

HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 英家銘（清華大學）
 創刊日：1998年10月5日
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horn>
 聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十三卷第三期目錄2020年9月

- ▣ 數學經驗的敘事美學：以歐拉算式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 為例~(一)……洪萬生
- ▣ 數學題·台南味……林倉億
- ▣ 導讀《數學、詩與美》
 ……………洪萬生

數學經驗的敘事美學：以歐拉算式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 為例~(一)

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

一、前言

在數學普及著述（尤其是數學小說）中，歐拉算式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 是一個最常見的等式，¹它讓許多數學家、科普作家乃至於（職業）小說家痴迷不已。他們總是設法將它引進作品之中，成為數學知識如何優雅、或者故事情節如何有趣的不可或缺環節。譬如說吧，蘇惠玉老師在她的《追本數源：你不知道的數學秘密》（2018）中，就運用一整章（第21章）的篇幅，來介紹「歐拉與最美的數學公式」。其中，她特別指出：

歐拉令人讚嘆的才能中，還有一項是別的數學家很難望其項背的，即是對自己研究成果的堅定信念與無與倫比的數學直覺，這兩點充分體現在他著名的無窮級數求和與本篇文章要陳述的歐拉公式上。（頁196）

事實上，她在台灣開風氣之先，很早就大力推薦《博士熱愛的算式》，讓我們跟著喜愛這本主要基於 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 所創作的數學小說。

另一方面，有些國家在發行紀念郵票時，也會將此一公式的「源頭」形式納入，比如，圖一的紀念歐拉的郵票。這是1957年4月17日，瑞士為了紀念歐拉的二百五十週年誕辰所發行的郵票。²

此處所謂的「源頭」，是指此郵票中所展示的如下公式：

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

¹ 在本文中，歐拉算式專指 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 這個公式，呼應《博士熱愛的算式》之說法。

² 這張郵票中的拉丁文 *Helvetia*（赫爾維蒂婭）是瑞士聯邦的象徵。這一名稱和瑞士的官方名稱「赫爾維蒂亞邦聯」，都源於羅馬帝國征服瑞士高原之前當地的居民赫爾維蒂人。參考維基網頁。

而非大家所熟悉的 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。事實上，後者是前者帶入 $\varphi = \pi$ 所得到的結果。為了方便敘述，我們在本文中將前者 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ 稱為「歐拉公式」，至於後者 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 則仿作家小川洋子的《博士熱愛的算式》之說，而稱之為「歐拉算式」。

在本文中，我們除了引述這些有趣的郵票之外，還要說明數學普及作家以及數學小說家，如何在這個歐拉公式上「說故事」（或「做文章」）。但最重要的，我們也打算介紹歐拉如何導出他的公式。如此，我們對歐拉數學經驗的美學品味，或許就可以獲得更深一層的體會。最後，如果有人打算將這些敘事與「史料」引進教育現場（譬如大學數學通識或高中特色課程），我們也希望提供一些或可參酌使用的建議。



圖一：歐拉紀念郵票，瑞士，1957

二、歐拉及其紀念郵票

歐拉（1707-1783）出生於瑞士巴賽爾（Basel）。他父親保羅（Paul Euler）是喀爾文教派牧師，年輕時曾經與約翰·伯努利（Johann Bernoulli, 1667-1748）一起寄宿在雅各·伯努利（Jacob Bernoulli，約翰的哥哥）家中，從中學到一點基礎數學。因此，在學校教育無法提供數學課程時，父親是歐拉的數學啟蒙者。還有，也因為父親與伯努利家族的關係，歐拉終其一生，都與這個數學家族維持濃厚的情誼。歐拉也因此有機會在約翰的指導之下研讀數學。

約翰發現歐拉的數學天賦之後，向歐拉的父親說項，讓他在 1723 年獲得碩士學位之後，放棄父親為他規劃的神職生涯，³而專研數學。這時他才十六歲。

1725 年，歐拉在數學上開始嶄露頭角。1727 年，還不到二十歲的歐拉，就完成了一篇有關互反曲線（reciprocal algebraic trajectories）的論文，參加法國科學院的徵獎，結果榮獲第二名。這個榮耀讓伯努利家族得以推薦他，到俄羅斯新創立的聖彼得堡科學院擔任生理學助理，他的任務是教授數學與力學的應用。歐拉沒有馬上赴任，因為他也申請巴塞爾大學物理學教授的職位。在因為他太年輕而被拒絕之後，歐拉前往聖彼得堡就

³ 歐拉父親的原先安排是有道理的，因為當時歐洲大學繼承中世紀傳統，大學之後的學習都與職業選擇有關，學生除了神學院之外，還可進入法學院與醫學院就學。

任。後來，他先是轉任數學 – 物理部門研究員，再轉任數學部分門的資深研究員。

這是 1733 年的故事，當時他的經濟條件改善而得以結婚。他們夫婦總共生了十三個小孩，其中只有五個存活下來。不過，家庭的經濟負擔並未影響他的研究，可是，卻有可能重創他的視力。1738 年，他的右眼視力變差，幾近全盲（參考圖一、圖四畫像中的右眼）。此時，柏林科學院力邀他加入，於是，他在 1741 年轉任該院的研究員。

儘管附帶的公關服務工作頗為繁重，歐拉在柏林科學院的二十五年間，還是交出了大約 350 篇論文，以及出版主題遍及變分法、分析學、行星軌道、月球運動、彈道學，以及船隻建造等多各色各樣書籍，當然也包括《給德意志公主的書信：泛談物理與哲學》，一本十分有名的科學普及著作。

不過，由於菲特烈大帝的過度干預科學院事務，以及另一方面，俄羅斯凱瑟琳二世的邀約，歐拉在 1763 年回到聖彼得堡科學院。不幸地，回俄羅斯沒多久，他的左眼因病使白內障加劇，雖然動了手術，但由於他疏於照顧，最後連左眼的視力也完全消失。禍不單行，1771 年他家中失火，所有數學手稿幾乎付之一炬。儘管如此，他始終樂觀以對。1783 年 9 月 18 日，他照常工作，下午五點忽然腦出血，於下午七點鐘安然去世。

