HPM通訊

發行人：洪萬生（台灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（台灣師大數學所研究生）
編輯小組：蘇意雯（台北市立教育大學）蘇俊鴻（北一女中）
黃清揚（福和國中）葉吉海（陽明高中）
陳彥宏（成功高中）陳啟文（中山女高）
王文珮（青溪國中）黃哲男（台南女中）
英家銘（台北醫學大學）謝佳叡（台灣師大數學系）
創刊日：1998 年 10 月 5 日　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

第十六卷 第十一期 目錄（2013年11月）

孿生質數：質數不再孤獨？

洪萬生

台灣師大數學系退休教授

二０一三年五月，國際數學界的焦點，都集中在孿生質數猜想（**twin primes conjecture**）研究的劃時代突破貢獻上。這是華人數學家張益唐撼動數學界的驚人之舉，他在 **1991** 年獲得美國普度大學博士學位後，一直都找不到與學術有關的工作，甚至被迫在速食店打工。即使後來有機會在美國新罕布夏大學（**University of New Hampshire**）數學與統計系擔任專任講師，也只能以純教學換取溫飽，但他內心始終平和，從不怨懟，名利如浮雲，卻從不放棄他最愛的數學研究。

五月下旬，我接到數學教育家 **Jerry Becker** 轉來的《紐約時報》有關張益唐的報導，一時沒有太大注意。幾天內，我不知道是哪來的靈感，開始利用 **Google** 搜尋 **"Yitang Zhang"** 和「張益唐」，才發現張益唐已經在孿生質數猜想的研究上，樹立了空前的、具有深刻洞察力的里程碑。

由於張益唐的罕見成就只能用不可思議的「一則傳奇」來形容，因此，在本文中，我們也想參用文學敘事的方式，來介紹這個孿生質數猜想。

孿生質數與數學小說

所謂孿生質數，是指兩個相鄰的質數，其間只隔著一個偶數，譬如 **11** 和 **13**，**17** 和 **19**，**41** 和 **43** 等等。那麼，由於歐幾里得老早（在二千多年前）已經證明了質數個數無限多，這種雙胞胎質數是否也一樣有無限多對呢？這就是孿生質數猜測。

質數是很多數學家的最愛，譬如數學家兼科普作家桑托伊（**Marcus du Sautoy**）原先打算他的雙胞胎女兒命名為 **forty-one** 和 **forty-three**，但因太太不大贊成，他只好退而求其次，變成「秘密的」中名（**middle name**）。

對於一般作家來說，好像也很難抵擋質數的魅力。我們且先看膾炙人口的數學小說《博士熱愛的算式》（小川洋子著）如何形容質數：

> **在這個世界上，質數是博士的最愛。雖然我也知道質數的存在，但我從來沒有想到可以成為愛的對象。雖然是個古怪的對象，博士愛的方式卻很正統：疼惜對方，無私地為對方奉獻，抱著一份敬愛，時而愛撫，時而跪在一旁呵護，隨時陪伴在一旁。**
>
> **我認為質數的魅力在於無法說明它出現的秩序。每一個質數都沒有因數，隨意地出現在數列中。雖然數字越大就越不容易找到質數，卻無法根據一定的規則預測質數的出現。這種惱人的反覆無常，使追求完美的博士完全拜倒在它的石榴裙下。**

至於孿生質數呢，則有數學小說《質數的孤獨》（保羅・裘安諾著）針對一對各自極端孤獨的戀人之動人比喻：

> **在大學的第一年，馬提亞發現質數當中還有一些更特別的數字，數學家稱之為「孿生質數」。**
>
> **這是一對彼此非常接近的質數，幾乎是緊緊相鄰，但它們之間總是會存在著一個偶數，讓它們無法真正地碰在一起，例如 11 和 13、17 和 19、41 和 43 這些數字。**
>
> **如果有耐性地一直數下去，將會發現這種孿生質數越來越少見，越來越常碰到的是孤立的質數，迷失在全是由數字所組成的安靜、整齊的空間裡。**
>
> **接著你會很痛苦地意識到，孿生質數一直要等到意外事件發生的時候才會碰在一起，而它們的真正的宿命是注定一輩子孤獨。然後，當你正準備要放棄、不想繼續算下去的時候，卻又碰上另外一對孿生質數，它們緊緊地抓住對方。於是數學家之間有一種共同的信念，就是盡量地往前數，總是會遇上另一對孿生質數，雖然沒有人知道它們何時會出現，但一定會碰到。**

