HPM通訊

第二卷 第七期 目錄(1999 年 7 月)

創刊日：1998 年 10 月 5 日　　每月 5 日出刊
網址：http://math.ntnu.edu.tw/～horng

畢氏定理淺談

蘇意雯
師大數學研究所博士班

前言

1995 年 5 月任教於普林斯頓大學的英國數學家安德魯 • 威爾斯(Andrew Wiles)在《數學年刊》(Annals of Mathematics)上發表論文，徹底解決了歷經三百年，困惑無數數學家的<費馬最後定理>---$x^n+y^n=z^n$，當 n 大於 2 時沒有整數解。這是當代數學界一件振奮人心的大事。關於費馬的最後定理如何被證明，坊間已有數本譯作。由於這個定理起源於眾所周知的畢式定理：對於任一直角三角形，兩股的平方和等於斜邊的平方。意即當 x 、 y 為一直角三角形的兩股， z 為斜邊時，此三者滿足 $x^2+y^2=z^2$。因此，本文意圖對畢氏定理作歷史性的回顧，除了介紹神秘的畢達哥拉斯學派以外，並探討畢氏定理的意義以及此定理在數學發展歷史中所扮演的角色，希望藉由檢視的過程，對這個定理給予適當的定位。

一、畢達哥拉斯學派

畢達哥拉斯學派之所以圍上一層神秘的面紗，主要是因為畢達哥拉斯嚴格要求門徒必須遵守派規，不得對外洩漏秘密所致。關於畢達哥拉斯我們所知甚少，相傳其誕生於西元前 580 年前後的薩摩斯島（Samos）。畢達哥拉斯曾師事愛奧尼亞學派的領導人泰利斯（Thales），離開退利斯之後，他到各地遊歷，其中包括了埃及、巴比倫等地。一般咸認為畢達哥拉斯在遊歷中汲取了相當多當時所使用之數學知識。大約於西元前 540 年，畢氏定居於克羅頓（Croton），並在此地創設了一所學校。此學校的成員就是今日我們所稱的畢達哥拉斯學派。

畢氏學派的宗旨是「萬物皆數」（All is number），他們認為數是實體的最根本，所有的東西都含有數的成分，數是形成宇宙的要素。三角形數、方形數、長方形數、完美數（一個數等於比其小之所有正因數之和）等都是此學派所鍾愛的。對畢氏學派而言，所謂數僅指整數，兩個整數之比並非分數，而是另一類的數。因此當某些比值（例如等腰直角三角形一股與斜邊之比值）無法用整數之比表示時，此學派感到困惑和前所未有的疑慮。畢氏學派所選擇的處理方式是迴避，他們並不接受這種不可公度

量比的數（incommensurable ratios）。除了數學之外，數與自然的關係也引起畢達哥拉斯的興趣。他認為自然現象是由規律所支配，而這些規律可以以數學方程式來描述。

畢達哥拉斯經由單弦性質的研究，把關於樂聲比例的新理論應用於豎琴。單單撥弦會產生一個標準音，其是由振動著弦的整個長度產生。將弦在其長度的某處固定，會產生不同的振動和不同的音。若在弦長一半處固定弦，再撥弦後會產生一個與原來的音和諧的高八度音。同樣的在弦長的$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{5}$處固定弦，會產生其他的和音。但如果在整條弦長度的非簡分數處固定弦，則產生的音並不會與上述之音和諧。這是當時一個重大的發現，而這項成果也影響了文藝復興時期對音樂工作的研究。

從音樂的和聲、行星運行、牛頓的萬有引力理論，在在都顯示了物理世界存在著一個數學結構。時至今日，藉由數位電腦、數位手錶、數位收音機、數位錄放影像，或者我們可以說現在已經越來越接近畢達哥拉斯所謂「萬物皆數」的世界了。畢氏學派是一個宗教的、科學的、哲學的組織，無可避免地，他們也涉入了政治活動。由於此學派附和於貴族的政治派系而受到另一黨派的追殺。雖然畢達哥拉斯逃亡到 Metapontum，還是不幸的在那裡被謀殺（約為西元前 497 年）。畢達哥拉斯死後，其學派的成員仍散居希臘各處繼續傳佈其學說。之後的柏拉圖、亞里斯多得、歐幾里得都傳承自畢氏學派，是希臘哲學、數學的一代宗師，此乃是後話了。