有關歐拉的數學成就，可以參考《毛起來說 e 》，其中，作者毛爾（Eli Maor）對於歐拉的研究成果，尤其是「 e 正式現身」以及「 e 的更多引伸」這兩節，更是言簡意賅，是了解歐拉極有幫助的數學普及書寫，非常值得參考。當然，如果願意參考英文版傳記，那麼，方便且可靠的版本，莫過於 <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html> 網站中的“Leonhard Euler”，由英國聖安德魯大學（St-Andrew University）數學家 J. J. O'Connor 及 E. F. Robertson 合撰。

接著，我們介紹有關歐拉的五張紀念郵票，它們是由瑞士、前蘇聯、前東德、以及南韓所發行。⁴除了南韓之外，其他三個國家的發行，都與歐拉的生涯（出生、成長與任職）息息相關。儘管如此，這些郵票設計者所想像的歐拉及其數學貢獻，或許也是我們探討發行國的數學文化的一個切入點吧。

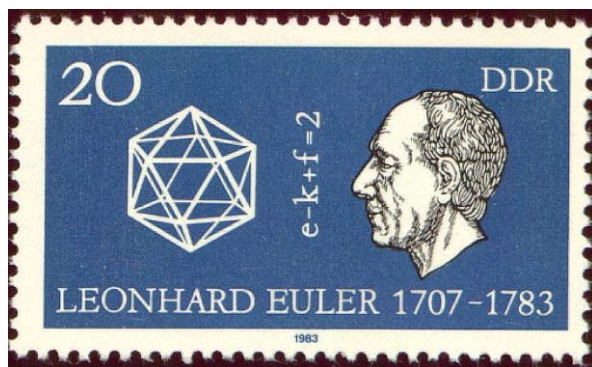
有關歐拉的紀念郵票，最早在 1957 年，瑞士（圖一）及前蘇聯（圖二）為了紀念歐拉二百五十週年誕辰而發行。圖三由前東德（DDR）於 1983 年發行，紀念歐拉二百週年逝世。圖四由瑞士於 2007 年發行，紀念歐拉三百週年誕辰。圖五則由南韓於 2014 年發行，紀念國際數學家會議（International Congress of Mathematician, ICM）在首爾召開，其中歐拉肖像不在場，然而，七橋問題的不朽與普及意義，卻獲得彰顯！

⁴ 參考網站：<http://jeff560.tripod.com/stamps.html>。



圖二：前蘇聯發行，1957 年

在由前蘇聯所發行的這一張郵票中，我們可以發現除了歐拉的畫像之外，還有一棟相當雄偉的建築物，那應該是歐拉長期工作過的聖彼得堡科學院。至於由前東德於 1983 年（圖三）、瑞士於 2007 年（圖四）各自發行的紀念郵票，則除了歐拉的畫像之外，數學公式被歐拉定理取而代之。這個定理表示一個凸多面體的頂點數 (e)、稜數 (k) 及面數 (f) 的關係： $e - k + f = 2$ 。⁵後來，在代數拓樸學 (algebraic topology) 中， $e - k + f$ 稱為歐拉示性數 (Euler characteristic)，它是一個拓樸不變量，特別地，若一個多面體與球體同胚 (homeomorphic)，那麼，它的歐拉示性數就會等於 2。

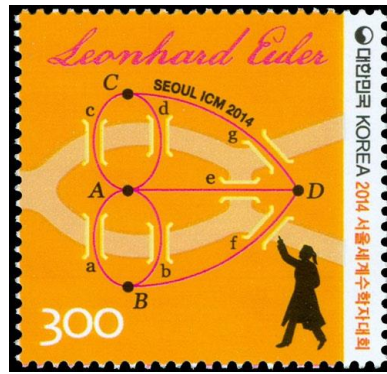


圖三：前東德發行，1983 年



圖四：瑞士發行，2007 年

⁵ 利用這個定理，我們很容易證明只有五個正多面體（稱之為柏拉圖多面體）存在。那是《幾何原本》第 XIII 冊的主題，但是，利用歐拉定理來證明，則簡便多了。



圖五：南韓發行，2014年

另外，由2014年由南韓發行的紀念郵票（為了紀念國際數學家會議（ICM）在該國舉行），則以「哥尼斯堡七橋問題」為主題。這個本質上是（圖論）一筆畫的問題，也與拓樸學（歐拉當時稱之為「位置幾何學」）有關，源自歐拉在1736年發表的論文〈與位置幾何有關的一個問題的解〉，常被視為拓樸學與圖論的先聲。此外，此一問題也是數學普及著述的最愛，不過，讀者若有機會研讀歐拉的論文，⁶一定更能貼近他的進路才是。

因此，我們在此介紹的郵票所引用的歐拉數學，依序是歐拉公式、歐拉定理（有關凸多面體）及七橋問題。這個順序似乎也呼應著數學普及的著眼點，從「菁英關懷」走向「普羅觀點」，對一般社會大眾，七橋問題顯然容易理解多了。同時，發行歐拉郵票的國家，也從他的（第一故鄉）瑞士、（第二故鄉）前蘇聯及（第三故鄉）前東德，擴及到南韓等等。

由於對一般讀者來說，第一張郵票最難以「親近」，因此，我們在下文中，除了介紹科普書寫（第三節）或小說創作中的歐拉算式（第四節）之外，也將（在第五節）引述歐拉如何導出 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ，讓我們一起向歐拉大師學習！

（未完待續）

⁶ 歐拉，〈論哥尼斯堡七橋問題〉，李文林主編，《數學珍寶》（台北：九章出版社），頁617-626。

數學題·台南味

台南一中

林倉億

一、歷史背景老實說

過去一、二十年，各種教育改革、教育思潮的名詞，「前仆後繼」地出現，別說是學生與家長了，就連教育現場的教師們，對各種名詞，也常常是一頭霧水。而在各種改革或改變中，最容易引起討論或爭論的，就屬升學制度。在台灣，升學制度有許多冠冕堂皇的官方說法，比如說「多元入學」、「適性入學」、「適才適所」、「選其所愛、愛其所選」…等等，不可否認地，這些崇高理想的確是很重要，但回到實際操作面，台灣升學制度的宿命似乎就是被化約成「升學考試」！說白了，就是考什麼、怎麼考、如何比序。