本小說問世時，作者保羅・裘安諾還是一位物理學博士生，因此，他塑造男主角馬提亞是一位頗有才氣的數學家，讓他來對孿生質數「現身說法」，看來是相當合理的敘事。而上述引文最後一句，就是作者對孿生質數猜想的一個說明。

事實上，針對張益唐現象，有許多中文寫成的評論或感想都提及《質數的孤獨》，可見文學敘事對科學普及，的確發揮了意想不到的助益。在這本小說中，作者還舉數學實例挑戰讀者：

> **2760889966649、2760889966651 是否為孿生質數？**

小說中的男主角曾利用 **3, 5, 7, 11, 13, …, 37, …, 43** 等質數，試著除這兩個數，結果太疲累了，最後只好放棄。

孿生質數猜測緣起

根據文獻記載，這個猜想被認為是法國數學家波里納克（**Alphonse de Polignac**）於

1849 年所提出。**1912** 年，德國數學家藍道（**Edmond Landau**）在國際數學家大會中，提出四個重大的數論問題，其中有一個就是孿生質數猜想。這種「加持」當然讓孿生質數猜想更具魅力，成為一個偉大級的數學難題！

為了思考這個猜想成立的可能性，數學家利用數值計算方法，來加以檢驗。於是，我們目前知道的結果有如下列：

- **小於 10^5 的自然數中有 1,224 對孿生質數**
- **小於 10^6 的自然數中有 8,164 對孿生質數**
- **小於 3.3×10^7 的自然數中有 152,892 對孿生質數**
- **小於 10^{11} 的自然數中有 224,376,048 對孿生質數**

還有，**2011** 年所發現的迄今最大的孿生質數對是：$3{,}756{,}801{,}695{,}685\times 10^{666{,}669}\pm 1$。

由於質數的個數無限多，因此，這個孿生質數猜想當然可以連結到質數在自然數中的分布情況，而後者也在十九世紀末（**1896** 年），由法國數學家阿達瑪（**J. Hadamard**）和比利時數學家瓦里普桑（**C. Vallee-Poussin**）獨立證明出來，這就是大名鼎鼎的質數定理：

當 $n\to\infty$ 時，$\pi(n)\approx n/\log n$

其中 $\pi(n)$ 是小於或等於 n 的質數個數。當我們運用經驗法則來確認這個定理時，我們可以提供一些數據，來表現質數在自然中的「密度」$\pi(n)/n$：在一億以內，有 **5,761,455** 個質數；在一兆以內，有 **37,607,912,018** 個質數。前者密度為 **0.06**，後者則只剩下 **0.038**，可見質數越來越孤獨。

另一方面，上述質數定理也可以讓我們據以「驗證」質數之間的「平均距離」$n/\pi(n)\approx\log n$，也就是，在很大的自然數 ***n*** 以內，這一距離大約是 $\log n$。譬如說吧，一億以內的質數之平均距離大約是 **17.4**，一兆以內的質數的平均距離則增為大約 **26.6**，因此，看起來質數的確是越來越「孤獨」。從而，孿生質數的「罕見」，應該更是不遑多讓了。

張益唐的劃時代突破

在張益唐之前，孿生質數猜想的最重要研究結果，是 **2005** 年由郭德史東（**Daniel A. Goldston**）、品茨（**Janos Pintz**）和伊耳迪倫（**Cem Yildirim**）所完成，他們證明了：當 p_n 是第 n 個質數時，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n}=0 \text{。}$$