二、畢氏定理的意義

畢氏定理的影響及一般化可應用到相當廣泛的領域，稱其為數學上最重要之基本定理並不為過。天文學家克卜勒（Kepler）認為畢氏定理為幾何學上的黃金，其在幾何學中所佔之份量可見一般。算術和幾何原本是不相關的領域，算術肇基於記數，是一個典型的離散過程。當計算過程結束時，算術的事實可以很清楚的被瞭解。而人們也不會期望從數值本身得到什麼意義。但幾何則不同，幾何處理線段、曲線、面等等問題，它們是連續而不是離散的物件。人們較希望看到的是幾何的事實而不是藉由計算獲致的結果。畢氏定理在這裡對於算術和幾何兩者之間所隱藏的深層關係，給予了第一個暗示，而且在數學史的發展上其在上述二領域之間處於關鍵性的地位歷久而不衰。關於畢氏定理，讀者可以很容易的發現，它對於像$3^2+4^2=5^2$這樣一個純算術的事實，存在於其中一個幾何的解釋。

一些學者認為畢氏定理在畢氏前一千年就為人所熟知。現在收藏於哥倫比亞大學的巴比倫楔形泥版 322（Plimpton 322），是西元前 1700 年左右的文物。下圖是原始的楔型泥板，另一圖則是對照於現代所使用之數學符號。

經過 Neugebauer 等學者的解釋，這份泥版是一份數學作品而且也蘊含一個合理的數學解釋。我們可以看到其上有十五組畢氏三元組。所謂的畢氏三元組就是直角三角形兩股長為 a ，b ，斜邊長為 c 。若 a ，b ，c 三者無共同因素，則 $a=(p^2-q^2)$ ，$b=2pq$ ，$c=p^2+q^2$ 。其中 p ，q 為整數。我們可以很容易就得到，若 (a,b,c) 三者互質且為一畢氏三元組，則 a 和 b 兩者必定一為奇數一為偶數。

y	$\left(\frac{d}{y}\right)^2$	x	d	#
120	1.9834028	119	169	1
3456	1.9491586	3367	4825	2
4800	1.9188021	4601	6649	3
13,500	1.8862479	12,709	18,541	4
72	1.8150077	65	97	5
360	1.7851929	319	481	6
2700	1.7199837	2291	3541	7
960	1.6845877	799	1249	8
600	1.6426694	481	769	9
6480	1.5861226	4961	8161	10
60	1.5625	45	75	11
2400	1.4894168	1679	2929	12
240	1.4500174	161	289	13
2700	1.4302388	1771	3229	14
90	1.3871605	56	106	15

在數學發展的歷史中，我們常可發現數學家在不同的時空下，各自獨立地發展出相同的定理。西元前 500~200 年間的印度 Sulvasutras 也提及畢氏定理並出現了（5，12，13）（8，15，17）（7，24，25）（12，35，37）等畢氏三元組。在中國的數學史上，我們稱此定理為商高定理。這是因為於周髀算經中曾記載了這樣一段話:「昔者周公問於商高曰:『竊聞於大夫善數也，請問古者包犧立周天歷度，夫天不可階而升，地不可得尺寸而度，請問數安從出？』。商高曰：『數之法出于圓方，圓出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩，以為勾廣三，股修四，經隅五。』」這是中國第一次出現的畢氏三元組（3，4，5）。至於勾股弦關係的一般式，則同樣記載於此算經。「陳子曰：『若求邪至日者，以日下為勾，日高為股，勾股各自乘，并而開方除之，得邪至日，……』」。

有關於此定理更詳細的敘述是在中國的《九章算術》第九章。這本算經的編纂年代大約是在東漢初期，書中收集了兩百四十六個應用問題的解法，分別隸屬於方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、句股九章。九章算術之成書是因為春秋、戰國時期社會生產力逐漸提高，促進了數學的發展。當時各國的統治階級要按畝收稅，必須有測量土地、計算面積的方法；要儲備糧食，必須有計算倉庫容積的方法；要修建灌溉渠道、治河堤防和其他土木工事，必須能計算工程人工；要修訂一個適合農業生產的曆法，必須能利用有關的天文數據。那時的百姓掌握了相當豐富的、由日常生活中產生的數學知識和計算技能，《九章》之成書就是這些知識的彙整。句股章全章對畢氏定理有深入的探討。以下我們將做個簡單的介紹。