過去5年（民國104~108年），台南區是全國唯一有「高中特色招生聯合考試分發入學」的就學區。全國不是只有台南區有高中的特色招生（以下簡稱「特招」，詳細介紹請讀者至教育部國教署「十二年國民基本教育」網站查詢，網址：<http://12basic.edu.tw/index.php>），基北區、桃連區也有特招，但參加的高中學校與招生名額，只佔該學區很小的比例。台南區，參加的學校其實也不算多，只有5~7所高中，名額不足800個，參加考生不過2000多人（各年度參加的學校數、招生數、考生數不盡相同）。以108學年度入學為例，台南區有47間公私立高中職，共14328個招生名額，其中參與特招的高中有6間，特招名額共606個。就數字上來看，台南區的特招似乎也是「微不足道」，但與其他區特招最大的不同之處，就在於參與的這6間學校中，所謂的「明星高中」、「第一志願」的台南一中與台南女中，特招名額不僅佔了全體特招名額的大部分，也是兩所高中主要的入學管道之一。同樣以108學年度入學為例，台南一中與台南女中的特招名額分別是288個與180個，而台南一中該年度的各種管道招生總名額為666個，其中特招名額佔了43%。108學年度入學除了台南一中、台南女中參與特招外，還有台南二中、家齊高中、南科實中、南大附中，全是台南區所謂「前幾志願」的學校，因此，台南區的特招在全體招生名額中雖然是「微不足道」，但在許多學生、家長心中，卻有「舉足輕重」的角色。

台南區的特招為何如此與眾不同？廖翠雰、廖年淼〈免試入學超額比序機制催生台南區的特色招生〉一文比較了台南區與高雄區、基北區的採計標準，指出超額比序機制是台南區成為全國唯一有「高中特色招生聯合考試分發入學」就學區的主因。說穿了，就是當時台南市在升學制度的「標新立異」，衍生了一些不公平且光怪陸離的現象。比方說，獲得外國的發明比賽金牌獎（很多是不常聽到的國家），就可以在升學時大幅加分，因此坊間就盛傳有業者提供保證得金牌的「服務」，開價幾十萬新台幣。還有，擔任幹部的次數，可以轉換成升學採計的成績，因此，為了不在這一項目被扣分（不是加分，是扣分），傳出有學生要花錢請班上同學吃吃喝喝才能當選幹部。而最讓許多家長有感的是，就是體適能成績了。體適能成績轉換成升學中的分數，美意是注重學生的身體

健康，但，實際上卻變成體適能未能達到最高標準的學生，在升學時就會被「扣分」。極端的例子就是有位教育會考成績滿分的學生，因為體適能成績不佳而進不了想就讀的學校。因此，有許多家長為了孩子的體適能成績，「南征北討」到外縣市去參加測驗，花錢花時間，就是為了達到最高標準。

更諷刺的是，第一年的台南區特招受到多位教育部長官及學者多次的重話批評，特招名額最多的台南一中與台南女中兩所學校，更是「眾矢之的」。沒想到隔年（長官換人了）台南區特招竟鹹魚翻身，成為「多元入學」的宣傳招牌之一，不僅多次受到教育部長官的稱讚、學者的背書，也成為台南市政府的「政績」。身歷其中的高中相關人員，想必不會有鹹魚翻身之喜，只有今夕是何夕之嘆！隨著台南區免試入學超額比序機制的逐年修正（向其他縣市靠攏），終於在107學年度第二學期時，參與台南區「108高中特色招生聯合考試分發入學」的6所高中學校，在各校的校務會議中通過，不再參與特招。換言之，台南區特招，雖然鹹魚翻身，仍要走入歷史！

台南區特招的功過、成敗，就留給學者去研究、評價。筆者親身經歷，寫下所見所聞，為這段歷史留下不同於官方觀點的紀錄。無論如何，台南區特招辦了5屆，這5屆裡有許多值得和大家分享數學試題，特別是以台南作為命題素材的試題。

二、試題賞析

台南市特招只考數學和英文兩科，數學除了第5屆（108）部分試題採用「國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心」（以下簡稱「心測中心」）研發的試題之外，其餘的試題均由台南一中數學科教師所研發，5屆特招下來，沒有任何的爭議與失誤。根據心測中心的〈107學年度特色招生考試分發入學台南區聯合考試考後分析報告〉：

特招數學科測驗與教育會考數學成績皆呈現顯著中度正相關（ $p < .01$ ），相關係數介於.61~.64間，代表兩測驗間具有中等程度之關聯，即會考數學分數較高之考生，在特招數學科的分數表現便可能較高。雖然兩測驗皆為數學成就測驗，但考量到特招考試較側重甄別各校特定性向之學生，與國中會考具有不同之目的，分析結果呈現中度正向關聯實屬合理。

可以這麼說，台南一中數學科教師所負責的特招數學科測驗，成功承擔了台南區特招的重責大任。

特招數學科試題中的最大亮點之一，就是以台南為命題素材的試題，融入台南的生活、文化、旅遊、美食…等特色，十足的「台南味」。「台南味」試題可分成兩類，一是將旅遊景點、美食小吃入題，另一則是取材自台南的生活資訊。特招數學科與生活相關的試題，取材不僅限於台南，還擴及全台。此外，謎題、網路流行語也都成為命題老師的靈感來源。筆者將這些試題整理分類如下，共賞之。