根據這個結果，相鄰質數的距離 $p_{n+1}-p_n$ 還是可能趨近無限大，儘管其量階（**order of magnitude**）比 $\log p_n$ 小得多，從而比值的極限成為 **0**。這可以充分說明，何以張益唐的定理會變得如此石破天驚：

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)\le 7\times 10^7\ ,$$

因為它告訴我們：當 n 很大時，一定有兩個相鄰的質數，它們之間的距離不會超過七千萬。或許有不少人會納悶這離孿生質數猜想不是還很遠嗎？其實不然，因為數學家花了才幾個月的時間，利用張益唐的方法，已經成功地將這個上界縮少到大約 **4680** 左右，看來縮小到 **2** 已是指日可待，如此，則孿生質數猜想就得證了。

張益唐從 **2008** 年起開始研究孿生質數猜想，關鍵的想法出現在 **2012** 年夏天，當時他前往科羅拉多州訪問舊友音樂家齊雅格，手邊沒帶有任何資料，純粹想要散散心。沒想到長時間的孤獨奮鬥，在朋友家院子閒坐二十分鐘，終於找到了最後的解題出路。這個發現過程看來一點都沒有戲劇性，張益唐的低調個性，大概不致於像阿基米德一樣，光著身體衝出澡堂，高喊著 ***Eureka! Eureka!***（我發現了！我發現了！）。他謙稱自己的研究能夠成功，運氣是一個不可或缺的因素，不過，他也強調，無論如何，就是要繼續不斷地思考！

結語

張益唐的故事充滿了啟發性，《數理人文》特刊編輯評論說：「個人修為可以坦然面對失落的黃金二十年，但這段故事仍然讓人心生感慨與警惕。在張益唐證明了質數並不孤獨之後，我們祝福他在數學上也不再孤獨。」我們也深有同感！對於這一位「居陋巷」，始終「不改其志」的今之顏回，我們除了最高等級的推崇之外，實在找不到更誠摯的祝賀之詞了。

不過，評價張益唐的成就，大概再也沒有比 **Henryk Iwaniec** 表達得更貼切了。**Iwaniec** 是解析數論大師，他在 **2013** 年 **5** 月底致函丘成桐教授，對張益唐推崇備至（引自《數學與人文》）：

> 張益唐的文章三周前被《數學年刊》(***Annals of Mathematics***) 接收，而在此之前，他在解析數論學界並不為人所熟知。但是他掌握解析數論最複雜課題的知識，並得以運用自如。他能夠突破令許多專家都止步不前的屏障，並非因為人們忽視了微小之處，而是由於他引入了全新而巧妙的佈局並漂亮地加以執行。僅從論證的清晰的邏輯架構，你可以立即感受到這項工作幾乎無可置疑的優秀。這並不意味著這篇文章簡單或者初等。恰恰相反，張的工作是解析數論的頂峰之作。他也優雅地借用其他領域的工具，比如間接用到有限域上代數簇的黎曼猜想。張的工作將引發持久雪崩式的優化和改進，以及隨之而來的理論創新。一夜之間，張重新定位了解析數論的焦點。隨後的進展需要等待多久，令人期待。

另一方面，由於張益唐的傳奇，有關孿生質數猜想的文學或數學敘事，想必會有新的版本問世，我們且拭目以待。

附記：

本文原版已收入洪萬生、蘇惠玉、蘇俊鴻及郭慶章合著，《數說新語》，開學文化出版社即將出版。

1. **為節省影印成本，本通訊將減少紙版的的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
2. **本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。**
3. **歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhui_yu@yahoo.com.tw**
4. **本通訊內容可至網站下載。網址：http://math.ntnu.edu.tw/ ~ horng/letter/hpmletter.htm**
5. **以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡**