要談論《九章算術》就不能不提及劉徽，如果我們視《九章算術》為一數學骨架，那劉徽的註解就是賦予其血肉，真正地體現了《九章算術》的精神，使之成為中國古代數學的代表。相傳劉徽是三國魏晉時人，為一位布衣數學家。劉徽認為數學現象是多樣性的統一，各種各樣的數學方法都有共同的本源。他在《九章算術注原序》中寫道：

事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹者，知發其一端而已。

劉徽注貫穿了這種認識，特別注重對數學理論追本溯源，提綱挈領，竭力引進數學中最基本的概念原理，在這個基礎上建立他的理論大廈。在數學的方法論上，劉徽主張把生動的直觀與抽象的邏輯論證結合起來。正如《九章算術注原序》云：

又所析理以辭，解體用圖，庶亦約而能周，通而不黷，覽之者思過半矣。

辭和圖不僅展現劉徽的數學成就，也顯示出劉徽高超的邏輯思想。劉徽全面證明了《九章算術》的公式解法，彌補其不足，奠定了中國數學的理論基礎。

《九章算術》的勾股章是流傳迄今的中國古代最早有系統的勾股理論。全章二十四問，大體分為兩部分：前者為以勾股定理為中心的解勾股形算法，後者屬於勾股測量問題。前後問題性質不同，解題方法亦大相逕庭。劉徽利用出入相補原理證明解勾股形的公式：

勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也，合成弦方之冪。

劉徽的《九章䂓蘆悛》闡明了從出入相補到勾股比率論的理論發展過程，概括出古代勾股算法完整而嚴謹的理論體系。

尾聲

如前所述，雖然各民族都出現了同樣的定理，但為何最後人們卻以畢達哥拉斯定理（Pythagorean theorem）命名呢？這就與各民族性有關了。有些民族較重視數學之實用性，他們在意的是如何使用數學，使其對日常生活有所幫助。而希臘人醉心於心智的鍛鍊，熱衷於演繹推理，他們能純粹地欣賞數學之美，也願意致力去發掘數學本身所蘊藏之意義。所以最後對此定理希臘人真正提出幾何證明。歐幾里得的《幾何原本》收錄了相當多有關畢氏學派的數學成就，其中畢氏定理的證明編寫於第一冊命題 47。至今為止，有數百種關於畢氏定理的證法。這個在古文明時代就為人所知的古老定理，時至今日仍歷久彌新。文章即將結束，經過了這些介紹，下次，當您於解題過程中運用到畢氏定理時，或許會有另一番不同的體會吧！

參考文獻

1. Courant, Richard and Herbert Robbins,（Revised by Ian Stewart） 1996. What is Mathematics?--2nd ed. , Oxford University Press, Inc.
2. Grattan-Guinnes, Ivor 1997. The Fontana History of the Mathematics Sciences, Fontana Press.
3. Heath, T. L. 1980. Mathematics in Aristotle, Garlano Publishing, Ine.
4. Hirschy, Harriet D. 1989." The Pythagorean Theorem（National Council of Teachers of Mathematics）", in: Historical Topics For The Mathematics Classroom, pp.215~218.
5. Katz, Victor J. 1993. A History of Mathematics, HarperCollins College Publishers .
6. Stillwell, John 1989. Mathematics and Its History, Springer-Verlag New York Inc .
7. Trimble, Harold C. 1989."Number Beliefs of The Pythagoreans （National Council of Teachers of Mathematics）", in: Historical Topics For The Mathematics Classroom, pp.51~52.

8. Kline, Morris 1983. 《數學史- 數學思想的發展 上冊- 數學思想的發展 上冊》（Mathematical Thought from Ancient to Modern Time），
9. 林炎全、洪萬生、楊康景松 譯,台北：九章出版社。
10. Singh, Simon 1998.《費瑪最後定理》（Fremat's Last Theorem）,薛密 譯,台北：臺灣商務印書館。
11. D. Aczel, Amir 1998.《費馬最後定理》（Fremat's Last Theorem）,林瑞雲譯,台北：時報文化。
12. 錢寶琮《九章算經點校》，台北：九章出版社，1984。
13. 李繼閔《九章算術〉及其劉徽注研究》，台北：九章出版社，1992。
14. 郭書春《古代世界數學泰斗—劉徽》，台北：九章出版社，1995。