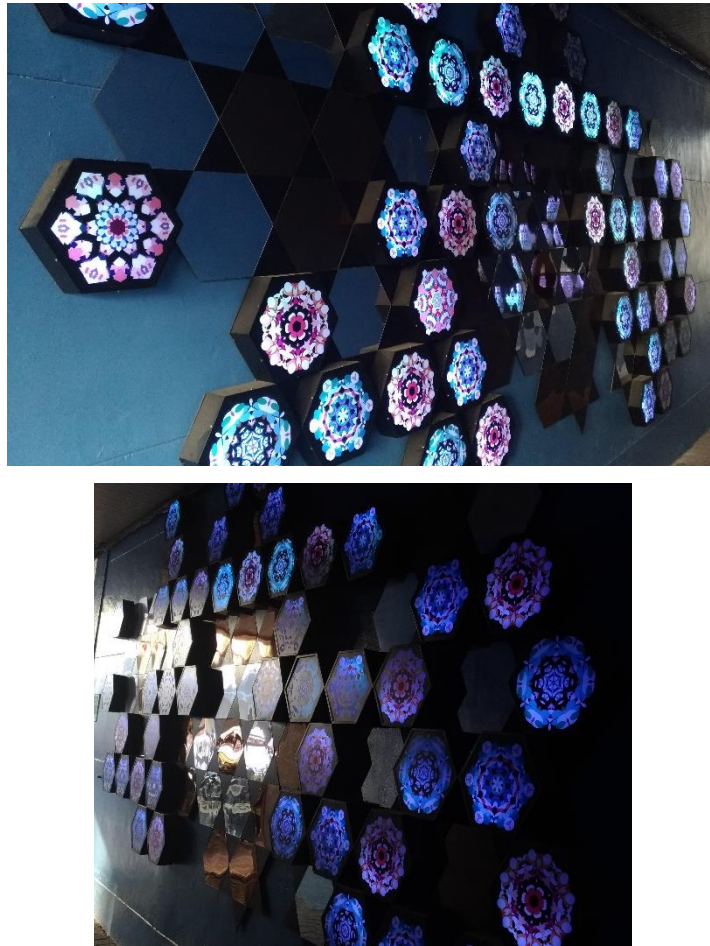
三、 台南味試題—旅遊、美食

許多遊客造訪台南的目的之一（甚至是唯一目的），就是品嚐道地的台南美食與小吃，命題教師們也充分善用了此一特色，設計了以善化牛肉湯 (106)、各式小吃 (108) 為主題的試題。善化牛墟是早期牛隻交易的地方，只有每月的 2、5、8、12、15、18、22、25、28 日開市，現已轉為固定的農民市集，沒有牛隻買賣，但有各式的日常生活用品與庶民美食，如果想到此品嚐最新鮮美味的牛肉湯（台南的牛隻屠宰場就在善化），只能在上述日期造訪，不然可就會白跑一趟。將善化牛墟的開市日期與牛肉湯融入試題，非在地人還真不知道其背後的意義。

除了牛肉湯、小吃，台南夜市也是一大特色。台南夜市並非每天營業，因此，就有人把台南幾個有名的夜市營業時間編成幾種口訣，方便記憶。夜市營業時間的口訣，就出現在 108 年的某一題試題之中，該題，當然不是在測驗口訣。造訪台南不是只有吃吃喝喝，還可以造訪有「迷你版亞馬遜森林」之稱的「四草綠色隧道」（下圖一），也可以在街頭角落欣賞「街道美術館 *PLUS*」的藝術作品（下圖二），這兩者也成了 108 年試題的主角。



圖一，四草綠色隧道一景



圖二，「街道美術館 PLUS」作品編號 12「落日拾光」

以下就是與旅遊、美食有關的 5 題試題：

年度：106 答案：(A) 答對率：0.314

善化某家牛肉湯店，清燙牛肉湯是店裡的招牌。該店固定在每月的 2、5、8、12、15、18、22、25、28 日營業。有導演為了電影拍攝，預定在善化停留兩個月，並且為了趕進度，只能在星期日休息。劇組在某月 1 日到達善化，想要找個星期日到品嚐該店的清燙牛肉湯，一查月曆嚇了一跳，發現該店這兩個月的星期日都不營業！如果該劇組不是在 2 月 1 日到達善化，請問該劇組到達善化的那一天是星期幾？ (A) 星期二 (B) 星期三 (C) 星期四 (D) 星期五。