《HPM 通訊》駐校連絡員

日本：陳昭蓉 (東京 Boston Consulting Group) 、李佳嬅（東京大學）
德國：張復凱（Mainz 大學）
基隆市：許文璋（南榮國中）
台北市：英家銘（台北醫學大學）楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓 (興雅國中) 傅聖國（健康國小）李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱賡忠（建成國中）
新北市：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬（明德高中）羅春暉 (二重國小) 賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏 （丹鳳國中）莊耀仁（溪崑國中）、
宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）
桃園縣：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學）洪宜亭、郭志輝（內壢高中） 鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中） 程和欽 (大園國際高中)、鍾秀瓏（東安國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）
新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川、林典蔚（新竹高商）
新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
苗栗縣：廖淑芳 (照南國中)
台中市：阮錫琦（西苑高中）、劉雅茵（台中二中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）
南投縣：洪誌陽（普台高中）
嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）
台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）
高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）
屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）
澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）
金門：楊玉星（金城中學）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

聯立方程組的程序性解法：卡丹諾與程大位

林倉億
國立台南一中

卡丹諾的〈論方法的規則〉

若僅是從解聯立方程組得到未知數的值來看，那 **16** 世紀的數學家卡丹諾 **(Girolamo Cardano, 1501~1576)**也曾經得出相關的成果。卡丹諾的名聲並不太好，有些人喜歡用賭徒來稱呼他，但他的著作《大技術》**(*Ars Magna*)**奠定了他在數學發展史中的地位。一般人提到《大技術》一書，總是著眼於其中的解三次方程式，而忽略了卡丹諾在這本書中的第 **29** 章〈論方法的規則〉**(*De regula Modi*，**英文翻譯為 **On the Rule of Method)**中提出了相當於二元一次聯立方程組的解法。卡丹諾以一個例子來說明：

> **7 呎長的綠色絲綢與 3 呎長的黑色絲綢要價 72 個硬幣，在相同價格下，2 呎長的綠色絲綢與 4 呎長的黑色絲綢要價 52 個硬幣。我們想要知道它們個別的價格。**

在正確地解出此題後，卡丹諾審視整個解題過程，然後得到了一般性的「規則」：

> **現在我得到了這個規則，我說：「將比較大的長度 7 呎，以及硬幣總數 72，一同除以比較小的長度 3，然後將所得的商乘以第二個情況中的長度，就是原來比較短的絲綢。然後從[乘以]長度的乘積中減去第二個情況中剩下的長度，再將剩下的差除價格 52 與[乘以價格的]乘積的差，就會得到第一個情況中比較長的價格。」**

以今日的符號表示，若方程組為$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，依卡丹諾所給的「規則」，可得出

$x=\dfrac{\frac{c_1}{b_1}\times b_2-c_2}{\frac{a_1}{b_1}\times b_2-a_2}$。卡丹諾所謂的「規則」，意義上比較相近於今日所用「算則」**(algorithm)**一詞， 也就是說，他寫出的並非解的公式，而是告訴讀者依照他所給定的計算步驟，一步一步算下去，最後就能得出未知數的值。然而，讀者或許會質疑，卡丹諾一席話跟今日認知的「算則」之間，兩者有著不小的落差，更甚者，卡丹諾看起來只是在談這個特例，而非一般化的解法。原因就出在卡丹諾所處的時代，符號代數並未發展完成，在少了符號的幫助之下，卡丹諾只好用特例的數值來表示一般化的情況，這在早期的數學中是很常見的情形。也正因如此，我們也就毋需大驚小怪他所寫出來的「規則」會長成這副德性了。

卡丹諾非常推崇這個「規則」，還稱呼它為「規則之母」！卡丹諾的推崇其實並不單單指「規則」本身，而是包括從一系列運算中抽象化出「規則」的過程，也就是說，讀者只要能掌握此抽象化過程，那麼，就能如卡丹諾在這一章開頭中所說的：「**那麼你就會得到解決任何相似問題的『方法的規則』。**」由於《大技術》一書流傳很廣，因此，卡丹諾對抽象化「規則」的追求，著實深深影響了後來符號代數的發展。

