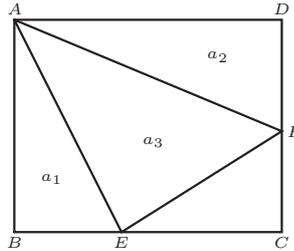


數學新天地問題集（第十集）

- 10-1. 如下圖所示： $ABCD$ 是面積為 S 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

- 10-2. 阿寶有一個專門收藏一元與五元硬幣的聚寶盆，三年前聚寶盆裡總共有 345 枚硬幣。阿寶說：「過去三年來，曾經多次從聚寶盆取走一枚五元硬幣，但會馬上放入五枚一元硬幣；有時也會從聚寶盆取出五枚一元硬幣，同樣會立刻放回一枚五元硬幣。」

阿寶接著說：「底下 10 個數字中

1302, 1400, 1548, 1606, 803, 962, 1003, 1423, 1545, 1863

有一個數字是現在聚寶盆的總錢數。」讓你猜三年前聚寶盆裡一元與五元硬幣各幾枚？

- 10-3. 如果將地球視為一半徑 r 的球體，定球心坐標為 $(0, 0, 0)$ ，北極坐標為 $(0, 0, r)$ 。球面幾何的知識：

(1) 可以將東經 θ ，北緯 ϕ 的點坐標定為

$$(r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi).$$

(2) 地球上兩相異點 A, B 與球心 O 三點所在的平面與地球表面的共同部分剛好是一半徑 r 的圓。此圓上 \widehat{AB} 弧（劣弧）的長度稱為 A, B 的航空距離。

回答下列問題：

- (a) 求赤道上東經 0° 的點與東經 θ ，北緯 ϕ 的點之直線距離。
- (b) 若將地球半徑 r 定為 6300 公里，令 A 點代表赤道上東經 0° 的點， B 點是東經 45° ，北緯 45° 的點，則計算 A, B 的航空距離。

10-4. 設

$$f(x) = \frac{(-x^2 - x + 3)(2x^2 + 2x + 3)^2 + 4(x^2 + x)^3}{x^2 + x + 1}.$$

- (1) 求函數值 $f(0), f(1), f(2)$ 。
- (2) 盡可能的化簡分式 $f(x)$ 。

10-5. 已知正數 a, A, b, B, c, C 滿足

$$a + A = b + B = c + C = l.$$

證明

$$aB + bC + cA < l^2.$$