年度：108 答案：(C) 答對率：0.899

阿明、丁丁、小智 3 人相約到臺南旅遊，每人各吃了 3 種不同小吃。現將 3 人所吃的 9 種小吃和價錢整理成表格如下：

項目	黑輪	冬瓜茶	香腸	菜粽	春捲	黑糖珍奶	棺材板	鹹粥	牛肉湯
價錢	10	15	20	30	35	50	60	90	100

阿明說：「我吃了春捲和另外 2 種，3 種價錢的平均為 55 元。」

丁丁說：「我吃了鹹粥和另外 2 種，3 種價錢可形成等差數列。」

阿明、丁丁、小智所吃的小吃都不重複，請問小智吃到了下列哪一種小吃？

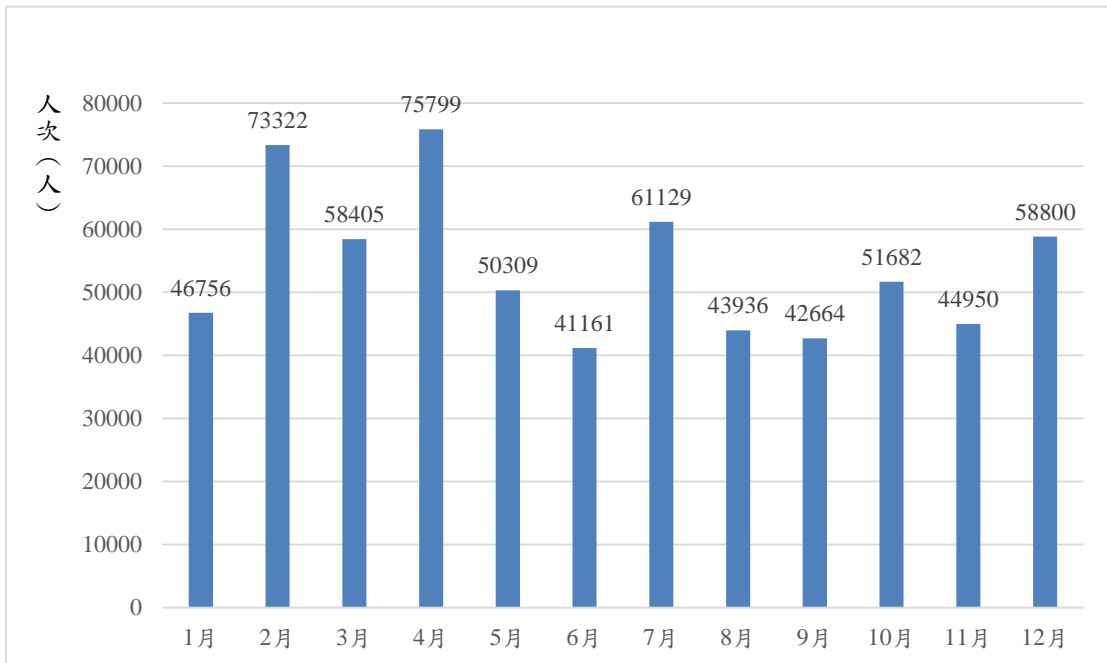
- (A) 黑輪 (B) 黑糖珍奶 (C) 棺材板 (D) 牛肉湯。

年度：108 答案：(C) 答對率：0.572

臺南人有句口訣「大大武花大武花」，其中的「大」指的就是「大東夜市」，一週之中營業週一、週二、週五，另四天不營業。小天向阿南承租「大東夜市」的攤位，約定每個月底以當月營業日數結算租金，當月營業的第 1 天租金 600 元，第 2 天租金 580 元，第 3 天租金 560 元，第 4 天租金 540 元……，依等差數列方式計算每個營業日的租金，則阿南月底所收租金的最大值為何？ (A) 5880 元 (B) 6240 元 (C) 6580 元 (D) 6900 元。

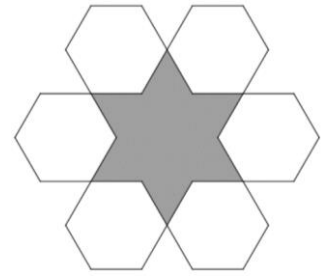
年度：108 答案：(B) 答對率：0.319

臺南市安南區四草大眾廟後方的水道，因兩旁的紅樹林如隧道般延伸，形成一條美麗的「四草綠色隧道」，亦有「迷你版亞馬遜森林」之稱，每年吸引許多遊客前往搭乘竹筏體驗。下圖是民國 107 年「四草綠色隧道」每月遊客人次長條圖，則民國 107 年每月遊客人次的第 1 四分位數（即第 25 百分位數）為何？ (A) 43936 人 (B) 44443 人 (C) 58405 人 (D) 67102 人。



年度：108 答案：(C) 答對率：0.936

2018 年臺南「街道美術館 PLUS」在中西區的中正路與海安路布置了許多件裝置藝術，其中一件是藝術家蔡奇宏創作的「落日拾光」，作品由許多正六邊形及其它元素所構成。下圖是「落日拾光」中某 6 個全等正六邊形的排列情形，若這 6 個正六邊形的面積和為 A ，圖中陰影部分的面積為 B ，則 A 是 B 的多少倍？ (A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5。



四、 台南味試題—民生資訊

日常生活中的許多生活資訊、公共政策、民生議題，常常是數學命題取材的來源，在各種升學考試之中，不時可見這類型的試題。104~108 台南區特招數學科試題，共有 5 題分別與交通議題（公車搭乘、停車費率）、節能省電、人口問題、水庫供水有關，均為當時受矚目或與民生息息相關的議題，只要考生留意生活周遭的民生時事，對這些主題應該都不會感到陌生。這類試題，整理如下：

年度：104 答案：(A) 答對率：0.901

台南市政府為了鼓勵市民搭乘公車，自 103 年 2 月起，將每月 22 日訂為台南市「公車日」。交通局為了鼓勵使用電子票證搭乘公車，舉辦「搭公車、抽好康」活動。自首次「公車日」起至 103 年底，累積搭乘 5 次「大台南公車」，即享有抽年度大獎的機會。已知到 103 年底，符合資格者共有 1858 人，而獎品共有 99 個。若某人符合資格，他中獎的機率最接近下列哪一個數？ (A) 0.05 (B) 0.03 (C) 0.005 (D) 0.003。

年度：105 答案：(C) 答對率：0.79

臺南市自 104 年 12 月 1 日起，在特定路段實施路邊停車格累進費率，第 1 小時 20 元、第 2 小時起每小時 30 元，例如停 2 小時收費 50 元，停 3 小時收費 80 元。國稅局辦理研習，共有 20 位專員從外地開車參加，國稅局代為支付當天早上 9 點至下午 4 點的路邊停車格停車費用。若此次研習總預算為 30000 元，並將各項支出與結餘做成圓形圖，則路邊停車格停車費用占圓心角最多為何？ (A) 24° (B) 36° (C) 48° (D) 72° 。

年度：105 答案：(B) 答對率：0.749

臺南市政府公告 104 年舉辦「省電爭霸戰，節電獎百萬」競賽活動，統計 6 至 11 月累積省電約 130 萬度，估計可減少 677 公噸碳排放量。已知使用 1200W 耗電量的吹風機 20 分鐘，用電量為 0.4 度，根據上述公告，換算碳排放量約為多少公斤？ (A) 0.1 公斤 (B) 0.2 公斤 (C) 0.4 公斤 (D) 0.8 公斤。

年度：104 答案：(D) 答對率：0.642

在研究人口問題時，依年齡大小將人口分成 0~14 歲、15~64 歲、65 歲以上三個年齡層。一般而言，15~64 歲年齡層是家中主要收入來源，而 0~14 歲與 65 歲以上是受扶養年齡

層，統計上稱 $\frac{0\sim 14\text{歲人口數} + 65\text{歲以上人口數}}{15\sim 64\text{歲人口數}} \times 100\%$ 為扶養比例。根據台南市民政

局各區人口統計資料，左鎮區的 0~14 歲年齡層佔 7%，且左鎮區的扶養比例為 48%，則左鎮區 65 歲以上人口比例大約是多少？ (A) 13% (B) 17% (C) 21% (D) 25%。

年度：107 答案：(A) 答對率：0.916

近來臺南水情吃緊，老師希望班上同學了解曾文水庫年供水量的噸數。同學上網搜尋維基百科，得知曾文水庫年供水量含下列三種：

(一) 自來水 1.2×10^8 立方公尺

(二) 工業用水 2.7×10^7 立方公尺

(一) 灌溉用水 9×10^8 立方公尺

已知 1 立方公尺的水重量為 1 噸，請問曾文水庫的年供水量為多少噸？ (A) 1.047×10^9 噸 (B) 1.29×10^9 噸 (C) 2.37×10^9 噸 (D) 3.72×10^9 噸。