科展二三事

彭君智老師

台北市景興國中

國三時頭一次聽到科展，三位同學被「派」去研究，後來一位保送武陵。高一時，和同學做水果電池（每班要出一件作品），結論是：誰來發明「四用電表」？教書之後，指導過兩次科展，很幸運的有點成績，在此拋磚引玉，把些許見聞和心得與大家分享：

【現況】：科展在各縣市早行之久遠，但在專事「傳道、授業、解惑」的學校，則如天高皇帝遠；而在某些學校則是「皇上不急，急死太監」，被列為資優班師生的重點項目。故每年一度的盛會，似乎成了「科展老兵」的聚會。

【指導】：一般說來，科展難，難在沒有題目、沒有課本、沒有人教，而最為人所詬病的便是：老師捉刀。其實「教與學，本相長」，指導教師絕對會變成「共同研究者」。學生查資料、整理、研究、下結論，但通常不完整（畢竟所知、見聞有限），指導老師便會技癢難耐地「下海」協助，從引導、拓展到歸納，甚至做到後來比學生還認真（知之、好之、樂之）。至於全由老師做好「教」給學生的情形，只能說是少了「教師組科展」，埋沒了有志之士。然而校內科展通常相反，老師真的只掛名、沒指導（鼓勵報名之後，便是修行看個人），學生甚至也沒請教過師長，以致有的研究產生偏差、選錯數據；有的想法很好，但走不下去。如今年本校很多組做**商高定理**，其中一組曾想過三次方的推廣，但不了了之，若能適時點出費瑪最後定理這段歷史，相信「驚喜」便是學生此次科展的最大收穫。

【評審】：第一年北市評完，學生笑不出來，因為教授只對隔壁的電腦有興趣；全國時，學生快哭出來，因為教授愛問不問的。今年可能是位置佳，教授有興趣，問了近二十分鐘，學生出來信心滿滿；全國時則完全相反，教授進門，劈頭就罵，只見有些學生被罵得一蹋糊塗，還來不及說重點，教授已走人；有的雖有招架之力，但也信心全無；只有幾組幸免於難，甚而請到辦公室複審。姑且不論教授對作品的關切程度與得獎是否成正比，但是以「不聞不問」，或是像「審論文」般的態度來對待中學生，似乎不甚恰當。不論是否會得獎，作品好的地方就該鼓勵，若有不完整或是錯的地方，點出來，讓學生了解、改善；萬一真有書籍、刊物與作品雷同，更是提出資訊供學生參考、比較的好時機，因為就數學歷史而言，這種「家常便飯」，鼓勵都嫌來不及（除非是存心抄襲）。而學生提出來的疑問，也應盡量深入淺出的給予回答（對象只是個中學生），而不是群、拓樸等專有名詞。至於罵，相信是最失敗的身教與言教。

數學上的家常便飯（不同的人、時、地、事、物，竟發展出相同的定理），只要懂得珍惜，都可以是山珍海味，舉個例：提到**畢氏定理**，相信不少老師會介紹些歷史：百牛定理、根號 2 跳海、勾股弦圖¼ 等，甚至費瑪也參一腳。以下這個畢氏的發現請大家玩味：**如何從圖形數**（註一）**推論出弦、股數差 1 的直角三角形？**例如（勾,股,弦）＝（3 , 4 , 5）、（5 , 12 , 13）、（7 , 24 , 25） 不少學生（通常不是考一百的）由觀察、類比，很快就推算出接下來會是(9 , 40 , 41)、(11 , 60 , 61)¼ （註二），奇怪的是，對圖形數卻都沒輒。每當下課前點出答案，學生才發現「被耍得漂亮」，不要說弦、股數差 1，要找差 n 的也不是問題（註三）。

課堂上，大家習慣用「結果論」：告訴你三角形內角和等於一百八十度，然後才去用各種作圖、摺紙、剪貼等方式說明為什麼？補習班最強，直接印一疊比課本還厚的「攻略本」，如此能出幾個像巴斯卡的怪胎：重新發現三角形內角和定理？而身為數學教師的我們，對於數學，又曾有過多少像阿基米德發現浮力原理般的驚喜？其實，不論是對老師還是對學生而言，數學處處都可以是科展（不是每個都要拿去比賽），只要細細品嚐，哪天不小心，你我就可能踩著前人走過的足跡，再次享受發現的樂趣，甚而打開數學 å 的另一片天。

