

# 蔡倫造紙的貢獻

許志農  
國立台灣師範大學數學系

February 19, 2006

史書記載東漢和帝時（公元 105 年），宦官蔡倫覺得「竹簡木牘太重又不方便，縑帛太貴，那麼如何才能夠製造出輕便又便宜的紙張呢？」於是便「用樹膚，麻頭及敝布、漁網以為紙」，將隨處可得的原料造出了「蔡侯紙」。簡單奏明了皇帝，「帝善其能」「自是莫不從焉」，很快的在全國傳了開來。

蔡倫造紙的過程是如何的呢？後人用原始的方法去想像：先收集材料用刀子切碎，將它們浸泡在水中，等它發酵、漲開後，再用清水漂洗，木槌打細、攪散成為紙漿，把紙漿澆在竹器或麻布框內，經過曬乾後，一張粗粗的紙就完成了。

公元 121 年，東漢朝廷內部爭權奪利的鬥爭牽扯到蔡倫，漢武帝命令他投案。蔡倫恥於受審，即洗浴全身，換上最漂亮的衣服，然後服毒自盡。

蔡倫對我國乃至人類社會發展所產生的影響都是巨大的，並且這種影響還將持續下去。今天，我們是無法用數量來衡量紙對歷史發展所起的作用，人類對紙的使用將會延續到何年，更是難以預測。

既然紙張已離不開人類的日常生活，就讓我們對每日接觸的各種不同大小的紙張有更多的認識。有關紙與蔡倫的歷史，可以參考如下的網站：

<http://140.138.146.6/paper/TIME/time22.htm>

<http://www.epochtimes.com/b5/0/10/31/c2506.htm>

## 第一部份：正整數的最佳分解

將 12 分解成兩個正整數的乘積有

$$1 \times 12, 2 \times 6, 3 \times 4$$

三種，又這三種分解中兩數的差分別為

$$12 - 1 = 11, 6 - 2 = 4, 4 - 3 = 1.$$

顯然  $3 \times 4$  是這三種分解中，讓兩數的差最小的一組，我們稱  $3 \times 4$  為 12 的最佳分解，並規定分數  $F_{12} = \frac{3}{4}$ 。同理，24 有

$$1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6$$

四種分解方式，而  $4 \times 6$  是兩數差最小的一組。所以  $4 \times 6$  是 24 的最佳分解，且  $F_{24} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

有了上述舉例之後，只要找到正整數  $n$  的最佳分解  $p \times q (p \leq q)$ ，就可以產生一個分數的數列  $\langle F_n \rangle$ ，其中定義  $F_n = \frac{p}{q}$ 。

1-1. 求 18 的最佳分解及分數  $F_{18}$ 。

1-2. 求 48 的最佳分解及分數  $F_{48}$ 。

1-3. 求分數  $F_{221}$ 。

1-4. 求分數  $F_{299}$ 。

1-5. 哪些正整數  $n$  會使得  $F_n = 1$ 。

## 第二部份：紙張的分類

紙張的尺寸分為國際標準組織尺寸和我國慣用尺寸兩種，而國內通用尺寸主要有「菊版紙」與「四六版紙」兩大類。若依面積來說，則最大的紙張稱為全開，其次有 2 開，3 開，4 開， $\dots$ ，128 開等的對應紙張。菊版紙的全開是  $25 \times 35$ （以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開（有時稱對開），3 開，4 開，8 開，12 開，16 開，20 開的大小列表如右圖所示。長方形紙張較長邊除以短邊所產生的比值稱為這紙張的“視覺率”。

以上是有關紙張尺寸的規格，至於用紙的計算是以“令”為單位，一令紙代表 500 張全開紙張的數量。因為一張全開紙可以分割成兩張 2 開紙，所以一令紙也相當於 1000 張 2 開紙的數量。

開數 \ 規格	英吋
全開	$25 \times 35$
2 開	$25 \times 17\frac{1}{2}$
3 開	$25 \times 11\frac{2}{3}$
4 開	$11\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$
8 開	$11\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{4}$
12 開	$8\frac{1}{3} \times 8\frac{3}{4}$
16 開	$6\frac{1}{4} \times 8\frac{3}{4}$
20 開	$6\frac{1}{4} \times 7$

- 2-1. a) 64 開菊版紙尺寸為何？32 開菊版紙尺寸為何？  
b) 25 開菊版紙尺寸為何？18 開菊版紙尺寸為何？  
c) 利用正整數因數分解的知識，對各種菊版紙的尺寸給個數學公式。  
d) 某人訂做名片，經計算得知名片的面積是 12.5 平方英吋，若該名片是採菊版紙製作，則此人的名片是幾開菊版紙。  
e) 承 d)，該名片的長寬是多少？  
f) 試問 25 開菊版紙是否可以蓋住（邊與邊平行的覆蓋）整個 32 開菊版紙。  
g) 某菊版紙的視覺率為 1.2，求其開數？
- 2-2. 四六版紙的全開是  $31 \times 43$ （以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開，3 開，4 開， $\dots$ ，128 開等的對應紙張的分割方式完全仿菊版紙的分割方法。

- a) 64 開四六版紙尺寸為何？24 開四六版紙尺寸為何？
- b) 7 開四六版紙尺寸為何？90 開四六版紙尺寸為何？
- c) 96 開四六版紙尺寸為何？

### 第三部份：理想的紙張大小

如果你將前一節中的紙張之兩邊邊長，拿來除一下，你會發現它們的比值會幾乎是一個常數。難道接近這個常數的紙張，會讓人賞心悅目或使用方便嗎？