五、一般民生資訊、生活情境試題

這幾年台灣道路上最大的變化，大概就屬電動機車的興起，Gogoro 不僅成功帶動話題，也刺激了消費買氣，越來越多家庭中都有（或曾考慮購買）電動機車。在購買電動機車時，電池的租金資費必然是考量的項目之一，如何根據自己的騎乘習慣選擇有利的資費，這就是數學上場的時機了。108 年特招數學科試題中，就有這麼實際的精算問題。與交通、能源有關的試題，還有輪胎上的數字解讀、能源價格的波動與電費的計算。另外空汙細懸浮微粒與登革熱病毒大小比較、運動時的心跳頻率、商圈的人數變化，也都入了特招試題。

此外，手搖飲料與 3C 產品幾乎是每個學生日常生活中不可或缺的「食糧」（給身體的跟給心靈的），透過數學設計，學生們可以計算手搖飲料促銷活動時的購買金額，還有 3C 產品尺寸大小的真實意義、是否接近黃金比例。

以下就是這類試題的整理，總計共有 10 題：

年度：108 答案：(A) 答對率：0.374

小張買了一輛電動機車，想就以下兩種電池租金方案選擇一種，其計費方式如下表：

資費方案	暢遊 499	暢遊 799
服務月費	499 元 含 300 公里騎乘里數	799 元 含 600 公里騎乘里數
額外里程	2.5 元/公里	1.5 元/公里

(說明：暢遊 499 方案，月租金 499 元，超過 300 公里部分，每公里外加 2.5 元；例如 5 月份帳單騎乘 500 公里，則需費用 $499 + (500 - 300) \times 2.5 = 999$ 元，但若採用暢遊 799 方案，則騎乘 500 公里僅需 799 元。)

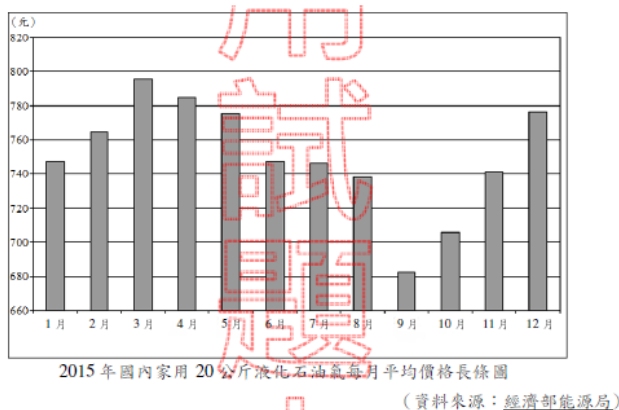
小張計算得知，當騎乘超過 x 公里，選擇「暢遊 799 方案」會比較省錢。已知 x 的最小值是一個三位數，則此三位數的所有數字和為多少？ (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9。

年度：104 答案：(C) 答對率：0.552

每週有 7 天，一年大約有 52 週。為了瞭解汽車輪胎的生產時間，每個輪胎上都標記一組四位數字，末兩位數字代表出廠年度，首兩位數字代表出廠週次。例如：四位數 1509 之中末兩位數字 09 表示年 2009，首兩位數字 15 代表該年度的第 15 週。若有一輪胎上的四位數字為 3713，請問此輪胎是該年度的幾月生產的？ (A) 七月 (B) 八月 (C) 九月 (D) 十月。

年度：105 答案：(C) 答對率：0.825

下圖為 2015 年國內家用 20 公斤液化石油氣每月平均價格長條圖，請問 2015 年全年平均價格在下列哪一個範圍之間？ (A) 700 元~720 元 (B) 720 元~740 元 (C) 740 元~760 元 (D) 760 元~780 元。



年度：107 答案：(C) 答對率：0.511

台電每期計算用電量以度為單位，採取四捨五入至整數位，電費計算方式依下表累進計算。例如：用電量 200 度時，電費為 $110 \times 2.1 + (200 - 100) \times 2.5 = 456$ 元。

用電度數	單價
110 以下	2.1 元
111 到 330	2.5 元
331 到 500	3 元
501 到 700	3.2 元
701 以上	3.5 元

已知阿志當期電費為 1483 元，請問他當期用電度數為何？ (A) 494 度 (B) 524 度 (C) 560 度 (D) 564 度。

年度：105 答案：(D) 答對率：0.852

所謂「PM2.5」是指粒徑小於 2.5 微米的細懸浮微粒，而登革熱病毒則是直徑約 30~50 奈米的球形病毒。已知 1 微米 = 10^{-6} 公尺，1 奈米 = 10^{-9} 公尺，試問：2.5 微米是 50 奈米的

多少倍？ (A) $\frac{1}{50}$ 倍 (B) $\frac{1}{20}$ 倍 (C) 20 倍 (D) 50 倍。

年度：105 答案：(B) 答對率：0.932

近來路跑風氣盛行，美國人傑克森在 2007 年發表的一篇論文裡，建議運動員在運動過程中每分鐘心跳次數最多為 $[206.9-(0.67 \times \text{年齡})]$ 次。根據傑克森的建議，一個 15 歲的運動員在運動過程中，每分鐘最多的心跳次數最接近下列哪一個選項？ (A) 195 次 (B) 197 次 (C) 199 次 (D) 201 次。

年度：107 答案：(A) 答對率：0.76

報載：「逢甲商圈墜丁化？年商機險跌出百億」，下圖為 2014 年至 2016 年的旅客人次與貢獻的年商機值（例如 2014 年的年商機值為 109 億元），則關於每 1 萬人次平均所貢獻的商機值，最高的年度與最低的年度各為何者？ (A) 2014 年最高，2015 年最低 (B) 2014 年最高，2016 年最低 (C) 2016 年最高，2015 年最低 (D) 2015 年最高，2016 年最低。



逢甲商圈 2014 年至 2016 年旅客人次及年商機值
(資料來源：2017 年 12 月 8 日 yahoo 奇摩新聞)

