

作業 (a) 計算定積分  $\int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$

解: 原式 =  $\int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4}$ 。

(b)  $F(x) = \int_0^{x^3} \sin t^2 dt$ , 計算  $F'(x)$

解: 由第二基本定理,  $F'(x) = \sin x^6 \cdot 3x^2 = 3x^2 \sin x^6$ 。

(c) 計算不定積分  $\int \sin 2x \cos 2x dx$

解: 原式 =  $\int \frac{1}{2} \sin 4x dx = -\frac{1}{8} \cos 4x + C$ 。

另解: 原式 =  $4 \sin^2 2x + C$ 。

其他解如  $-4 \cos^2 2x + C$  或等價的關係都可以。

(d) 以辛普森法 ( $n = 4$ ) 求  $\int_0^\pi \cos x dx$  的近似值。

解:  $\int_a^b f(x) dx \doteq \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$   
 $= \frac{\pi-0}{3 \times 4} (\cos 0 + 4 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{2\pi}{4} + 4 \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \pi) = 0$ 。

(e) 求  $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$  的導函數。

解:  $y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) \Rightarrow y' = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{1-x^2}$ 。

(f) 求不定積分  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} dx$  的近似值。

解: 令  $u = \sqrt{x} - 3 \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} dx = \int \frac{2(u+3)^2}{u} du = u^2 + 12u + 18 \ln |u| + C = x + 6\sqrt{x} + 18 \ln |\sqrt{x} - 3| + C_1$ 。

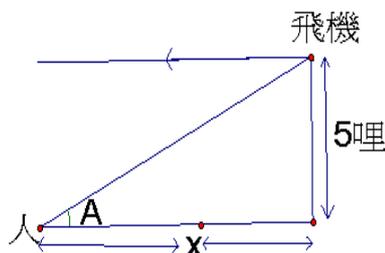
(g) 求積分  $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$ 。

解: 令  $u = e^x - e^{-x} \Rightarrow du = (e^x + e^{-x}) dx \Rightarrow \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |e^x - e^{-x}| + C$ 。

(h)  $f(x) = \cos 2x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  求  $(f^{-1})'(x)$  含  $x$  的範圍。

解: 令  $x = \cos 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cos^{-1} x \Rightarrow (f^{-1})'(x) = y' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$  for  $-1 < x < 1$ 。

小考2 (a) 飛機維持以5哩的高度飛向一觀察者的正上方 (如右圖)



i. 請將  $A$  以  $x$  的函數表出。

解:  $A = \tan^{-1} 5/x$

ii. 如果飛機速度是400哩/小時, 分別求當  $x = 10$ 哩和  $x = 3$ 哩時的  $dA/dt$ 。

解: 由題意知  $dx/dt = -400 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{1+(5/x)^2} (-5/x^2) dx/dt$ , 所以  $x = 10 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 16$  弧度/小時,  $x = 3 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 58.824$  弧度/小時

(b) 求  $dy/dx$

i.  $y = x^{2/x}$ 。

解: 令  $dy/dx = \frac{d}{dx} e^{\frac{2}{x} \ln x} = e^{\frac{2}{x} \ln x} [\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2}] = x^{2/x} \frac{1+\ln x}{2}$

ii.  $y = (1+x)^{1/x}$ 。

解: 令  $dy/dx = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = (1+x)^{1/x} [-\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}]$