$  內畫一個直角三角形  $AEF$ ，其中  $E$  在  $BC$  邊上， $F$  在  $CD$  邊上，且  $\overline{AE} = 1$ ，如下圖所示：



利用此圖形證明正弦與餘弦的和角公式，即證明

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

與

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

試著設計一個幾何圖形，並利用此圖形證明正弦與餘弦的另兩個和角公式，即

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

與

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

## 玩鎖・玩索

這是和角公式的一個無字證明模型，只需將圖中每一個角度與每一條線段用  $\alpha$  與  $\beta$  來表示，即可看出和角公式。至於另兩個和角公式可以考慮使用下圖：