年度：105 答案：(A) 答對率：0.964

飲料店舉辦促銷活動：「綠茶一杯 20 元，每買 5 杯就多送 2 杯」。李小姐買綠茶，飲料店總共給她 50 杯，李小姐應該要付多少元？ (A) 720 元 (B) 740 元 (C) 760 元 (D) 780 元。

年度：106 答案：(B) 答對率：0.47

通常我們所說的 5 吋手機，指的是螢幕的對角線長度是 5 吋。一支螢幕的長寬比為 16:9 的 5 吋手機，其螢幕的長約為幾公分？已知 1 吋約等於 2.54 公分，選擇最接近的答案。

N	18.1	18.2	18.3	18.4	18.5	18.6	18.7	18.8	18.9
N^2	327.61	331.24	334.89	338.56	342.25	345.96	349.69	353.44	357.21

(A) 10 公分 (B) 11 公分 (C) 12 公分 (D) 13 公分。

年度：108 答案：(D) 答對率：0.66

很多人對黃金比例感到興趣，簡單來說，一個矩形若滿足「長:寬 = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1$ 」，則我們說

此矩形之長與寬滿足黃金比例。已知 $(2.2)^2 = 4.84$ ， $(2.25)^2 = 5.0625$ ，試問下列選項中，

哪一個比值最接近黃金比例的比值？ (A) 傳統螢幕的長:寬 = 4:3 (B) 寬螢幕電視的長:寬 = 16:9 (C) 超寬螢幕的長:寬 = 21:9 (D) 平板電腦螢幕的長:寬 = 3:2。

六、謎題、網路用語

將數學問題包裝成謎題，增加了解題的趣味性，但不可避免的，也會提升題目的難度。105 年的特招命題老師，利用等差數列設計了一題謎題，數學概念不難，但要正確作答，卻不是那麼容易。

網路流行用語「Orz」(亦可寫作「orz」)曾出現在 95 年的大學學測國文科試題：「3Q 得 Orz → 感謝得五體投地」，「Orz」作「五體投地」之意。流行樂團五月天也把「Orz」寫入《戀愛 ing》的歌詞之中。「Orz」還有「拜託！」、「被你打敗了！」、「真受不了你！」之意，108 年的台南區特招數學科再度將它入題，這次，不知道學生會不會感到「orz」？

年度：105 答案：(A) 答對率：0.587

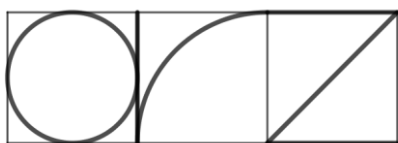
數學老師在課堂上出了一個數學謎題給學生：「我心中有四個數成等差數列，其中有兩個數的和是 14，且比另外兩個數的和還要小；其中又有兩個數的和是 18，也比另外兩個數的和還要小。有誰知道這四個數中，最大的數為何？」請問此數學謎題的答案為多少？

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20。

年度：108 答案：(A) 答對率：0.788

小南利用尺規作圖作出如圖(二)的圖案，作法是畫出圖(一)中三個邊長為 2 且相鄰的正方形，先作出第一個正方形的內切圓(即與正方形四個邊均相切的圓)，接著以第二個正方形的一頂點為圓心、邊長為半徑作出圓弧，然後再作出第三個正方形的一對角線，最後

把不需要的線段擦掉，就完成了。若圖(二)中圖案的線條總長度為 $a\pi + b\sqrt{2} + c$ ，其中 a 、 b 、 c 均為正整數，則 $a+b+c$ 之值為何？ (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14。(字形跑掉了)



圖(一)



圖(二)

七、結語

上述這些試題，有些充滿濃濃的「台南味」，有些雖不是取材自台南，但也都是台南一中數學老師所設計的試題，也可說是另一種「台南味」。無論是學生、數學老師還是一般人，透過這些試題（把答對與否、得分先拋一旁），除了可以應用數學，一定還會有「長知識了」的收穫。

筆者從104~108年這5屆台南區特招數學科試題中，挑選出個人覺得有創意、特別的「台南味」試題，仍有許多值得好好欣賞的試題未能寫入本文之中，留給有興趣的讀者自行上網搜尋這些試題。至於個別題目的考生作答分析，這工程頗為浩大，就留待未來有時間再說。抑或留給未來有心研究的人，分析這些數據，想必是很有意義的一件事！

最後，藉此文向台南一中參與台南區特招命題的數學老師、入闈協助的教授、心測中心研究員等人表達敬意！

參考文獻

廖翠雲、廖年淼 (2015). 〈免試入學超額比序機制催生台南區的特色招生〉，《臺灣教育評論月刊》，7(6)，頁33-39。

104~107學年度臺南區高級中等學校特色招生聯合考試數學科題本暨答案，下載網址：

<https://study.tnsh.tn.edu.tw/files/15-1003-16656,c981-1.php?Lang=zh-tw>

108學年度臺南區高級中等學校特色招生聯合考試數學科題本暨答案，下載網址：

<https://study.tnsh.tn.edu.tw/files/15-1003-16744,c981-1.php?Lang=zh-tw>

國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心〈107學年度特色招生考試分發入學台南區聯合考試考後分析報告〉（未公開）。

編註：原文刊登於《數學學科中心電子報》第 156 期

導讀《數學、詩與美》

洪萬生

臺灣數學史學會理事長

臺灣師範大學數學系退休教授

就我自己的閱讀經驗所及，作詩連結到數學家的心智活動，主要得自俄羅斯數學家桑雅·卡巴列夫斯基（Sonya Kovalevsky/Sofia Kovalevkaya, 1850-1891）的見證。她曾經引述一位十九世紀偉大數學家的說法，指出數學家 vs. 詩人的對比：

若一位數學家不具有幾分詩人的特質，那他就永遠成不了一個完整的數學家。

事實上，在卡巴列夫斯基的（自傳）《童年回憶》中，就相當具體地說明她自己身為數學/文學的「斜槓者」，如何協調「數學的理性」vs.「文學的感性」：

我瞭解你們會覺得奇怪，為什麼我能一邊忙文學，一邊搞數學。很多人由於從來沒有機會通曉更多的數學，都把數學和算術弄混在一起，而認為它是一門枯燥乏味的科學。事實上，它倒是一門需要大量想像力的科學呢。