註一：**圖形數**詳見數學家傳奇（九章出版社 p.98~p.100）

註二：學生通常可觀察出下列結果，再經定理計算確認。

a：勾為連續奇數 (3,5,7,**9,11**…等差數列)

b：股為二階等差數列 (4,12,24,**40,60**…)

c：勾的平方= 股+ 弦 (還有不少漂亮的結果)

p.s.還未曾碰過能由題意推算出公式的學生：

$$\left(\sqrt{2n+1},n,n+1\right)\text{或}\left(m,\frac{m^2-1}{2},\frac{m^2+1}{2}\right)\text{或}\left(2\alpha+1,2\alpha^2+2\alpha,2\alpha^2+2\alpha+1\right)$$

註三：畢氏學派的發現，其來有自：萬物皆為數（而且是有理數），故當發現驚為「神喻」的定理時，當然得和教義相輔相成，否則就得去跳海—**發現無理數**，而找出所有整數邊的直角三角形，就等於是找出所有有理數的直角三角形。圖形數在這裡扮演了重要的角色：

三角數（ $T_i=1,3,6,10,15,\cdots$ ）其實就是等差級數數列
四角數（ $R_i=1,4,9,16,25,\cdots$ ）碰到平方，故線索就在其中。它可以表示成兩個連續三角數的和：$R_n=T_n+T_{n-1}$ ，或是首 n 個正奇數的和：

$$R_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)\text{，}$$

觀察

$$3\times3=1+2+3+2+1=1+3+5$$
$$4\times4=1+2+3+4+3+2+1=1+3+5+7$$
$$5\times5=1+2+3+4+5+4+3+2+1=1+3+5+7+9$$

到底**弦、股數差 1** 的關鍵在哪?(可別想得太複雜，免得事後發現被耍)原來 $5\times5=1+3+5+7=4\times4+9$，所以從 R_n 到 R_{n+1} 所加的奇數 $2n+1$ ，若恰為四角數時，即為所求，而且很快就能歸納出註二中一籮筐的現象。欲求弦、股數差 n 時，只要從 R_i 到 R_{i+n} 所加的 $(2i+1)+(2i+3)+\cdots+(2n-1)$ 恰為完全平方數時，便萬事 OK，也能找出註二般一卡車的結果。從時代背景來看這樣有目的的發現，您說美不美？

數學教師教育的重新設計

林福來教授
台師大數學系
西松高中蘇惠玉老師摘譯

§ 0. 會議報告

這一篇文章是 5 月 10 日至 14 日在台北舉行的「1999 國際數學教師教育會議」的簡短報告。這次會議的議程包括一個主題演講，十二個專題演講，十八篇論文發表，四個小組討論，和一個 MILE（多媒體互動學習環境）的研討會。四個小組討論的主題分別是數學經驗、在職進修、相關研究和教師專業發展的概念化。這篇報告的第一部份，§ 1~§ 5，敘述主題演講者、專題演講者和論文發表者提出的一些觀點。第二部分，§ 6，敘述從小組討論中提出的一些問題。這些問題中的某些部分，對台灣教師教育的改革而言，特別的重要。而許多問題在本質上較偏向全面性的而非區域性的。

§ 1. 前面的觀點

主題演講者 Cooney T.為這次會議的學術議題揭開序幕，提出「思考教師專業發展中的弔詭、險境和概念化的目的」。為了幫助教師發展一種認知的方法，使其注意到脈絡和使教師有能力去適應不同的脈絡，他主張教育教師的複雜過程，不只應該包含專業知識的發展，也應該包含關於數學和數學教育信念的檢驗。然而，教師教育的險境，即是學生教師常常在尋找，能夠使他們在教室中確保其正確的教學技巧。但是，這樣的課程內容，產生了一種引發懷疑和多慮的反應態度。

除了險境之外，Lerman S. 基於對各種數學教師教育的研就觀點上的綜論，他注意到現今仍沒有適當的或是足夠的教師學習理論。從教師和教師教育者的觀點來看，一套教育課程想要成功，Cooney 強調，必須從數學活動開始，且應該使得給教師們的數學議題能被思考，亦即思考數學內容的選擇，學習數學的方法，和教師的數學經驗與教學的相關性。從理論的觀點來看，Lerman 建議，關於強調動機和目的的複雜性、知識/權力，和在社會運作中認同之形成的理論，在教師教育中要更為重要。

