

數學新天地問題集（第五集）

- 5-1. 簿登釋同學對許教授《算術講義》書中的一則不等式問題很感興趣：

$$a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0, a_1 a_2 \geq b_1 b_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2.$$

他發現，只需四個步驟就可以解決此問題，於是興高采烈將答案寫下寄給教授欣賞：

由算-幾不等式得到

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Rightarrow a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}; \quad (1)$$

同法可得

$$\frac{b_1 + b_2}{2} \geq \sqrt{b_1 b_2} \Rightarrow b_1 + b_2 \geq 2\sqrt{b_1 b_2}. \quad (2)$$

由 (1) - (2) 得到

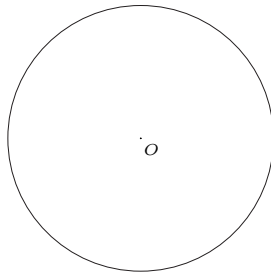
$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \geq 2(\sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{b_1 b_2}). \quad (3)$$

因為 $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$ ，所以 $\sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{b_1 b_2} \geq 0$ ，即

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \geq 0 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2. \quad (4)$$

問：簿登釋同學的作法是否正確（若有誤，請指出哪幾個步驟出錯）？你有好的方法嗎？

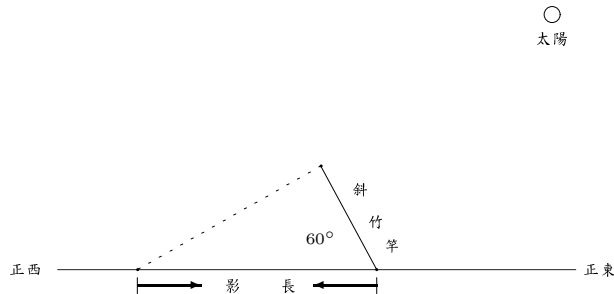
- 5-2. （圓規何須怨直尺，直線不得在圖中）拿破崙是個不錯的幾何學家，他提出過這樣一個問題：「紙上有一個圓及該圓的圓心，只用圓規（沒有直尺），如何把這圓的圓周四等分。」你能解決拿破崙這問題嗎？



- 5-3. 早上，太陽從正東方的地平線冉冉升起，泰樂斯忙著測量一根向正西邊傾斜的竹竿及其影子的長度。泰樂斯量得竹竿長

2 公尺，它的影子長度是 4 公尺。就在此刻，丈量工人向泰樂斯回報說：「金字塔的影子長度剛好是 100 公尺。」

請問：該金字塔的真正高度是幾公尺？



- 5-4. 姬藕的姊姊寫完一題老師派的乘法運算題，高興的遊玩去了。正在學奇、偶概念的姬藕拿起橡皮擦將姊姊的題目及運算式中的數字塗掉，只要是奇數數字（1, 3, 5, 7, 9）的地方就用“奇”這個字表示；而偶數數字（0, 2, 4, 6, 8）的地方就用“偶”這個字表示。

當姊姊遊玩回來之後，發現她寫的習題變成

$$\begin{array}{r}
 \text{奇 偶 偶} \\
 \times \quad \text{偶 偶} \\
 \hline
 \text{偶 奇 偶 偶} \\
 \text{偶 奇 偶} \\
 \hline
 \text{奇 奇 偶 偶}
 \end{array}$$

這付模樣。你如何幫姬藕的姊姊回復原狀呢？（姬藕沒有搞錯任和一個奇、偶的數字）

- 5-5. 設 P 是三角形 ABC 內部的一點， P 至 BC, CA, AB 的距離令為 d_a, d_b, d_c ， h_a, h_b, h_c 為 A, B, C 至 BC, CA, AB 的距離。求

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c}$$

值。