本世紀一位數學家領袖就曾非常正確地陳述這種情形。他說：若一位數學家不具有幾分詩人的特質，那他就永遠成不了一個完整的數學家。當然，為了領悟這個定義的精確性，我們必須拋棄古代人那種認為「詩人總是無中生有，且發明與想像乃是同一回事」的偏見。⁷

在上述這段引文中，「想像力」顯然是關鍵詞。此外，她還指出「詩人只是感知了一般人所沒有感知到的東西，他們看的也比一般人深。其實數學家所做的，不也是同樣的事？」的確，數學家阿哈羅尼（Ron Aharoni）在他的《數學、詩與美》中，也強調：詩人和數學家「兩者都在尋求深度，一個在生活方面，一個在物質世界」，而且，也都在「尋求隱藏的模式」：「詩人和數學家一樣，是追尋模式的獵人。」

當然，數學家和詩人的心智活動還是有根本差異，那是因為誠如阿哈羅尼所說的：「數學家試圖發現世界上某些未知的東西，而詩人的目標則是潛入他（或她）自己的內心世界。發現世界中的秩序可以透過跟其他人的對話來完成，也可以經由別人想法的幫助，但是只有個人才能鑽入他自己的內在靈魂。」

因此，模式（pattern）之美及其追尋鑑賞的過程，誠然是本書《數學、詩與美》（*Mathematics, Poetry and Beauty*）的主題，同時，運用模式（並多方結合案例）來引證數學的真與美之一體兩面，也充分顯現作者著述本書的苦心造詣。然而，本書在另一方面所呈現的鑑賞詩歌之美的憑藉，譬如附錄 C 所提及的「濃縮」、「誇飾」，及「隱喻」等等機制或概念，對於數學人來說，卻不是那麼容易掌握，儘管有模式的概念可以類比。

⁷ 此處部分引文出自 Lynn Osen,〈桑雅·卡巴列夫斯基〉，載《女數學家列傳》，台北：九章出版社。

正如前述，詩意或文學的想像畢竟不同於數學的想像，專業的訓練確實有其必要。

這麼說來，以絕大部分數學人的有限的「數學＋文學」閱讀經驗為基礎，我們究竟如何找到鑑賞本書乃至帶領學生閱讀的切入點？

首先，讓我們先瀏覽本書的目次。除了短篇幅的導論〈魔法〉之外，還有三篇，依序是第 I 篇〈秩序〉、第 II 篇〈數學家與詩人如何思考〉，第 III 篇〈知覺的兩個層面〉。至於其主要訴求，則「第一部分是關於秩序，我們將在數學與詩兩個領域中挖掘隱藏的模式（hidden patterns）。第二部分探討兩個領域中的共同技法（common techniques）。最後，第三部分是對於美的概念作出結論」。

現在，我們簡要介紹第 II 篇中的〈濃縮〉（第 15 章）及〈來自某處的念頭〉（第 20 章），希望藉由其中有關數學與詩兩個領域的「共同技法」，可以幫助我們更深刻體會數學（及詩）的美。

在〈濃縮〉（第 15 章）中，作者指出「濃縮」的意義，乃是「用單一個敘述來傳達大量的資訊」，無怪乎詩與數學通常讓人難以理解。其實，教師如有教授函數（function）單元概念的經驗，想必都能體會如何進行所謂的「解壓縮」（decompression）概念的必要性。不過，在本章的脈絡中，作者基於詩學的對比，卻給了我們十分有趣的評論。他認為數學與詩兩者之間有個顯著的差異：

數學是垂直的濃縮，然而詩是水平的濃縮。換句話說，數學有許多階層，像是樓層一樣，一層建在另一層上面，卻用單一的敘述來濃縮。在詩中，有很多不同的想法，不需要分出次序，但它們被濃縮在一個詩句中。這就是為什麼對詩的模糊理解不會造成傷害，但示弱對數學理解的不透徹，就會在建造下個階層時得到痛擊的報應。

這種數學結構的建立，經常經由隱喻（metaphor）而得到一個已知結構的啟發，而這正是本書第 20 章〈來自某處的念頭〉的主題。在（普及）數學敘事中，隱喻（或譬喻）發揮了非常重要的角色，作者則在數學與詩的對比中，給了我們有趣的觀察：

數學跟詩一樣，靈感也常從一個領域引到另一個領域。正如一個貼切的隱喻越精緻，它的喻體（tenor）與喻源（vehicle）的距離就越遙遠，在數學中也是：如果靈感來自越遙遠的領域，那麼解決的方法會越優雅。數論常從意想不到的領域中得到靈感而聞名：例如幾何學、複數概念、微分學，事實上，幾乎是來自所有的其它的數學領域。

最後，我建議有興趣閱讀的數學老師，不妨先從本書的數學內容部分著手。由於本書作者阿哈羅尼是非常著名的數學家，同時，又擁有數學教育的深刻關懷 – 他的《小學數學怎麼教？》就是現身說法的最佳見證，因此，本書中源自數學本身乃至詩學對比思

維的洞識，是非常值得我們反思及分享的普及書寫。

如果讀者一開始覺得有關詩的對比說明頗為生疏或隔閡，則可以先行略過，等到多少可以掌握作者有關數學思維活動（譬如前述的第 15、20 章）的反思或洞識之後，再回過頭來體會/享受「讀詩」的樂趣。當然，如果一般讀者對「詩的機制」（譬如前引本書附錄 C 所提及）耳熟能詳，那麼，基於數學 vs. 詩的類比（*analogy*），也一定可以理解數學知識活動中的模式之意義。

再有，如果數學教師有意進一步利用本書來開授多元選修課程，諮詢具有文學專長（譬如國文或英文科）的同事一起切磋成長，然後，採取協同教學的模式，那麼，樹立跨域課程的教學範例，必定是（可以預期的）專業發展成就。

作者： Ron Aharoni
譯者： 蔡聰明
出版社：三民書局
出版日期：2019/08/23
語言：繁體中文



書籍資訊

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhv1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅視教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（銘傳國中）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國

中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高

中）鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）、洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）、林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）、李建勳（萬和國中）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜

（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學

園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（枋寮高中）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！