§ 2. 數學的意義

使學生能夠對數學賦予意義，是數學教學中的其中一個基本焦點。如同 Cooney 建議的，成功的數學教師教育課程，必須從數學開始。一些演講者和論文發表者，確實都遵守這樣的取向。像是數學探究、提問題、直觀推理和以新科技的學習（像是 Cabri 幾何），這樣的活動被考慮成不只為了數學學習而已，也被想成是為了讓教師對數學活動的本質、學生不正確的的回應，和學習數學賦予意義。Ponte J. 經由學生教師和在職學生敘述的實例，歸納出要討論學生在教室中的作為和教師在日常活動和專業發展的作為，探究式的範例是非常好的一套體例。

Leung S. 在綜合基本數學課程中所帶有的問題時，在三年的期間，她組織了一些給在職教師的研討會。其中一位教師寫信給她，並且評論了他認為的，提問題的方式的五點吸引人之處：1).小孩子喜歡提問題 2).從孩子的思考中能夠學習更多 3).能夠評量我們的教學方式 4).語言同樣的被重視，而不

只是數學而已 5).如果問題是合理的，小孩子就會開始去詢問。然而，對教師潛在於這些活動之下的改變過程的分析，對幫助教育者理解教師專業發展計畫而言，似乎是必要的。

§ 3. 教學的意義

教學是複雜的，教師教育應該要闡明並研究這種複雜性。為了要幫助教師對數學教學賦予意義，Groffree F. 和 Oonk W. 邀請這次會議的與會人員參加 MILE（多媒體互動學習環境）。在 MILE 中，實作知識的豐富資源開放給學生教師們，學生教師們都可獲得沒限制的實際研習案例；對理論上的重新選擇而言，教學範例也是可獲得的；而且一種環境能夠被創造出來，在其中，學生教師們能學習如何從實際的教學範例中去學習和精通被要求的研究取向。實際上，MILE 主要的關聯，在於實作與理論之間的廣泛的相關性。MILE 能夠使學生教師將實際的教學範例，提升到全面性的探究。

在某些社群中，他們的教育改革運動中的一個中心思想，即是學習數學應該發生在一種互動的環境中。在其中，教師應該戒除她為教室中心的傳統地位，應該要扮演一種不冒昧的幫助者和領航者的角色。Sfard A. 和她的研究搭檔已經發展了一套特殊的工具去分析教室互動的本質，和它們無效的可能理由。基於他們的分析，她建議若要對話是有效的，且有助於學習，那麼就應該要教導溝通的藝術，而且在學生的學習互動過程上，教師的角色要比現今的教師重要得多，因為現今的教師都忽略了這件事。

§ 4. 教學脈絡的意義

在研究教師專業發展時，包含工作地點、專業組織、教科書和數學教育中的價值觀等等的教學脈絡，也在這次會議中被論及。Cobb 考慮到教師經由集中在他們工作所在學校制度脈絡上的社會實際經驗的演化的持續性。廣泛來說，Cobb 考慮了可能是以教師為會員的教學團體的對話主題的那些議題。這些議題包括了 1).發展數學討論的規範 2).確保學生的活動保持在以數學想像為基礎的問題情境上 3).再次陳述和輪流學生的解釋。

在數學教育中的價值觀，是教室中隱藏的說服者。但它們總是隱涉在教師的教學中，但是似乎又對學生的學習有強烈的影響。Bishop A. 分析了澳洲的課程內容，且發現價值觀呈現在既定的課程層次，也呈現在技巧的層次中，同時，學生的價值觀會在成就的層次上有所影響。通常一種全面的論述會包含關於價值觀的想法，但是，關於什麼樣的價值觀應該被教，和他們應該作些什麼方面，教師卻只得到少許的忠告。Bishop 和他的同事在 Monash 大學剛開始的研就計畫中，他們將價值觀想成是「行動的信念」。也就是說，我們能夠將教師的行動和決定當成是資訊的來源，來當成研究般的分析，並且創造學生教師教育活動。價值觀分類的活動能夠在教師教育中非常的有幫助，因為它們能呈現出，使學生教師思考關於他們自己的價值觀的決定性情境。Chin C. 嘗試將數學教師的教學價值觀原理化和理論化。從社會心理學理論的觀點來看，價值觀能夠被想成是一種關於數學和教學法的雙重地個人的-社會的認同。如此，價值觀的系統被看成是「認同的內-外辯證」。