《算法統宗》的「二色方程歌」

程大位，字汝思，號賓渠，生於明朝嘉靖 **12** 年（西元 **1533** 年），卒於明朝萬曆 **34** 年（西元 **1606** 年）。關於程大位的生平記載並不多，據稱他年少時聰穎而好學，除了讀儒家書外，更嗜書法與數學。二十歲外出經商後，更不忘四處搜羅有關的字帖及書籍。他的長輩程時用稱他「**凡客遊湖海，遇古其文字及算數諸書，則購而玩之，齎心一志，至忘寢食。**」數學書與書法帖被並稱「**購而玩之**」，可見在當時數學的地位與技藝相去不遠。不同於長輩認為的數學僅是玩物，程大位自己十分注重對數學的鑽研，他說：

予幼耽習是學，弱冠商游吳楚遍訪明師，繹其文義，審至成法。

程大位的家族善於經商，因此，他從小學習數學或許有為將來經商而用的目的，但成年之後，他對數學的興趣，已超乎商業應用了。他常常重金購買算書，並四處拜訪懂數學的人，指點自己在數學上的疑惑。到了晚年，他將自己數十年來的心得撰寫成書，於 **1592** 年出版《直指算法統宗》（簡稱為《算法統宗》）。程大位還特別針對數學初學者，將《算法統宗》**17** 卷刪減成只有 **4** 卷的《算法纂要》，於 **1598** 年印刻。

明朝數學的特色之一，就是商業用數學的發展，《算法統宗》充分反映此一特色，書中不僅編有不少日用、商用的數學內容，也包含珠算的詳盡說明。而無論是數學的解題方法或是算盤的操作步驟，程大位多用各式易於記誦的口訣，甚至是歌行體的方式呈現。例如「二色方程歌」就是關於二元一次聯立方程組的解法：

世人欲要識方程，物價俱將左右陳。右上法乘左中下，次將左上右行乘；
中間相減餘為法，下位相減餘為實；法除實為右中價，得價須將右中乘；
右下價內減去積，餘為實數甚分明；右上為法除下實，便為上價細推尋。

中國古代的方程是直行呈現的，不同於今日的橫式表現方式。不過，讀者只要將熟悉的二元一次聯立方程組轉成直的，配合方程歌中的右上、左中下（左中及左下）等操作，就能求得正確的解。以《算法統宗》所載之例「今有馬三匹、牛二頭共價銀一百一十四兩，又馬四匹、牛五頭共價一百六十二兩五錢。問馬、牛價各若干」說明：

原文	中國的直式列法	今日的方程組表示法
世人欲要識方程 物價俱將左右陳	**4　　3** **5　　2** **162.5　　114**	設馬一匹 x 兩，牛一頭 y 兩 $\begin{cases}3x+2y=114\\4x+5y=162.5\end{cases}$
右上法乘左中下 次將左上右行乘	**12　　12** **15　　8** **487.5　　456**	$\begin{cases}12x+8y=456\\12x+15y=487.5\end{cases}$
中間相減餘為法 下位相減餘為實	**7** **31.5**	$7y=31.5$
法除實為右中價 得價須將右中乘	右中價$31.5\div 7=4.5 \Rightarrow$ **3** **9** **114**	$y=4.5 \Rightarrow 3x+9=114$
右下價內減去積 餘為實數甚分明	**3** **105**	$3x=105$
右上為法除下實 便為上價細推尋	上價$105\div 3=35$	$x=35$

由上述的例子可看出，「二色方程歌」仍無異於《九章算術》的解法，只是多了巧思，將過程用韻文的方式呈現，讓讀者易於記誦然後依樣操作。除了「二色方程歌」外，《算法統宗》中還有「三色方程歌」與「四色方程歌」，在此僅抄錄「三色方程歌」以饗讀者。

三色方程法更奇，物價三行作左基。左右互乘須減盡，中下價餘左位宜；
又列二行仍乘減，中中左中減無餘；下餘為法價除實，法實相除下價知。

參考資料：

Chabert, Jean-Luc (Ed.) (1999). *A History of Algorithms: From th Pebble to the Microchip*. New York: Springer.

Witmer, Y. Richard (translated) (2007). *The Rules of Algebra* (*Ars Magna*). New York: Dover.