§ 5. 後面的觀點

Krainer K. 告訴了我們一個反映出一位數學教師生涯的例子。目的不只是在描述她個人的發展，

更是在描繪出它如何互相連絡了學校發展和整個澳洲的教育系統。在解釋這個故事時，Krainer 建議，在國家中教學品質系統性的加強，不只建立在選擇性的個別教師專業發展上，而是在學校、地區中要盡可能多的數學教師參與其中，加上其他相關的監督者，像是系主任、校長、督察、教師教育者、父母和學生，以期在教室發展、學校發展和整個教育系統的發展中建立起橋樑。

Jawoiski B. 提出數學教師和教育者間關係的複雜性。他們二者都是發展和改善數學教學整體的參與者，以期使學生在教室中更有效的學習數學。她認為教師的價值觀，如同教育者從事研究一樣，是發展他們教學過程的一部份。Jawoiski 進一步的建議一種教師和教育者間的「共同學習搭檔」，能夠使教師分享在發展過程中的責任感，從中得到更有效的專業發展。

§ 6. 挑戰議題中的意義

在四個分組討論主題中，許多的問題提出來等待進一步的挑戰。某些問題陳述如下：

- 有些時候，數學教師應該像一個民族誌學者（如同 Sfard 建議的），而有些時候要像一個科學家。教師如何能發展他們在教室中有效的扮演這二種角色的能力？
- 數學教師需要什麼樣的數學經驗？例如，純粹或是應用的數學經驗？
- 教師要改變他們對數學、如何教數學、學生如何學數學的信念或知識，需要什麼樣的動機？
- 在教室實作中，要刺激改變需要什麼樣的政策、支援和資源？例如考試、家長、金錢（物質、電腦等等）。
- 是否可能改善大學中數學的教學方式？
- 有經驗的教師如何去準備，以適應科技的學習環境？
- 如何在教育系統中去改善指導制度？
- 如何鼓勵教師獲得自主性，並承擔責任？
- 想要改善數學教學，就必須改善評量系統和它的影響力。

網站大公開：昌爸工作坊

蘇惠玉老師
西松高中

站名：昌爸工作坊
網址：http://www.mathland.idv.tw/
站長：李老師

記上次介紹的這個網站後，這期再介紹給讀者一個網站，也有相當豐富的內容，且屬性與「老顏的家」差異蠻多的。即是李老師的「昌爸工作坊」。這個網站是小蕃薯推薦的親子數學網站，李老師自己定義的也是為「中小學學生創造一個數學樂園」，所以，內容非常的豐富有趣，將數學的樂趣展現無疑。這個網站中，分了好幾個主題：

1. 數學家與數學史：介紹許多偉大的數學家，並且除了常見的那幾個偉大的，非我族類的「外國人」之外，還介紹了陳省身、華羅更以及丘成桐。在數學史中，李老師介紹了《九章算術》與《幾何原本》，祖沖之與 π ，宋朝的數學成就，還有中小學生會很感興趣的埃及、巴比倫和馬雅數碼。
2. 趣味的數學：以代數、幾何、邏輯推理來分類。將坊間常看到的有趣的小問題收集在一起。
3. 生活的數學：有可以休閒欣賞的，也有日常應用的。
4. 遊戲的數學：在這裡，可以和電腦玩遊戲，動動腦，從遊戲中，學習數學的創造力。
5. 實驗的數學：提供學生另一種學習數學的經驗。有代數和幾何兩方面。代數方面，利用電腦的一步一步的特性，讓有心者跟著學習。幾何方面，更是大量利用 gsp 的動態模擬能力，將許多課堂上不容易表現的問題，化成電腦上一個小動作，只要去「拉一拉」，就可以比課堂上講得半死要有效多了。
6. 研究的數學：分為科展、討戰題、奧林匹亞是題、網路數學競賽、九年一貫教材內容的相關介紹，以及 86-88 年各教授所做的數學教育專題研究的清單。
7. 昌爸的書房：在這裡有通俗數學書籍的介紹（還不少喔！），國一第二冊的教材講義，國中各單元的複習試題，還有軟體以及其他網站的鏈結。其中，講義的部分，由淺入深，更是充分利用電腦的特性來演譯，也許是另一種不錯的學習經驗。