明・程大位，《算法統宗》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一，鄭州：河南教育出版社，**1993**。

李迪主編 **(1999).** 《中國數學史大系第六卷》，北京：北京師範大學出版社。

半角公式

蘇俊鴻
台北市立第一女子中學

一般說來，半角公式的推導常是透過倍角公式。由於

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

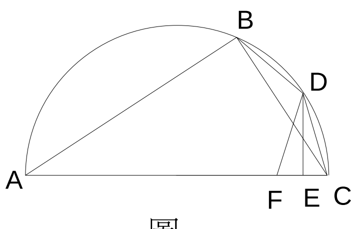
因此，

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \text{，} \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

令 $\theta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2}$ 代入，即得 $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ，$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ，其中 $\pm$ 依 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限決定。至於倍角公式，則是由和角公式推得。換言之，公式推導的順序是和角公式→倍角公式→半角公式。

然而，當我們檢視托勒密天文學集大成的著作《***The Almagest***》，他在為製作弦表所提出的一系列命題中，半角公式竟然比和角公式還要更早提出！一起來看看托勒密是如何證明。

如圖一，給定半圓，$\overline{AC}$ 為直徑，D 為 $\overset{\frown}{BC}$ 弧的中點。從 D 點作 $\overline{DE}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 E 點，在 $\overline{AC}$ 取 F 點，使得 $\overline{AF} = \overline{AB}$ ，連接 $\overline{BD}$ ，$\overline{CD}$ 及 $\overline{DF}$ 。如果令 $\angle BAC = \theta$ ，則 $\overline{BD}$ 為 θ 所對應的弦長，而 $\overline{CD}$ 為 $\frac{\theta}{2}$ 所對應的弦長。



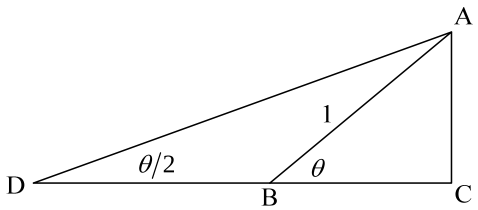
圖一

首先，$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{CF} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AF}) = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB})$ ，又 $\Delta ACD \sim \Delta DCE$ ，所以 $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$ $\Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC} \times \overline{CE}$ 。若 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 已知，由畢氏定理可得 $\overline{AB}$ ，因而 $\overline{CE}$ 可知，所以 $\overline{CD}$ 可

求。進一步，如果令$\overline{AC}=1$，則$\overline{BD}=\sin\theta$，$\overline{AC}=\cos\theta$，那麼$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\overline{CD}^2=\dfrac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$，就是現在所熟知的半角公式。

事實上，我們也能利用另一個在高中課程中經常出現的問題來證明半角公式。如圖二，給定一直角三角形ABC，在$\overline{CB}$上延長取$\overline{BD}=\overline{AB}$，則$\angle ADC=\dfrac{1}{2}\angle ABC$。若$\overline{AB}=1$，$\angle ABC=\theta$，則$\overline{AC}=\sin\theta$，$\overline{BC}=\cos\theta$，且



圖二

$$\overline{AD}=\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta+1}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

因此

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

換言之，半角公式的證明，除了代數的方法外，亦可運用幾何的方式，有興趣的讀者，不妨自己嘗試看看。

為國中學生推薦數學普及閱讀書單

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

從數學普及觀點來說，國中學生值得讀哪些書籍？這個問題在十二年國教特色招生的前提下，似乎也有兩難的困境。在如火如荼實施高中聯考或國中基測的年代，教師與家長基於升學壓力，沒有幾位「賢明的」家長與老師放心他們的子弟或學生閱讀數學普及書籍這些所謂的這些「課外書」。現在，高中聯考與基測都（以經或即將）廢除了，家長與教師大概又會為了明星高中的特色招生大感焦慮，因此，任何推動數學普及閱讀的活動，在國中這個學習階段，似乎又變得非常不切實際。

當然，如果特色招收學生的條件包括數學普及書籍閱讀，那麼，家長與教師「被迫鼓勵」他們的子弟與學生開始閱讀這些課外書，大概也很容易理解。如此，一般學生對於數學的印象，或許可以超出補習班講義與參考書之外。不過，總是因為考試而被迫唸書，不知道一般的青少年學生作何感想？不知道他們的「青春叛逆」有無可能呼應數普活動帶來的「知識獵奇」？

以下這一份書目，是應《親子天下》的編輯之邀所擬定，希望能為國中學生的數學學習，提供（主要出自補習班的）解題之外的視野。我的靈感部份來自馬祖爾（**Barry Mazur**）為《啟發每個人的數學小書》之推薦序：

> **這本小書所帶來的興奮感，剛好和它的大小成反比。這本書的重量，比如說，相較於當代微積分教科書（有時候，我很好奇搬著它們到處跑的學生，為什麼沒有額外的體育課學分），真是有相當大的對比。不知道是出自懶惰還是有一般的躁動靈魂，當我還是青少年的時候，我很喜歡那些去除噱頭，旨在寫出主題本質的並帶點叛逆性的輕薄小書。**

這本小書觸動了馬祖爾十二歲時的「躁動靈魂」，啟發或安頓了他的年少數學心智。馬祖爾是哈佛大學講座教授，是一位非常傑出的數學家。見賢思齊，他的反思或許值得我們參考與借鏡。

現在，請參考我所列舉的書目及簡短推薦文：

- 《快樂學習：圓形、正方形、三角形》〔套書〕，遠哲出版：

本書利用實作，學習大自然與日常生活中處處可見的方形、圓形與三角形，以及它們的幾何性質，啟發國中學生深刻體會數學知識如何有用與有趣。

•《如何穿過一張明信片》，究竟出版：

本書帶領讀者利用唾手可得的材料，比如紙、筆、直尺和膠水等，折出各種多邊形、曲線以及多面體等，幫助讀者在實作中體會相關的幾何原理。

•《3 小時讀通幾何》，世茂出版：

本書從簡單的圖形入手，逐步帶領讀者進入幾何學的結構世界，同時輔以漫畫的敘事，讓讀者可以透過「以畫圖表示」的途徑，將複雜的內容具象化。儘管最後兩章超出國中數學範圍，不過，開卷開眼界，無法完全理解又何妨呢？

•《摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學》，三民出版：

本書主要討論摺紙與尺規作圖，希望在摺紙的實作情境中，說明初等平面幾何與日常生活經驗之密切關連。雖然有些內容超出國中數學範圍，但是，本書作者群希望強調數學的古典內容，具有永恆的學習價值。

•《觀念數學小學堂》，小天下出版：

在這本六年級生七年級必備的數學先修讀本中，作者強調數學的概念理解，企圖為國中學生提供初等數學的結構面向知識。這在同一類型的數學普及讀物中，是非常難得的嘗試。

•《算法少女》，小知堂文化出版：

這是為少年讀者書寫的一本勵志類的數學小說。作者以十八世紀日本江戶為背景，敘述一位極富正義感且有數學才華的少女，如何拒絕大名的家教邀請，而以教導下階層的幼童數學為職志。

•《卡里布彎 • 數學獵人》，四也出版：

這是一本以布農族少年學習打獵的故事。作者巧妙地融數學問題於故事情節之中，因而數學的解題張力得以轉化成為小說敘事的張力。作者從數學小說這個文類入手，使得數學普及創作展現了更豐富的可能性。

•《啟發每個人的數學小書》，究竟出版：

這是企圖啟發每一個人的一本數學小書。儘管作者所謂的「每一個人」，並不一定包括青少年，然而，本書所展現的數學現代性之精神與自由主義的倫理主張之對比，即使對國中學生而言，也非常值得推薦。

•《神奇酷數學》（套書八冊），小天下出版：

本套書前四冊主題是數與量之計算與推理，後四冊則是有關圖形與空間的幾何知識。作者深刻瞭解初等數學知識的本質，並能以豐富多元的方式，配合插畫者對於數學的趣味元素之掌握，呈現國中小數學的有趣風貌。